

Substitutions entre énergies, effet de serre et puits de carbone

Gilles Lafforgue*, Bertrand Magné†

et

Michel Moreaux‡

14 février 2006

Résumé

Nous déterminons les sentiers optimaux d'exploitation d'une ressource non renouvelable polluante et d'une ressource renouvelable propre lorsque les rejets polluants peuvent être réduits à la source et stockés dans des puits de carbone de capacités limitées et lorsque le stock de polluant accumulé dans l'atmosphère ne doit pas dépasser un certain seuil critique. Si la ressource renouvelable est abondante, il ne faut séquestrer les émissions qu'une fois ce seuil atteint et saturer les puits suivant l'ordre croissant de leurs coûts.

*Université de Toulouse 1 (INRA et LERNA), 21 Allée de Brienne, 31000 Toulouse. E-mail : glafforg@toulouse.inra.fr.

†Université de Toulouse 1 (CEA et LERNA), 21 Allée de Brienne, 31000 Toulouse. E-mail : bertrand.magne@univ-tlse1.fr.

‡Université de Toulouse I (IUF, IDEI et LERNA), 21 Allée de Brienne, 31000 Toulouse.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Le modèle	7
2.1	Hypothèses et notations	7
2.2	Formulation du problème et conditions d'optimalité	10
3	Les sentiers d'Hotelling et les sentiers optimaux en l'absence de puits de carbone	12
3.1	Détermination de dotation critique en ressource carbonée fossile au-delà de laquelle la contrainte de plafond de pollution est active	12
3.2	Caractérisation des sentiers optimaux pour des dotations initiales en ressource carbonée fossile supérieures à la dotation critique	15
4	Le cas d'un puits de carbone de grande capacité	17
5	Le cas d'un puits de carbone de petite capacité	21
6	Le cas de plusieurs puits de carbone	24
6.1	Position du problème	24
6.2	Le cas d'un second puits de "grande" capacité	25
6.3	Le cas d'un second puits de "petite" capacité	27
6.4	Généralisation au cas de n puits	28
6.5	Le modèle comme modèle à coût de séquestration croissant avec la séquestration cumulée	29
7	Conclusion	31
	Annexes	32
	Références	34

1 Introduction

Les émissions de gaz à effet de serre résultent pour l'essentiel de l'utilisation des ressources énergétiques carbonées fossiles¹. Les dispositifs techniques et les dispositions réglementaires et législatives qui permettraient de réduire ces émissions sont multiples, plus ou moins coûteux et susceptibles d'être mis en oeuvre dans des délais plus ou moins brefs. L'un des moyens envisagés pour réduire ces rejets dans l'atmosphère est le captage des gaz à la source d'émission et leur enfouissement après réduction, soit dans des réservoirs naturels, soit dans d'anciens sites miniers, qu'on appellera puits de carbone^{2,3}.

On se propose dans la présente étude, premièrement de déterminer quand et à quelle échelle ce mode de réduction des rejets de carbone dans l'atmosphère préconisé par l'IPCC⁴ dans son dernier rapport (IPCC, 2005), doit être utilisé, et deuxièmement de préciser comment le recours à ce mode d'abattement du flux de pollution modifie le sentier optimal de consommation des ressources carbonées fossiles, et ce, lorsque la concentration atmosphérique en carbone ne doit pas dépasser un certain seuil jugé critique, l'objectif déclaré de l'accord de Kyoto⁵.

La possibilité de séquestrer tout ou partie des gaz à effet de serre libérés par la combustion des ressources carbonées fossiles a fait l'objet de nombreuses études empiriques au moyen, le plus souvent, de modèles complexes dits d'évaluation intégrée (cf. par exemple

¹D'autres sources non négligeables sont les rejets animaux et humains, la réduction des couverts forestiers et l'extension des pratiques culturales favorisant la libéralisation du carbone contenu dans la couche superficielle des sols.

²Le terme puits de carbone est aussi utilisé pour désigner le stockage du carbone dans les végétaux, en particulier les forêts (voir par exemple IPCC, 2001). Ce n'est pas ce type de stockage que nous étudions ici.

³On peut aussi enfouir les gaz ainsi captés dans des puits de pétrole en cours d'exploitation pour augmenter la pression dans le puits, ce qui permet d'améliorer le rendement de l'extraction, et donc accroître aussi les réserves économiquement exploitables. C'est une technique déjà utilisée en Mer du Nord depuis 1996 par la compagnie norvégienne Statoil. L'analyse économique de ce type d'enfouissement pose des problèmes spécifiques qui ne sont pas abordés ici.

⁴Intergovernmental Panel on Climate Change.

⁵Bien que l'objectif déclaré de l'accord soit la stabilisation de la concentration atmosphérique des gaz à effet de serre, le texte de l'accord ne précise pas à quel niveau cette concentration devrait être stabilisée. Il prescrit, non pas un seuil de concentration à ne pas franchir mais un flux d'émissions à ne pas dépasser, tout au moins pour les pays développés. Plus exactement, il enjoint à ces pays d'avoir réduit leurs flux d'émissions de 1990, d'un certain pourcentage à une certaine date, laissant libre le parcours à suivre jusqu'à la date en question. Il est clair que même si un palier de stabilisation était affiché, un accord de ce type n'a aucune valeur d'engagement tant que les efforts à consentir par chacun des partis ne sont pas définis, c'est-à-dire tant que les flux maximum d'émission auxquels ils sont contraints ne sont pas explicités. Il s'agit là d'un problème classique de répartition du coût d'un bien public, mais complexe puisque posé dans un contexte dynamique. Le modèle développé ici n'a pas pour objet de rendre compte des négociations et des arbitrages auxquels donne lieu la définition de cette répartition. Puisque la variable clé des événements est la concentration atmosphérique en gaz à effet de serre, la formulation la plus directe consiste à poser le problème en termes de plafond limite de cette variable d'état.

Mc Farland *et al.*, 2003, Edmonds *et al.*, 2004, Kurosawa, 2004, Gitz *et al.*, 2005). Cette complexité est peut-être le prix à payer pour pouvoir disposer de modèles capables de rendre compte d'une réalité apparemment elle-même complexe, et donc le prix à payer pour pouvoir peut-être disposer de modèles opérationnels, c'est-à-dire de modèle suffisamment précis pour pouvoir définir des politiques. Mais la multitude des rétroactions à l'oeuvre dans de tels modèles tend à brouiller les lignes de force le long desquelles ces politiques devraient se déployer. Ce dont on a besoin pour bien marquer ces lignes de force, c'est de pouvoir disposer au contraire d'un modèle épuré.

Pour aller à l'essentiel, on suppose dans la présente étude qu'il n'y a qu'un seul type d'usager final et deux ressources primaires, une ressource carbonée fossile polluante et une ressource renouvelable propre. Les usagers désirent utiliser l'énergie sous une certaine forme et le coût d'approvisionnement à partir de l'une ou l'autre de ces deux sources primaires comprend l'ensemble des coûts de transformation de l'énergie primaire en question en énergie directement utilisable par lesdits usagers. Cette convention admise, les deux énergies primaires ainsi transformées sont alors de parfaits substituts l'une de l'autre pour les usagers finals. On pose que le coût de transformation de la ressource non renouvelable en énergie utile est inférieur au coût de transformation de la ressource renouvelable, ce qui est le cas actuellement.

Poser l'existence d'un plafond de concentration des gaz à effet de serre présents dans l'atmosphère, plafond à ne pas crever, couplé au fait que le stock de ces gaz est lui-même progressivement éliminé par régénération naturelle⁶, contraint implicitement le taux instantané de consommation de la ressource polluante dès que le plafond de concentration atmosphérique est atteint, pour autant qu'on s'abstient de capter et de séquestrer tout ou partie du flux de gaz à effet de serre ainsi produit. Deux points méritent alors d'être soulignés.

Le premier est le fait que, le long d'un sentier optimal, l'intervalle de temps au cours duquel cette contrainte dérivée sur le flux de consommation de la ressource carbonée fossile est effective, est endogène. La date à laquelle le stock de carbone atmosphérique atteint le plafond est une fonction du sentier de consommation de la ressource carbonée fossile suivi depuis l'instant initial. La contrainte posée sur le stock de carbone présent dans

⁶Il s'agit en réalité d'un processus de séquestration naturelle, donc gratuit, dans des puits de très grande capacité, essentiellement les océans (voir par exemple IPCC, 2001, pour plus de détails).

l'atmosphère doit donc faire sentir ses effets sur la totalité du sentier de consommation de la ressource non renouvelable, et donc aussi sur le sentier de consommation de la ressource renouvelable puisque les deux ressources sont de parfaits substituts l'une de l'autre.

Le second point à souligner est que la société dispose de deux options pour relâcher la contrainte qui limite le flux de consommation de la ressource fossile lorsque le plafond de concentration atmosphérique en carbone est atteint. L'une consiste à substituer la ressource renouvelable propre à la ressource non renouvelable polluante, l'autre consiste à séquestrer tout ou partie des rejets polluants qu'implique l'usage de la ressource non renouvelable. Chacune de ces options a d'abord un coût monétaire. La ressource renouvelable est plus chère à exploiter que la ressource fossile. Séquestrer les gaz à effet de serre issus de la combustion de la ressource fossile a aussi un coût. Mais chacune de ces options a de plus un coût d'opportunité spécifique.

A la consommation de la ressource carbonée fossile est d'abord associée une rente minière comme toute ressource non renouvelable disponible en quantité limitée, auquel il faut ajouter deux shadow costs correspondant respectivement au stock de carbone présent dans l'atmosphère et au stock de carbone déjà séquestré dans le puits lorsque la pollution est réduite à la source par enfouissement⁷. Poser que la concentration atmosphérique en carbone ne doit pas dépasser un certain seuil, avec l'option d'enfouissement dans un puits, revient à poser qu'on peut de fait envoyer le carbone résiduel dans deux réservoirs, chacun ayant une capacité instantanée de stockage limitée, mais dont l'un, le réservoir atmosphérique, a la propriété de faire disparaître progressivement le carbone qu'il contient de sorte que sa capacité de stockage au cours du temps est infinie. Cependant, pour pouvoir disposer de cette capacité infinie, il faut restreindre le flux de carbone qu'on y envoie lorsque le réservoir est à saturation. Dès lors on conçoit aisément que les dynamiques des variables duales associées à chacun de ces deux stocks, les deux shadow costs, obéissent à deux lois différentes et que leurs trajectoires divergent au cours du temps.

A l'utilisation de la ressource renouvelable est éventuellement associée une rente de rareté lorsque le flux exploitable de cette ressource n'est pas très abondant.

Pour mieux mettre en évidence les dynamiques de ces diverses rentes, on suppose que tous les coûts monétaires marginaux sont constants, ainsi que le taux d'auto-régénération naturelle. On suppose également que tous les coûts monétaires, ainsi que la valorisation de

⁷Le problème est sous cet aspect assez semblable à celui des sites d'enfouissement des déchets industriels et ménagers, traité dans Gaudet *et al.*, 2001.

la consommation d'énergie, le surplus brut instantané qu'elle génère, restent les mêmes au cours du temps.

L'article est organisé de la façon suivante. Le modèle est présenté à la section 2. On détermine à la section 3 ce que seraient les sentiers optimaux d'exploitation des deux ressources s'il n'était pas possible de séquestrer le carbone à la source, c'est-à-dire s'il n'était pas possible de réduire le flux de carbone résultant de la consommation de l'énergie fossile au moment même où ce carbone est rejeté dans l'atmosphère, c'est-à-dire encore au moment même où l'énergie fossile est utilisée. On examine ensuite à la section 4 ce que deviennent ces sentiers optimaux lorsque la capacité de rétention des puits est suffisamment importante pour que la société soit en mesure d'y séquestrer tout le carbone qu'elle voudrait y enfouir. On convient d'appeler puits de grande capacité un tel puits, c'est-à-dire un puits dont la capacité de stockage n'est jamais saturée le long du sentier optimal d'exploitation des ressources lorsqu'on néglige la contrainte de capacité du puits en question. On montre à la section 5 comment sont déterminées les trajectoires optimales lorsqu'au contraire la capacité des réservoirs de stockage du carbone doit être saturée, puits qu'on appelle puits de petite capacité. Le fait qu'un puits soit grand ou petit est donc une caractéristique endogène. L'ordre de présentation des résultats peut être lu comme un algorithme qui permet d'identifier si un puits est grand ou petit. On généralise l'analyse au cas de puits multiples, chacun ayant un coût d'accès différent des autres et une certaine capacité de stockage. On montre que ces puits doivent être saturés par ordre croissant de leurs coûts d'accès, et ce indépendamment de leurs capacités de stockage et on identifie le puits de coût d'accès le plus élevé dans lequel on doit enfouir le carbone. On montre aussi comment ce modèle de puits multiples peut être vu comme l'approximation d'un modèle plus réaliste dans lequel le coût marginal de séquestration dans chaque puits est une fonction croissante du stock de carbone déjà enfoui dans le puits en question. Enfin, on conclut brièvement à la section 6.

2 Le modèle

2.1 Hypothèses et notations

On considère une économie dans laquelle le surplus instantané permis par la consommation d'une quantité d'énergie⁸ q_t a pour valeur $u(q_t)$. L'hypothèse 1 résume les propriétés standards de la fonction u que nous postulons dans cette étude.

Hypothèse 1 : $u : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 strictement croissante et strictement concave, qui vérifie la condition d'Inada : $\lim_{q \downarrow 0} u'(q) = +\infty$, où $u'(q) \equiv du/dq$.

Dans ce qui suit on note indifféremment $u'(q)$ ou $p(q)$ la fonction inverse de demande et par d , l'inverse de la fonction u' c'est-à-dire la fonction de demande d'énergie⁹ : $\forall p > 0$, $d(p) = q$ tel que $u'(q) = p$. On note u'' la dérivée seconde de u . Sous l'hypothèse 1, $u'(q) > 0$ et $u''(q) < 0$, $\forall q > 0$.

La société dispose de deux sources d'énergie, une énergie carbonée fossile non renouvelable et une énergie renouvelable. Pour aller à l'essentiel on suppose que ces deux ressources sont de parfaits substituts l'une de l'autre pour les usagers de sorte que si x_t est la consommation instantanée de ressource fossile et si y_t est la consommation instantanée de ressource renouvelable, alors le surplus permis par cette consommation (x_t, y_t) a pour expression $u(x_t + y_t)$, i.e. $q_t = x_t + y_t$.

La ressource non renouvelable est exploitable au coût moyen constant c_x , qui est donc aussi le coût marginal. Le coût doit être compris comme un coût complet de mise à la disposition des usagers. Il comprend donc non seulement le coût d'extraction de la ressource fossile, mais aussi les coûts de transformation et de transport pour mise à la disposition des usagers.

On note \tilde{x} le flux de ressource non renouvelable qu'il conviendrait de consommer pour que le surplus marginal soit égal au coût marginal monétaire de la ressource. En d'autres termes \tilde{x} est la solution de $u'(x) = c_x$, soit encore $\tilde{x} = d(c_x)$.

⁸Stricto sensu q_t est une puissance et la quantité d'énergie consommée, e , sur l'intervalle de temps $[t, t + dt)$, est, au premier ordre, en supposant q_t différentiable, égale à $(q_t + dq_t/dt)dt$.

⁹Stricto sensu la fonction d'appel de puissance.

Notons X^0 le stock de ressource non renouvelable initialement disponible et X_t le stock encore disponible à l'instant t de sorte que :

$$\dot{X}_t = -x_t, X_0 = X^0 \text{ et } X_t \geq 0, t > 0.$$

L'utilisation de la ressource non renouvelable a pour conséquence le rejet dans l'atmosphère d'un polluant, disons de carbone pour simplifier. Soit ζ le contenu en carbone d'une unité de ressource de sorte que le taux instantané de rejet serait égal à ζx_t en l'absence de traitement des rejets à la source.

Notons Z_t le stock de polluant présent dans l'atmosphère à l'instant t et z_t le taux instantané des rejets. Ce stock a une certaine capacité d'auto-régénération. Pour simplifier on le suppose constant (cf. par exemple Kolstad et Krautkraemer, 1993). Plus précisément on suppose que le taux proportionnel instantané d'auto-régénération est constant et égal à α , de sorte que :

$$\dot{Z}_t = z_t - \alpha Z_t.$$

On pose que le stock de polluant présent dans l'atmosphère ne peut pas excéder un certain seuil critique \bar{Z} . Soit Z^0 le stock de carbone atmosphérique dont hérite la société, inférieur au plafond, $Z^0 < \bar{Z}$. On doit avoir :

$$\bar{Z} - Z_t \geq 0, t \geq 0 \text{ et } Z_0 = Z^0.$$

Le flux de polluant potentiel peut être traité et séquestré dans n puits de carbone que l'on suppose chacun étanche. Soient $i = 1, \dots, n$ les indices des puits en question. Chaque puits i est défini par deux caractéristiques, un coût unitaire monétaire c_{si} de séquestration du polluant et une capacité \bar{S}_i du puits. Convenons d'indexer les puits par ordre croissant de leurs coûts : $c_{s1} < \dots < c_{si} < \dots < c_{sn}$. Les capacités des puits n'ont a priori aucune relation avec les coûts, mais la théorie développée est compatible avec toute forme de relation. Soit S_i^0 le volume de polluant initialement présent dans le puits i . Sans perte de généralité on peut poser que $S_i^0 = 0, i = 1, \dots, n$.¹⁰ On a donc :

$$z_t = \zeta x_t - \sum_{i=1}^n s_{it}, t \geq 0$$

¹⁰On peut toujours redéfinir la capacité du puits, pertinente pour l'étude, comme la différence entre sa capacité physique et le stock déjà présent à l'instant 0.

où s_{it} est la quantité de carbone séquestrée¹¹ dans le puits i à l'instant t , de sorte que :

$$\begin{aligned} \dot{S}_{it} &= s_{it} \text{ et } S_{i0} = 0 \quad , i = 1, \dots, n \text{ et } t \geq 0 \\ \bar{S}_i - S_{it} &\geq 0 \quad , i = 1, \dots, n \text{ et } t \geq 0. \end{aligned}$$

Lorsque le plafond \bar{Z} est atteint, on doit avoir $\dot{Z}_t = 0$. Le flux maximal de ressource non renouvelable qu'il est possible de consommer sans avoir à traiter les rejets est donc égal à $\bar{x} = \alpha \bar{Z} / \zeta$. On note \bar{p} l'utilité marginale d'une consommation égale à \bar{x} , $\bar{p} = u'(\bar{x})$. On pose que pour chaque puits i , la somme du coût moyen d'extraction c_x et du traitement des rejets s'ils doivent être séquestrés dans le puits en question, à savoir $c_{si}\zeta$, est inférieure à \bar{p} . En d'autres termes, quel que soit le puits dans lequel les rejets sont séquestrés, le coût moyen de mise à la disposition des usagers d'une unité de ressource non renouvelable propre (i.e. sans rejet polluant) est inférieure à \bar{p} . Si, pour le puits i , cette somme $c_x + c_{si}\zeta$ était supérieure à \bar{p} la société devrait ne jamais utiliser le puits i en question. Mieux vaut en effet alors ne pas séquestrer dans ce puits et rester contraint au niveau de consommation \bar{x} .

Hypothèse 2 : $\forall i = 1, \dots, n : c_x + c_{si}\zeta < \bar{p}$.

L'énergie renouvelable est une énergie non polluante qui peut être mise à la disposition des usagers à un coût moyen constant égal à c_y supérieur à \bar{p} . Si c_y était inférieur à \bar{p} , la condition $\bar{Z} - Z_t$ ne contraindrait jamais la consommation d'énergie.

Soit \bar{y} le flux de cette énergie disponible à chaque instant. Notons \tilde{y} le flux qu'il conviendrait de mettre en permanence à la disposition des usagers en l'absence de l'énergie fossile, si \bar{y} était suffisamment important. En d'autres termes \tilde{y} est la solution de $u'(y) = c_y$, soit encore $\tilde{y} = d(c_y)$. On suppose que le flux disponible d'énergie renouvelable est abondant, c'est-à-dire au moins égal à \tilde{y} , de sorte qu'aucune rente pure n'a jamais à être imputée à cette ressource¹².

Hypothèse 3 : $\bar{p} < c_y$ et $\tilde{y} < \bar{y}$.

Soit $\rho > 0$ le taux d'actualisation social instantané. Le bien-être est égal à la somme des surplus instantanés actualisés à ce taux. L'objectif est de maximiser ce bien-être.

¹¹On évoque habituellement la séquestration du carbone comme une technique permettant d'éliminer les seules émissions issues de la production électrique ainsi que d'une partie des émissions industrielles.

¹²Le cas d'une ressource renouvelable rare est traité dans Lafforgue *et al.* (2005).

2.2 Formulation du problème et conditions d'optimalité

Le problème que le planificateur doit résoudre est le problème (P) suivant :

$$(P) \quad \max_{\{(s_{it}, i=1, \dots, n, x_t, y_t), t \geq 0\}} \int_0^\infty \left[u(x_t + y_t) - \sum_{i=1}^n c_{si} s_{it} - c_x x_t - c_y y_t \right] e^{-\rho t} dt \quad (1)$$

sous les contraintes :

$$\dot{X}_t = -x_t, \quad X_0 = X^0 > 0 \text{ donné} \quad (2)$$

$$X_t \geq 0 \quad (3)$$

$$\dot{S}_{it} = s_{it}, \quad S_{i0} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$\bar{S}_i - S_{it} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

$$\dot{Z}_t = \zeta x_t - \sum_{i=1}^n s_{it} - \alpha Z_t, \quad Z_0 = Z^0 < \bar{Z} \text{ donné} \quad (6)$$

$$\bar{Z} - Z_t \geq 0 \quad (7)$$

$$\zeta x_t - \sum_{i=1}^n s_{it} \geq 0 \quad (8)$$

$$s_{it} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

$$x_t \geq 0 \text{ et } y_t \geq 0 \quad (10)$$

Soit \mathcal{L}_t le lagrangien en valeur courante du problème¹³ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t = & u(x_t + y_t) - \sum_{i=1}^n c_{si} s_{it} - c_x x_t - c_y y_t - \lambda_t x_t + \sum_{i=1}^n \eta_{it} s_{it} \\ & + \mu_t \left[\zeta x_t - \sum_{i=1}^n s_{it} - \alpha Z_t \right] + \sum_{i=1}^n \nu_{it} [\bar{S}_i - S_{it}] + \nu_{Zt} [\bar{Z} - Z_t] \\ & + \bar{\gamma}_{st} \left[\zeta x_t - \sum_{i=1}^n s_{it} \right] + \sum_{i=1}^n \gamma_{it} s_{it} + \gamma_{xt} x_t + \gamma_{yt} y_t \end{aligned}$$

Les conditions de premier ordre sont les suivantes :

$$\partial \mathcal{L}_t / \partial s_{it} = 0 \Leftrightarrow c_{si} = \eta_{it} - \mu_t - \bar{\gamma}_{st} + \gamma_{it}, \quad i = 1, \dots, n \quad (11)$$

$$\partial \mathcal{L}_t / \partial x_t = 0 \Leftrightarrow u'(x_t + y_t) = c_x + \lambda_t - \mu_t \zeta - \bar{\gamma}_{st} \zeta - \gamma_{xt} \quad (12)$$

$$\partial \mathcal{L}_t / \partial y_t = 0 \Leftrightarrow u'(x_t + y_t) = c_y - \gamma_{yt} \quad (13)$$

avec les conditions d'écart complémentaires :

$$\bar{\gamma}_{st} \geq 0 \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}_{st} \left[\zeta x_t - \sum_{i=1}^n s_{it} \right] = 0 \quad (14)$$

¹³Comme d'habitude dans ce genre de problème on néglige la contrainte $X_t \geq 0$ dans l'écriture du lagrangien.

$$\gamma_{it} \geq 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{it}s_{it} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (15)$$

$$\gamma_{xt} \geq 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{xt}x_t = 0 \quad (16)$$

$$\gamma_{yt} \geq 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yt}y_t = 0 \quad (17)$$

La dynamique des variables adjointes est déterminée par les équations suivantes :

$$\dot{\lambda}_t = \rho\lambda_t - \partial\mathcal{L}_t/\partial X_t \Leftrightarrow \dot{\lambda}_t = \rho\lambda_t \Leftrightarrow \lambda_t = \lambda_0 e^{\rho t} \quad (18)$$

$$\dot{\eta}_{it} = \rho\eta_{it} - \partial\mathcal{L}_t/\partial S_{it} \Leftrightarrow \dot{\eta}_{it} = \rho\eta_{it} + \nu_{it}, \quad i = 1, \dots, n \quad (19)$$

$$\dot{\mu}_t = \rho\mu_t - \partial\mathcal{L}_t/\partial Z_t \Leftrightarrow \dot{\mu}_t = (\alpha + \rho)\mu_t + \nu_{Zt} \quad (20)$$

avec les conditions d'écart complémentaires :

$$\nu_{it} \geq 0 \quad \text{et} \quad \nu_{it} [\bar{S}_i - S_{it}] = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (21)$$

$$\nu_{Zt} \geq 0 \quad \text{et} \quad \nu_{Zt} [\bar{Z} - Z_t] = 0 \quad (22)$$

Enfin les conditions de transversalité à l'infini ont pour expression :

$$\lim_{t \uparrow \infty} e^{-\rho t} \lambda_t X_t = \lambda_0 \lim_{t \uparrow \infty} X_t = 0 \quad (23)$$

$$\lim_{t \uparrow \infty} e^{-\rho t} \eta_{it} S_{it} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (24)$$

$$\lim_{t \uparrow \infty} e^{-\rho t} \mu_t Z_t = 0 \quad (25)$$

On notera d'abord que $\eta_{it} \leq 0$. η_{it} est la valeur marginale à l'instant t du stock de carbone déjà séquestré à cette date dans le puits i . Si la capacité d'absorption de ce puits est limitée et si à cette date t , S_{it} subissait une variation exogène $dS_{it} > 0$, la valeur optimisée de la fonction d'objectif du programme (P) diminuerait¹⁴. Par ailleurs tant que le puits i n'est pas saturé, i.e. tant que $\bar{S}_i - S_{it} > 0$, $\nu_{it} = 0$, d'où d'après (19) :

$$\bar{S}_i - S_{it} > 0 \Rightarrow \eta_{it} = \eta_{i0} e^{\rho t}. \quad (26)$$

Pour une raison analogue à celle qu'on vient d'évoquer on doit avoir aussi $\mu_t \leq 0$. μ_t est la valeur marginale, à l'instant t , du stock de carbone présent dans l'atmosphère à cette date. Puisque le stock de carbone qui peut être présent dans l'atmosphère est lui aussi limité, si à la date t , Z_t subissait une variation exogène $dZ_t > 0$, la valeur optimisée de la fonction d'objectif du programme (P) ne pourrait, au mieux, que rester constante et au pire, diminuer. Par ailleurs supposons que sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$ le stock de

¹⁴Si la capacité est suffisamment importante alors $\eta_{it} = 0$, $t \geq 0$, cf. infra section 4.

carbone présent dans l'atmosphère soit inférieur au plafond \bar{Z} , $\bar{Z} - Z_t > 0$, $t \in [t_0, t_1]$. On doit alors avoir $\nu_{Zt} = 0$ de sorte qu'en intégrant (20), on obtient :

$$\mu_t = \mu_{t_0} e^{(\alpha+\rho)(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (27)$$

La différence de dynamique des η_{it} , $i = 1, 2$ et de μ_t tient aux faits suivants. La décision d'utilisation de la capacité de stockage du puits de carbone i est une décision irréversible en ce sens que S_{it} est nécessairement une fonction monotone non décroissante. Grâce à la régénération naturelle, le stock de polluant dans l'atmosphère Z_t peut lui croître ou décroître, et de fait il sera amené à décroître, quoique la société décide en matière d'enfouissement, du simple fait que le stock de ressource fossile est fini. Comme on va le voir aux sections suivantes, cette asymétrie structure fortement la solution.

Enfin, il doit être clair que si à partir d'une certaine date la contrainte $\bar{Z} - Z_t$ n'est plus jamais active, alors $\mu_t = 0$ à tout instant postérieur à cette date.

3 Les sentiers d'Hotelling et les sentiers optimaux en l'absence de puits de carbone

3.1 Détermination de dotation critique en ressource carbonée fossile au-delà de laquelle la contrainte de plafond de pollution est active

On sait qu'en l'absence de contrainte sur la concentration atmosphérique en carbone¹⁵, le long du sentier de prix, la rente minière devant croître au taux d'actualisation ρ , le prix étant égal à la somme de cette rente et du coût marginal (égal ici au coût moyen) sur tout intervalle de temps pendant lequel la ressource fossile est consommée. On a en effet d'après (12) dans ce cas, en posant $\mu_t = 0$, $\bar{\gamma}_{st} = 0$ et $\gamma_{xt} = 0$, compte tenu de (18) :

$$u'(x_t + y_t) = c_x + \lambda_0 e^{\rho t}.$$

¹⁵En l'absence de cette contrainte la fonction d'objectif du programme (P) devient :

$$\int_0^\infty [u(x_t + y_t) - c_x x_t - c_y y_t] e^{-\rho t} dt$$

et les contraintes (4) à (9) disparaissent. La condition de premier ordre (11) n'a plus lieu d'être, non plus que les conditions (14), (15), (19)-(22), ni (24)-(25). La condition (12) devient, compte tenu de (18) :

$$u'(x_t + y_t) = c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - \gamma_{xt}.$$

La condition (13) ne change pas, ni les conditions (16), (17) et (23).

Si au cours de ce même intervalle de temps la ressource renouvelable devait être aussi exploitée, la condition (13) deviendrait :

$$u'(x_t + y_t) = c_y.$$

Cette condition et la condition précédente sont contradictoires. Les deux ressources ne doivent donc pas être exploitées simultanément.

Puisque $c_x < c_y$, on doit exploiter la ressource fossile qui est la moins coûteuse, ce qui n'est possible que si on l'exploite en premier. En effet l'exploitation de la ressource non renouvelable n'est possible que si $\lambda_0 \in (0, c_y - c_x)$, auquel cas elle est consommée seule sur l'intervalle de temps $[0, T^H(\lambda_0)]$ où $T^H(\lambda_0)$ est la solution de l'équation $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} = c_y$. On a alors :

$$u'(x_t) = c_x + \lambda_0 e^{\rho t}, \gamma_{xt} = 0 \text{ et } \gamma_{yt} = c_y - (c_x + \lambda_0 e^{\rho t}), t \in [0, T^H(\lambda_0)]$$

de sorte que la condition (13) peut être vérifiée avec $y_t = 0$. Les deux conditions (12) et (13) sont donc simultanément vérifiées sur l'intervalle $[0, T^H(\lambda_0)]$.

A partir de la date $T^H(\lambda_0)$ seule la ressource renouvelable doit être exploitée. Au-delà de cette date $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} > c_y$. Posons alors $\gamma_{xt} = c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - u'(\tilde{y}) \equiv c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - c_y$. Puisque $y_t = \tilde{y} > 0$, alors $\gamma_{yt} = 0$ de sorte que la condition (13) s'écrit maintenant $u'(\tilde{y}) = c_y$, équation qui n'est autre que l'équation de définition de \tilde{y} . Pour la valeur ci-dessus de γ_{xt} , la condition (12) devient :

$$u'(\tilde{y}) = c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - \gamma_{xt} \equiv c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - (c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - c_y) = c_y,$$

de sorte que les deux conditions (12) et (13) sont simultanément vérifiées sur l'intervalle $[T^H(\lambda_0), \infty)$.

Tout ceci n'a de sens que si la date $T^H(\lambda_0)$ est la date d'épuisement de la ressource non renouvelable. Cette condition d'épuisement est la condition qui détermine la valeur de λ_0 :

$$\int_0^{T^H(\lambda_0)} d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t}) dt = X^0.$$

Notons λ_0^H la solution de cette équation. En tant que fonction de X^0 , λ_0^H est une fonction strictement décroissante :

$$d\lambda_0^H/dX^0 < 0,$$

dont les valeurs limites sont respectivement :

$$\lim_{X^0 \downarrow 0} \lambda_0^H = c_y - c_x \quad \text{et} \quad \lim_{X^0 \uparrow \infty} \lambda_0^H = 0.$$

Substituons $\lambda_0^H(X^0)$ à λ_0 dans $T^H(\lambda_0)$. Notons $\tilde{T}^H(X^0)$ la fonction ainsi obtenue. La fonction $\tilde{T}^H(X^0)$ est une fonction strictement croissante :

$$d\tilde{T}^H/dX^0 = \left(dT^H/d\lambda_0\right) \left(d\lambda_0^H/dX^0\right) > 0$$

dont les valeurs limites sont :

$$\lim_{X^0 \downarrow 0} \tilde{T}^H = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{X^0 \uparrow \infty} \tilde{T}^H = \infty.$$

Pour tout $\lambda_0 \in (0, c_y - c_x)$ définissons $Z_t^H(\lambda_0)$, $t \in [0, T^H(\lambda_0)]$, comme le stock de polluant atmosphérique qu'implique la politique de consommation de la ressource fossile $x_t = d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t})$ en l'absence de traitement des rejets polluants. $Z_t^H(\lambda_0)$ est la solution de l'équation différentielle :

$$\dot{Z}_t = \zeta d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t}) - \alpha Z_t, \quad Z_0 = Z^0, \quad t \in [0, T^H(\lambda_0)].$$

Soit $Z_m^H(\lambda_0)$ la valeur maximale de $Z_t^H(\lambda_0)$:

$$Z_m^H(\lambda_0) = \max \left\{ Z_t^H(\lambda_0), t \in [0, T^H(\lambda_0)] \right\}.$$

$Z_m^H(\lambda_0)$ est une fonction décroissante de λ_0 puisque $d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t})$ est elle-même une fonction décroissante de λ_0 :

$$dZ_m^H/d\lambda_0 < 0.$$

Il doit être clair que si λ_0 est suffisamment faible, alors $Z_m^H(\lambda_0) > \bar{Z}$, le plafond de concentration est alors dépassé¹⁶.

Dans $Z_m^H(\lambda_0)$ substituons $\lambda_0^H(X^0)$ à λ_0 et soit $\tilde{Z}_m^H(X^0)$ la fonction ainsi obtenue. Puisque λ_0^H est une fonction strictement décroissante de X^0 , alors \tilde{Z}_m^H est une fonction strictement croissante de X^0 :

$$d\tilde{Z}_m^H/dX^0 = \left(dZ_m^H/d\lambda_0\right) \left(d\lambda_0^H/dX^0\right) > 0,$$

¹⁶Pour λ_0 proche de 0, $d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t}) \simeq d(c_x) \equiv \tilde{x}$ sur un intervalle de temps d'autant plus long que λ_0 est proche de 0. L'équation d'évolution du stock de polluant devient alors :

$$\dot{Z}_t = \zeta \tilde{x} - \alpha Z_t, \quad Z_0 = Z^0,$$

d'où :

$$Z_t = \zeta \tilde{x} / \alpha + (Z^0 - \zeta \tilde{x} / \alpha) e^{-\alpha t}.$$

Pour t suffisamment élevé, $Z_t \simeq \tilde{Z} \equiv \zeta \tilde{x} / \alpha$. Puisque par hypothèse $\tilde{x} > \bar{x}$, alors $\tilde{Z} = \zeta \tilde{x} / \alpha > \zeta \bar{x} / \alpha = \bar{Z}$.

dont les valeurs limites sont¹⁷ :

$$\lim_{X^0 \downarrow 0} \tilde{Z}_m^H = Z^0 \quad \text{et} \quad \lim_{X^0 \uparrow \infty} \tilde{Z}_m^H = \zeta \tilde{x} / \alpha > \bar{Z}.$$

On déduit des inégalités précédentes qu'il existe une valeur critique de la dotation initiale en ressource fossile en-deçà de laquelle, en suivant le sentier de Hotelling standard, le plafond de concentration en carbone ne sera jamais atteint et au-delà de laquelle ce plafond sera crevé. Soit \bar{X}^0 cette valeur critique définie comme la solution de l'équation $\tilde{Z}_m^H(X^0) = \bar{Z}$. On suppose dans ce qui suit que le stock initial de ressource fossile est supérieur à ce stock critique :

Hypothèse 4 : $X^0 > \bar{X}^0$.

3.2 Caractérisation des sentiers optimaux pour des dotations initiales en ressource carbonée fossile supérieures à la dotation critique

Sous l'hypothèse 4 on sait qu'en l'absence de puits de carbone, le sentier optimal d'exploitation des ressources serait un sentier à quatre phases, différent du sentier de Hotelling puisque devant comporter une phase durant laquelle l'utilisation de la ressource fossile est contrainte car le stock de pollution est à son niveau maximal \bar{Z} (cf. Chakravorty *et al.*, 2004, 2005). Ces quatre phases sont les suivantes.

Au cours d'une première phase $[0, t_1)$ seule la ressource fossile doit être utilisée et le plafond de pollution n'est pas encore atteint : $q_t = x_t = d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t} \zeta)$, λ_0 et $|\mu_0|$ étant suffisamment faibles pour que $x_t > \bar{x}$. Puisque $x_t > \bar{x}$ et $Z_t < \bar{Z}$, alors les émissions ζx_t sont supérieures à la capacité d'auto-régénération naturelle αZ_t et donc le stock de pollution atmosphérique augmente. A l'issue de cette phase, en t_1 , le plafond de pollution est atteint et le coût marginal complet de la ressource non renouvelable, $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t} \zeta$, est égal à \bar{p} .

La seconde phase $[t_1, t_2)$ est une phase au plafond. Seule la ressource fossile approvisionne les usagers¹⁸ de sorte que $q_t = x_t = \bar{x}$. Le prix est donc constant au niveau \bar{p} .

¹⁷Lorsque $X^0 = 0$, l'équation d'évolution du stock de polluant devient $\dot{Z}_t = -\alpha Z_t$, $Z_0 = Z^0$, dont la solution est $Z_t = Z^0 e^{-\rho t}$, d'où la première limite. Lorsque $X^0 \uparrow \infty$, $\lambda_0 \downarrow 0$ et $x_t \uparrow \tilde{x}$. La seconde limite est conséquence immédiate des remarques de la note précédente.

¹⁸Ce résultat est une conséquence de l'hypothèse 3. Si, au contraire, $\bar{p} > c_y$, il existe plusieurs phases d'exploitation simultanée des deux ressources (cf. Chakravorty *et al.*, 2004 et 2005).

Puisqu'on doit avoir $\bar{p} = c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - \mu_t \zeta$, il s'ensuit que $|\mu_t|$ doit décroître au cours de cette phase. En t_2 , $\mu_t = 0$ et le plafond ne sera plus jamais atteint par la suite de sorte que μ_t est définitivement nul.

La troisième phase $[t_2, t_3)$ est une phase au cours de laquelle le sentier est un sentier d'Hotelling standard, $p_t = c_x + \lambda_0 e^{\rho t}$, et la seule ressource fossile est utilisée $q_t = x_t = d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t})$. Ce qui reste de la ressource fossile est alors épuisé. A l'issue de la phase le prix p_t doit être égal au coût marginal d'exploitation de la ressource renouvelable c_y .

Pendant la quatrième et dernière phase $[t_3, \infty)$ seule la ressource renouvelable est utilisée, $q_t = y_t = \tilde{y}$ et $p_t = c_y$, et ce, pour toujours.

Un sentier de ce type est représenté à la Figure 1 ci-dessous.

Figure 1 ici

Les valeurs optimales des cinq variables clés λ_0 , μ_0 , t_1 , t_2 et t_3 sont déterminées comme la solution du système des cinq équations suivantes :

- la consommation cumulée de ressource fossile doit être égale au stock de ressource initialement disponible :

$$\int_0^{t_1} d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t} \zeta) dt + [t_2 - t_1] \bar{x} + \int_{t_2}^{t_3} d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t}) dt = X^0$$

- à la date t_1 le coût marginal complet de la ressource fossile doit être égal à \bar{p} :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_1} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t_1} \zeta = \bar{p}$$

et à cette même date t_1 le stock de pollution atmosphérique doit être égal à \bar{Z} :

$$Z_{t_1}(\lambda_0, \mu_0) = \bar{Z}$$

où $Z_t(\lambda_0, \mu_0)$ est la solution de l'équation différentielle :

$$\dot{Z}_t = \zeta d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t} \zeta) - \alpha Z_t, Z_0 = Z^0$$

- à la date t_2 , μ_t doit être nul, i.e. le coût marginal de la ressource fossile augmenté de la rente minière doit être égal à \bar{p} :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_2} = \bar{p}$$

– à la date t_3 , le coût marginal complet de la ressource fossile doit être égal au coût marginal de la ressource renouvelable :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_3} = c_y.$$

On peut montrer facilement que pour les valeurs de λ_0 , μ_0 , t_1 , t_2 et t_3 qui satisfont ces équations, toutes les conditions de premier ordre sont satisfaites (cf. Chakravorty *et al.*, 2004).

4 Le cas d'un puits de carbone de grande capacité

Supposons qu'il n'y ait qu'un seul puits de carbone¹⁹ de "grande" capacité. On précisera en fin de section ce qu'il faut entendre par "grande" capacité. Pour l'instant comprenons que la capacité du puits est suffisamment importante pour qu'aucune rente ne puisse être imputée pour l'utilisation de cette capacité de stockage qui n'est jamais saturée. La société y séquestre le carbone autant que de besoin, à condition de supporter le coût de ladite séquestration qui s'élève à $c_s \zeta$ par unité de ressource fossile utilisée. L'actualisation implique alors que ce coût doit être supporté le plus tard possible si on doit minimiser la somme des coûts actualisés. On ne séquestrera donc le carbone qu'à partir de la date à laquelle le stock de pollution atteint le maximum permis \bar{Z} .

Remarquons maintenant que si $\eta_t = 0$ parce que le puits n'est pas saturé, et si la société traite une partie des rejets de sorte que $s_t > 0$ et $\gamma_{st} = 0$, alors la condition d'optimalité

¹⁹S'il n'y a qu'un seul puits, il n'y a plus lieu d'indicer ni s_t ni S_t . La fonction objectif du programme devient :

$$\int_0^{\infty} [u(x_t + y_t) - c_s s_t - c_x x_t - c_y y_t] e^{-\rho t} dt.$$

Les contraintes (4) à (9) deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{S}_t &= s_t, S_0 = S^0, \bar{S} - S_t \geq 0, \dot{Z}_t = \zeta x_t - s_t - \alpha Z_t \\ \zeta x_t - s_t &\geq 0 \text{ et } s_t \geq 0 \end{aligned}$$

Les conditions de premier ordre sont alors, pour celles qui changent :

$$\begin{aligned} (11) \quad c_s &= \eta_t - \mu_t - \bar{\gamma}_{st} + \gamma_{st} \\ (14) \quad \bar{\gamma}_{st} &\geq 0 \text{ et } \bar{\gamma}_{st}[\zeta x_t - s_t] = 0 \\ (15) \quad \gamma_{st} &\geq 0 \text{ et } \gamma_{st} s_t = 0 \\ (19) \quad \dot{\eta}_t &= \rho \eta_t + \nu_{St} \\ (21) \quad \nu_{St} &\geq 0 \text{ et } \nu_{St}[\bar{S} - S_t] = 0 \\ (24) \quad \lim_{t \uparrow \infty} e^{-\rho t} \eta_t S_t &= 0 \end{aligned}$$

et $\eta_t = \eta_0 e^{\rho t}$ tant que $\bar{S} - S_t > 0$.

(11) devient :

$$c_s = -\mu_t - \bar{\gamma}_{st} \Rightarrow -\mu_t = c_s + \bar{\gamma}_{st}.$$

Portons cette valeur de $-\mu_t$ dans la condition d'optimalité (12), en notant que $x_t > 0$, ce qu'il faut supposer si $s_t > 0$, et qu'alors $\gamma_{xt} = 0$. On obtient :

$$u'(x_t) = c_x + c_s\zeta + \lambda_0 e^{\rho t}. \quad (28)$$

Cette condition ne peut être satisfaite que si :

$$x_t = d \left(c_x + c_s\zeta + \lambda_0 e^{\rho t} \right). \quad (29)$$

Donc si au cours d'une phase pendant laquelle la société consomme la seule ressource fossile, la contrainte $\bar{Z} - Z_t \geq 0$ est effective et simultanément la société traite au moins une partie de ses rejets polluants, alors, pour que les conditions de premier ordre soient satisfaites, il faut que la production d'énergie fossile soit égale à $d(c_x + c_s\zeta + \lambda_0 e^{\rho t})$. Cela ne signifie pas que la totalité des rejets doit être traitée. La minimisation des coûts implique qu'il ne faut traiter que l'excédent qui conduirait à ne plus respecter la contrainte de plafond lorsque ce plafond est atteint, en d'autres termes :

$$s_t = \zeta \left[d \left(c_x + c_s\zeta + \lambda_0 e^{\rho t} \right) - \bar{x} \right]$$

Une conséquence de l'égalité précédente est que premièrement $\gamma_{st} = 0$ car $s_t > 0$, et donc $\gamma_{xt} = 0$ car $x_t > 0$, et deuxièmement $\bar{\gamma}_{st} = 0$ car $\zeta x_t - s_t > 0$ puisqu'on ne traite pas tous les rejets. On a alors $c_s = -\mu_t$ d'après (11). On retrouve bien ainsi la forme particulière (28) que prend la condition (12) pour ces valeurs de $-\mu_t$, $\bar{\gamma}_{st}$, γ_{st} et γ_{xt} , et $y_t = 0$.

Le coût marginal complet d'exploitation de la ressource fossile, sachant que $Z_t = \bar{Z}$, est la fonction en escalier suivante :

$$c_m = \begin{cases} c_x + \lambda_0 e^{\rho t} & , \text{ si } x_t < \bar{x} \\ c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + c_s\zeta & , \text{ si } x_t > \bar{x} \end{cases}$$

Cette fonction est illustrée à la Figure 2 ci-dessous :

Figure 2 ici

L'examen de cette figure montre pourquoi, lorsqu'on est au plafond, le recours à la séquestration permet de relâcher la contrainte et consommer plus que \bar{x} . Cette période de recours à la séquestration doit être suivie par une phase durant laquelle la consommation de la ressource fossile est plafonnée au niveau \bar{x} , la séquestration n'étant plus alors socialement rentable. En effet à une date t' postérieure à t , mais pas trop éloignée, la situation illustrée à la Figure 2 est devenue celle qui est illustrée à la Figure 3. Puisqu'au cours d'une telle phase $s_{t'} = 0 < x_{t'}$ alors $\bar{\gamma}_{st'} = 0$ et $\gamma_{xt'} = 0$. Compte tenu du fait qu'on a aussi $\eta_{t'} = 0$, la condition (11) prend alors la forme $-\mu_t = c_x - \gamma_{st}$. Portons ces valeurs dans la condition (12). On obtient :

$$\bar{p} \equiv u'(\bar{x}) = c_x + \lambda_0 e^{\rho t'} + (c_s - \gamma_{st'})\zeta$$

et donc :

$$\gamma_{st'} = (c_x + \lambda_0 e^{\rho t'} + c_s \zeta) / \zeta.$$

Figure 3 ici

A partir de la date à laquelle la courbe $u'(x)$ coupe la droite d'ordonnée $c_x + \lambda_0 e^{\rho t}$ pour une valeur de x inférieure à \bar{x} , le sentier de prix devient un sentier d'Hotelling standard.

En résumé le sentier optimal doit être ici un sentier à cinq phases, le sentier de prix étant illustré à la Figure 4.

La première phase $[0, t_1)$ est une phase pendant laquelle le plafond n'étant pas atteint, le prix est égal au coût marginal complet, $p_t = c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t}\zeta$, et seule la ressource fossile est utilisée, $q_t = x_t = d(p_t)$. A l'issue de cette phase le plafond de concentration est atteint et le prix est égal à $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + c_s \zeta$.

Au cours de la seconde phase $[t_1, t_2)$ l'économie fonctionne au plafond de concentration, seule la ressource fossile est utilisée et une partie des rejets est séquestrée : $p_t = c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + c_s \zeta$, $q_t = x_t = d(p_t)$ et $s_t = \zeta [d(p_t) - \bar{x}]$. A l'issue de cette phase le prix est égal à \bar{p} .

Au cours de la troisième phase $[t_2, t_3)$ l'économie fonctionne toujours au plafond, le prix est constant au niveau \bar{p} , seule la ressource fossile est exploitée, $q_t = x_t = \bar{x}$, et les rejets ne sont plus traités, la régénération naturelle étant égale aux rejets polluants à chaque instant. Au cours de cette phase $|\mu_t|$ décroît et s'annule à la fin de la phase.

La quatrième période $[t_3, t_4)$ est une phase de type Hotelling, $p_t = c_x + \lambda_0 e^{\rho t}$, seule la ressource fossile est utilisée, $q_t = x_t = d(p_t)$ et puisque $x_t < \bar{x}$ le stock de pollution commence à décroître. A la fin de la phase le prix est égal au coût marginal de la ressource renouvelable c_y et la ressource fossile est épuisée.

Au cours de la cinquième et dernière phase $[t_4, \infty)$ seule la ressource renouvelable est exploitée, $q_t = y_t = \tilde{y}$ et $p_t = c_y$.

Figure 4 ici

Les valeurs des six variables $\lambda_0, \mu_0, t_1, t_2, t_3$ et t_4 qui caractérisent le sentier optimal sont solution du système des six équations suivantes :

- l'équation d'équilibre entre la consommation cumulée d'énergie fossile et l'offre de ladite ressource, qui prend ici la forme :

$$\int_0^{t_1} d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t} \zeta) dt + \int_{t_1}^{t_2} d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + c_s \zeta) dt + [t_3 - t_2] \bar{x} + \int_{t_3}^{t_4} d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t}) dt = X^0$$

- l'équation de continuité du sentier de prix en t_1 :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_1} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t_1} \zeta = c_x + \lambda_0 e^{\rho t_1} + c_s \zeta$$

et à cette même date t_1 , l'équation d'égalité du stock de polluant à son niveau plafond :

$$Z_{t_1}(\lambda_0, \mu_0) = \bar{Z}$$

- les équation de continuité du sentier de prix en t_2, t_3 et t_4 :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_2} + c_s \zeta = \bar{p}$$

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_3} = \bar{p}$$

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_4} = c_y.$$

On est maintenant en mesure de définir ce qu'il faut comprendre par capacité suffisante du puits de carbone, pour qu'aucune rente n'ait à être imputée par unité de polluant

séquestré. Considérons un sentier de prix et d'exploitation de la ressource fossile qui vérifierait l'ensemble des conditions précédentes. Alors le volume de carbone séquestré, que l'on note C^s , s'élève à :

$$C^s = \zeta \int_{t_1}^{t_2} \left[d \left(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + c_s \zeta \right) - \bar{x} \right] dt.$$

La capacité du puits est suffisamment importante si $C^s < \bar{S}$. La société peut séquestrer dans le puits tout le carbone qu'elle ne veut pas rejeter dans l'atmosphère.

Il convient à présent de déterminer les sentiers optimaux lorsque la société dispose d'un puits de carbone qui ne permet pas de séquestrer tous les rejets qu'elle voudrait traiter.

5 Le cas d'un puits de carbone de petite capacité

Lorsque la capacité du puits de carbone est limitée, l'utilisation du puits à des fins de séquestration présente un coût d'opportunité en sus du coût monétaire c_s qu'implique la seule mise en oeuvre du traitement des rejets. On a fait remarquer à la fin de la section 2 que le taux de croissance instantané de ce coût d'utilisation du puits, du "shadow cost" de S_t , devait croître au taux de l'actualisation tant qu'il n'est pas saturé : $S_t < \bar{S} \Rightarrow \eta_t = \eta_0 e^{\rho t}$. Portons cette valeur de η_t dans la condition (11) sachant que si $s_t > 0$ alors $\gamma_{st} = 0$. On obtient :

$$c_s = \eta_0 e^{\rho t} - \mu_t - \bar{\gamma}_{st} \Rightarrow -\mu_t = c_s - \eta_0 e^{\rho t} + \bar{\gamma}_{st}.$$

Dans (12) substituons à $-\mu_t$ l'expression précédente sachant que si $x_t > 0$ alors $\gamma_{xt} = 0$, de sorte qu'après simplification et factorisation on doit avoir²⁰ :

$$u'(x_t) = c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_s - \eta_0 e^{\rho t}) \zeta.$$

Le coût marginal complet d'utilisation de la ressource fossile lorsque le plafond de pollution atmosphérique est atteint, $Z_t = \bar{Z}$, et la capacité de séquestration du carbone dans le puits n'est pas encore saturée, a maintenant pour expression :

$$c_m = \begin{cases} c_x + \lambda_0 e^{\rho t} & , \text{ si } x_t < \bar{x} \\ c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_s - \eta_0 e^{\rho t}) \zeta & , \text{ si } x_t > \bar{x} \end{cases}$$

²⁰Se rappeler que $\eta_0 < 0$ de sorte que $c_s - \eta_0 e^{\rho t}$, le coût marginal complet de traitement des rejets, croît au cours du temps.

Le schéma illustrant la détermination de la consommation optimale de la ressource fossile au cours de la phase pendant laquelle il est optimal de séquestrer une partie du carbone, est similaire au schéma de la Figure 2 après substitution de $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_s - \eta_0 e^{\rho t}) \zeta$ à $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + c_s \zeta$. Comme dans le cas précédent, ne doit être traitée que cette partie des émissions qui excède la capacité d'auto-régénération du système atmosphérique lorsque le plafond est atteint, d'où :

$$s_t = \zeta \left[d \left(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_s - \eta_0 e^{\rho t}) \zeta \right) - \bar{x} \right]$$

La même cause, à savoir la croissance du coût marginal au cours du temps, ici $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_s - \eta_0 e^{\rho t}) \zeta$, produisant le même effet, cette phase avec traitement d'une partie des rejets doit être suivie d'une phase au cours de laquelle l'utilisation de la ressource fossile est contrainte par la capacité d'auto-régénération naturelle lorsque $Z_t = \bar{Z}$, c'est-à-dire une phase au cours de laquelle $q_t = x_t = \bar{x}$ et $p_t = \bar{p}$.

Le sentier optimal d'utilisation des ressources est donc maintenant un sentier à cinq phases, comme dans le cas d'un puits de carbone de grande capacité. Cependant la dynamique d'exploitation de la ressource fossile diffère largement de la dynamique déterminée à la section précédente jusqu'à la date à laquelle il faut arrêter la séquestration. Le sentier de prix optimal est illustré à la Figure 5 ci-dessous.

Figure 5 ici.

Les cinq phases des trajectoires optimales sont les suivantes.

La première phase $[0, t_1)$ est comme dans les autres cas une phase de montée au plafond pendant laquelle on n'utilise que la ressource fossile. La différence avec le cas précédent est qu'ici, à l'issue de la phase, le coût marginal complet de la ressource fossile, son prix, doit être égal au coût marginal complet du début de la seconde phase qui est maintenant égal à $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_s - \eta_0 e^{\rho t}) \zeta$ et non plus $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + c_s \zeta$.

La seconde phase $[t_1, t_2)$ est une phase de cheminement au plafond avec séquestration, analogue à celle du cas précédent, mais ici le coût marginal de séquestration d'une unité de carbone est égal à $c_s - \eta_0 e^{\rho t}$ et non plus c_s .

Les autres phases sont formellement identiques à celles du cas d'un puits de grande capacité puisque ce sont des phases au cours desquelles on ne séquestre plus.

Le sentier optimal est caractérisé par les valeurs prises par les sept variables λ_0 , μ_0 , η_0 , t_1 , t_2 , t_3 et t_4 . Pour les déterminer on dispose des sept équations suivantes :

- l'équation d'équilibre entre la demande cumulée d'énergie fossile et la quantité initialement disponible de la dite ressource :

$$\int_0^{t_1} d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t} \zeta) dt + \int_{t_1}^{t_2} d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_s - \eta_0 e^{\rho t}) \zeta) dt + [t_3 - t_2] \bar{x} + \int_{t_3}^{t_4} d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t}) dt = X^0$$

- l'équation de continuité du sentier de prix en t_1 :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_1} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t_1} \zeta = c_x + \lambda_0 e^{\rho t_1} + (c_s - \eta_0 e^{\rho t_1}) \zeta$$

et à cette date, l'équation d'égalité du stock de polluant à sa valeur plafond :

$$Z_{t_1}(\lambda_0, \mu_0) = \bar{Z}$$

- l'équation de continuité du sentier de prix en t_2 :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_2} + (c_s - \eta_0 e^{\rho t_2}) \zeta = \bar{p}$$

et à cette date l'équation de saturation de la capacité du puits de carbone :

$$\zeta \int_{t_1}^{t_2} [d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_s - \eta_0 e^{\rho t}) \zeta) - \bar{x}] dt = \bar{S}$$

- les équation de continuité du sentier de prix en t_3 et t_4 , identiques à celles du cas d'un puits de grande capacité :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_3} = \bar{p} \quad \text{et} \quad c_x + \lambda_0 e^{\rho t_4} = c_y.$$

On montre en Annexe que si λ_0 , μ_0 , η_0 , t_1 , t_2 , t_3 et t_4 satisfont ces équations, alors toutes les conditions de premier ordre sont vérifiées.

6 Le cas de plusieurs puits de carbone

On examine d'abord à quelles conditions la société, disposant de deux puits de coûts d'enfouissement différents, ne devrait n'utiliser que l'un d'entre eux ou au contraire les deux. On montre ensuite comment le test d'opportunité de l'utilisation du puits le plus coûteux permet de construire un algorithme déterminant les puits à utiliser dans le cas où la société peut disposer d'un nombre quelconque de puits. On montre enfin comment le modèle proposé peut s'interpréter comme un modèle dans lequel le coût d'enfouissement dans chaque puits est une fonction croissante du volume de carbone déjà séquestré dans le puits en question.

6.1 Position du problème

Considérons le cas où la société dispose de deux puits. Supposons d'abord que le puits de coût de séquestration le plus faible, que nous convenons d'appeler puits 1, soit un puits de grande capacité. Tout se passe alors comme s'il n'y avait qu'un seul puits, de coût de traitement des rejets $c_s = c_{s1}$. L'analyse est la même que l'analyse conduite à la section 4. Le puits 2 ne sert à rien.

Supposons maintenant que la capacité du puits 1 soit petite. On doit comprendre par là que si la société ne pouvait utiliser que le puits 1, une certaine rente $-\eta_{1t} = -\eta_{10}e^{\rho t}$ devrait être imputée pour l'utilisation de ce puits 1. D'après l'analyse menée à la section 5 les deux premières phases des sentiers qu'il serait alors optimal de suivre seraient de la forme $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t} \zeta$ sur un intervalle de temps $[0, t_1)$ et $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t} \zeta + (c_{s1} - \eta_{10} e^{\rho t}) \zeta$ sur un intervalle de temps $[t_1, t_2)$, avec les conditions de continuité des sentiers de prix suivantes :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_1} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t_1} \zeta = c_x + \lambda_0 e^{\rho t_1} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t_1} \zeta + (c_{s1} - \eta_{10} e^{\rho t_1}) \zeta$$

et

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_2} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t_2} \zeta + (c_{s1} - \eta_{10} e^{\rho t_2}) \zeta = \bar{p}.$$

On suivrait donc un sentier de coût marginal continu et croissant, depuis $c_x + \lambda_0$ en $t = 0$ jusqu'à \bar{p} en t_2 , et alors de deux choses l'une :

- ou bien $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + c_{s2} \zeta > c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_{s1} - \eta_{10} e^{\rho t}) \zeta$ sur la totalité de l'intervalle de temps $[t_1, t_2)$ et dans ce cas, bien que la capacité du puits 1 soit limitée, il n'y

- a pas lieu d'utiliser le puits 2. Le coût marginal complet de livraison d'une unité de ressource fossile propre, obtenue par séquestration dans le puits 1 est toujours inférieur au coût marginal de livraison de cette même unité propre par séquestration dans le puits 2, quand bien même ce dernier ne serait pas totalement utilisé, i.e. quand bien même la rente $|\eta_{2t}|$ qu'il faudrait imputer au puits 2 serait nulle ;
- ou bien il existe une date \bar{t} antérieure à t_2 , telle que :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_1} + c_{s2} \zeta < c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_{s1} - \eta_{10} e^{\rho t}) \zeta, \quad t < \bar{t}$$

et dans ce cas il faut aussi utiliser le puits 2 bien que le coût monétaire de séquestration dans ce puits 2, c_{s2} , soit supérieur au coût de séquestration dans le puits 1, c_{s1} .

Dans cette dernière éventualité deux cas peuvent alors se présenter :

- ou bien le puits 2 est de "grande" capacité, au sens précisé plus loin ;
- ou bien le puits 2 est de "petite" capacité.

Examinons ces deux cas successivement.

6.2 Le cas d'un second puits de "grande" capacité

Par second puits de grande capacité il faut comprendre que même si aucune rente ne doit être imputée au puits 2, sa capacité permet de séquestrer tout le carbone que la société veut y enfouir, en sus du carbone séquestré dans le puits 1. Il doit être clair que si la quantité de carbone séquestré dans le puits 1 est égale à la capacité du puits, l'intervalle de temps au cours duquel cette séquestration doit intervenir est endogène, de même que l'intervalle de temps au cours duquel le carbone est séquestré dans le puits 2, mais aussi pour ce dernier la quantité de carbone qu'on doit y enfouir.

Pour caractériser le sentier optimal dans ce cas, remarquons qu'à l'optimum on ne doit jamais utiliser les deux puits simultanément. Si en effet on devait avoir $s_{it} > 0$, $i = 1, 2$, sur un intervalle de temps (t', t'') , $t' < t''$, on aurait $\gamma_{it} = 0$, et $\nu_{it} = 0$,²¹ $i = 1, 2$, sur l'intervalle et donc d'après (11) :

$$-\mu_t = c_{si} - \eta_{i0} e^{\rho t} + \bar{\gamma}_{st}, \quad t \in (t', t''), \quad i = 1, 2.$$

²¹Si $s_{it} > 0$ sur l'intervalle (t', t'') alors $S_{it} < \bar{S}_i$, d'où $\nu_{it} = 0$ et la forme particulière $\eta_{it} = \eta_{i0} e^{\rho t}$ que prend la variable adjointe η_{it} .

Portons ces valeurs dans (12). Après simplification on obtient :

$$u'(x_t + y_t) = c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_{si} - \eta_{i0} e^{\rho t}) \zeta, \quad t \in (t', t''), \quad i = 1, 2$$

d'où :

$$c_{s1} - \eta_{10} e^{\rho t} = c_{s2} - \eta_{20} e^{\rho t}, \quad t \in (t', t'')$$

ce qui est clairement impossible si $c_{s1} < c_{s2}$ quel que soit $-\eta_{i0} \geq 0, i = 1, 2$.

Le seul cas dans lequel on peut avoir une phase au cours de laquelle le coût marginal complet d'obtention d'une unité de ressource fossile propre par utilisation du puits 1 est inférieur à ce même coût marginal par utilisation du puits 2, et une autre phase au cours de laquelle l'inégalité serait renversée, est celui dans lequel $-\eta_{20} < -\eta_{10}$. La phase pendant laquelle procéder par enfouissement dans le puits 1 est moins coûteux que procéder par enfouissement dans le puits 2 précède toujours alors la phase où c'est l'inverse, et ceci que le puits 2 soit de grande ou de petite capacité.

La prise en compte de cette remarque implique que le sentier optimal est un sentier à six phases :

- Phase 1, $[0, t_1)$, montée au plafond sans séquestration ;
- Phase 2, $[t_1, t_2)$, au plafond avec séquestration dans le puits 1 ;
- Phase 3, $[t_2, t_3)$, au plafond avec séquestration dans le puits 2 ;
- Phase 4, $[t_3, t_4)$, au plafond sans séquestration ;
- Phase 5, $[t_4, t_5)$, sentier d'Hotelling standard au-dessous du plafond ;
- Phase 6, $[t_5, \infty)$, exploitation de la ressource renouvelable.

Les valeurs des huit variables $\lambda_0, \mu_0, \eta_{10}, t_1, t_2, t_3, t_4$ et t_5 caractérisant le sentier sont solution du système des huit équations suivantes :

- l'équation d'égalité de la consommation cumulée de ressource fossile à l'offre disponible, dans le cas présent :

$$\int_0^{t_1} d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t} \zeta) dt + \int_{t_1}^{t_2} d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_{s1} - \eta_{10} e^{\rho t}) \zeta) dt \\ + \int_{t_2}^{t_3} d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + c_{s2} \zeta) dt + [t_4 - t_3] \bar{x} + \int_{t_4}^{t_5} d(c_x + \lambda_0 e^{\rho t}) dt = X^0,$$

– l'équation de continuité du sentier de prix en t_1 :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_1} - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t_1} \zeta = c_x + \lambda_0 e^{\rho t_1} + (c_{s1} - \eta_{10} e^{\rho t_1}) \zeta,$$

et à cette date l'équation d'égalité du stock de polluant à son niveau plafond :

$$Z_{t_1}(\lambda_0, \mu_0) = \bar{Z},$$

– l'équation de continuité du sentier de prix en t_2 :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_2} + (c_{s1} - \eta_{10} e^{\rho t_2}) \zeta = c_x + \lambda_0 e^{\rho t_2} + c_{s2} \zeta$$

et à cette date la condition de saturation du puits 1 :

$$\zeta \int_{t_1}^{t_2} \left[d \left(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} (c_{s1} - \eta_{10} e^{\rho t}) \zeta \right) - \bar{x} \right] dt = \bar{S}_1,$$

– les équations de continuité du sentier de prix en t_3 , t_4 et t_5 :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_3} + c_{s2} \zeta = \bar{p},$$

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_4} = \bar{p},$$

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t_5} = c_y.$$

Comme on l'a souligné au début de la sous-section, le fait que le second puits soit de "grande" ou "petite" capacité est endogène. La capacité du puits 2 est considérée comme "grande" si pour la solution $\lambda_0, \mu_0, \eta_{10}, t_1, t_2, t_3, t_4$ et t_5 du système d'équations précédent le volume de carbone à séquestrer dans le puits 2 n'excède pas la capacité du puits en question, en d'autres termes si :

$$\zeta \int_{t_1}^{t_2} \left[d \left(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + c_{s2} \zeta \right) - \bar{x} \right] dt \leq \bar{S}_2.$$

Si cette inégalité n'est pas satisfaite le puits 2 doit être considéré comme étant petit.

6.3 Le cas d'un second puits de "petite" capacité

Si le second puits est un puits de petite capacité au sens que l'on vient de définir, il faut imputer une rente au dit puits. La seule différence avec le cas précédent est maintenant que, au cours de la phase de séquestration dans le second puits, le coût marginal complet d'une unité de ressource fossile propre, son prix, a pour expression $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_{s2} - \eta_{20} e^{\rho t}) \zeta$.

Le sentier optimal est défini par les valeurs de neuf variables $\lambda_0, \mu_0, \eta_{10}, \eta_{20}, t_1, t_2, t_3, t_4$ et t_5 , solution du système des équations suivantes. Huit de ces équations sont les équations précédentes modifiées pour tenir compte de la trajectoire du prix sur l'intervalle $[t_2, t_3]$ qui inclus maintenant une rente pour utilisation du puits 2. A ces huit équations il convient d'adjoindre une équation de saturation du puits 2 à l'issue la troisième phase $[t_2, t_3]$:

$$\zeta \int_{t_2}^{t_3} \left[d \left(c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_{s2} - \eta_{20} e^{\rho t}) \zeta \right) - \bar{x} \right] dt = \bar{S}_2.$$

Un sentier de prix optimal de ce type est illustré à la Figure 6 ci-dessous.

Figure 6 ici

6.4 Généralisation au cas de n puits

L'étude du cas de deux puits se généralise aisément au cas d'un nombre quelconque de puits. Indiquons ces puits par ordre croissant de leur coût d'utilisation : $c_{s1} < \dots < c_{si} < \dots < c_{sn}$. Supposons qu'on sache que les m premiers puits, $m < n$, sont petits en ce sens qu'en restreignant les possibilités d'enfouissement aux capacités des dits m puits la rente qui doit être imputée au $m^{\text{ième}}$ puits, et donc aussi aux $m - 1$ puits qui le précèdent, est positive, $-\eta_{m0} > 0$. Ce puits de rang m doit être utilisé sur un intervalle de temps $[t_m, t_{m+1})$ et on doit avoir à l'issue de sa phase de remplissage $c_x + \lambda_0 e^{\rho t_{m+1}} + (c_{sm} - \eta_{m0} e^{\rho t_{m+1}}) \zeta = \bar{p}$. Alors de deux choses l'une :

- ou bien $c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + c_{sm+1} \zeta \geq c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_{sm} - \eta_{m0} e^{\rho t}) \zeta$ sur la totalité de l'intervalle $[t_m, t_{m+1})$ et dans ce cas le $m + 1^{\text{ième}}$ puits n'a pas à être exploité ;
- ou bien il existe une date \bar{t} antérieure à t_{m+1} telle que :

$$c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + c_{sm+1} \zeta < c_x + \lambda_0 e^{\rho t} + (c_{sm} - \eta_{m0} e^{\rho t}) \zeta, \quad t > \bar{t}$$

et dans ce cas il faut aussi exploiter le $m + 1^{\text{ième}}$ puits.

Dans ce dernier cas :

- ou bien le puits $m + 1$ est de "grande" capacité,
- ou bien le puits $m + 1$ est de "petite" capacité,

les qualificatifs "grand" et "petit" étant endogènes, comme dans le cas du puits 2 à la sous-section précédente.

Si le puits $m + 1$ est grand, il ne faut pas utiliser les puits $m + 2, \dots, n$. Si le puits $m + 1$ est petit, il convient de recommencer le test. Puisque le nombre de puits est fini, l'algorithme que nous venons de définir converge en un nombre fini d'étapes.

6.5 Le modèle comme modèle à coût de séquestration croissant avec la séquestration cumulée

On a supposé jusqu'ici que le coût moyen de séquestration dans chaque puits i , c_{si} , était constant et donc égal au coût marginal. Dans la mesure où la pression dans un puits est d'autant plus élevée que le volume de carbone déjà séquestré est important, et que cette pression plus élevée oblige à engager des dépenses plus conséquentes pour y enfouir une unité additionnelle de carbone, il faut poser que le coût marginal de séquestration est une fonction croissante du volume de carbone déjà séquestré. En d'autres termes, on devrait poser que pour chaque puits i , $c_{si} = c_{si}(S_i)$ et $dc_{si}/dS_i > 0$, où S_i est le volume de carbone déjà séquestré dans le puits i .

Le modèle étudié jusqu'à présent peut être vu comme un modèle dans lequel les fonctions $c_{si}(\cdot)$ sont approximées par des fonctions en escalier, l'approximation étant d'autant plus proche de la fonction réelle que le nombre de paliers retenus est important. Soit m_i le nombre de paliers choisis pour approximer la fonction $c_{si}(\cdot)$ et $1_i, \dots, h_i, \dots, m_i$ les indices de ces différents paliers, par ordre croissant du coût moyen de séquestration à chaque palier, $c_{si}^{1_i} < \dots < c_{si}^{h_i} < \dots < c_{si}^{m_i}$, $c_{si}^{h_i}$ étant le coût moyen (marginal) de séquestration au palier h_i . Notons $\Delta \bar{S}_i^{h_i}$ la capacité d'absorption au palier h_i de sorte que $\sum_{h_i=1}^{m_i} \Delta \bar{S}_i^{h_i} = \bar{S}_i$.

S'il n'existe qu'un puits de séquestration, le puits i , l'identification au modèle précédent est immédiate. La règle d'exploitation optimale de puits de coûts moyens de séquestration différents prescrit qu'il faudrait les exploiter par ordre croissant de leur coût. Appliquons cette règle au cas du seul puits i en question, décomposé en m_i sous-puits différents. La règle en question conduit à utiliser d'abord le premier sous-puits de coût $c_{si}^{1_i}$ de capacité $\Delta S_{si}^{1_i}$, ensuite s'il y a lieu, le second sous-puits de coût $c_{si}^{2_i}$ de capacité $\Delta S_{si}^{2_i}$, etc... En d'autres termes, il faut utiliser les sous-puits dans l'ordre qui est l'ordre naturel de remplissage du puits i .

Considérons maintenant le cas de m puits différents, la fonction de coût de chacun d'eux étant approximée par une fonction en escalier. Construisons une suite de puits théoriques

$j = 1, \dots, m$ par reclassement de l'ensemble des paliers des différents puits indicés par ordre croissant de leurs coûts et regroupement des capacités des paliers de coûts identiques. Notons c_s^j le coût moyen du puits théorique de rang j et \bar{S}^j sa capacité de séquestration : $c_s^1 < \dots < c_s^j < \dots < c_s^m$. Ces puits théoriques sont construits par récurrence comme suit. Pour $j = 1$:

$$c_s^1 = \min \{ c_s^{1i}, i = 1, \dots, m \}.$$

Soit $I(1)$ l'ensemble des indices des puits pour lesquels $c_s^{1i} = c_s^1$. Alors :

$$\bar{S}^1 = \sum_{i \in I(1)} \Delta \bar{S}_i^{1i}.$$

Sortons les paliers de coûts c_s^1 et recommençons l'opération. Puisque le cardinal de l'ensemble des paliers est fini, la procédure ainsi définie comprend un nombre fini d'étapes.

Le nombre de puits théoriques, m , est au plus égal à $\sum_{i=1} m_i$. Il serait précisément égal à cette somme si les coûts aux paliers des puits effectifs étaient tous différents.

L'ordre dans lequel on doit, à l'optimum, utiliser les puits théoriques est l'ordre de leurs coûts. En procédant ainsi, l'ordre d'utilisation des différents paliers d'un même puits est l'ordre naturel de remplissage du puits en question. Par ailleurs tous les paliers effectifs constituant un même puits théorique de rang j peuvent être utilisés simultanément. A l'optimum le carbone peut donc être séquestré dans plusieurs puits en même temps.

7 Conclusion

Nous avons analysé la logique économique d'une politique de captation à la source des gaz à effet de serre et de séquestration des flux ainsi captés, dans un dispositif plus général de maintien en-deçà d'un certain seuil de la concentration atmosphérique des gaz en question. Nous avons démontré que cette politique ne doit être mise en oeuvre qu'une fois atteint le seuil de concentration qu'on s'interdit de dépasser, et ce indépendamment du coût monétaire à supporter et de la capacité de stockage des puits, c'est-à-dire indépendamment du nombre de puits, du coûts d'accès à chacun d'eux et de leurs capacités de rétention.

Par ailleurs, il ressort de notre analyse que le schéma optimal d'exploitation des ressources et de recours à la séquestration, obtenu avec des coûts moyens constants, est robuste à d'autres spécifications des fonctions de coût, qui dépendraient du flux et du cumul de carbone séquestré pour ce qui concerne le coût de séquestration et/ou du flux et du cumul de l'extraction pour ce qui concerne le coût de la ressource non renouvelable (cf. Heal, 1976), comme le montrent les développements de la section 6.

L'absence de séquestration avant le plafond ne signifie pas pour autant l'absence de politique environnementale à court terme. Au contraire, avant même d'être activée, cette option séquestration agit dès l'instant initial sur le rythme d'extraction de la ressource non renouvelable qui, à l'optimum, devra être moins soutenu jusqu'à atteinte du plafond. Cette réduction de la consommation est imputable d'une part au coût d'opportunité de l'émission de pollution avant le plafond, et d'autre part, au coût d'opportunité lié à la séquestration d'une unité de pollution une fois le plafond atteint, coûts qui s'ajoutent au coût total de mise à disposition de la ressource.

Enfin, notons que, dans la définition retenue du processus de stockage, nous avons ignoré l'éventualité pour les puits de relâcher une partie du carbone séquestré (cf. Herzog *et al.*, 2003 et Pacala, 2003). Ce phénomène de fuite, fut-il même continu dans le temps, n'aurait aucune incidence sur la solution optimale à court terme. Dans ce cas, seule la durée de la phase de séquestration serait étendue à la durée totale de la phase au plafond puisqu'une fois la capacité de stockage atteinte, la séquestration permettrait de compenser les fuites à chaque instant.

Annexes

Notons $p_t^H = c_x + \lambda_0 e^{\rho t}$ le sentier de prix de Hotelling, $\hat{p}_t = p_t^H - \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t} \zeta$ le sentier de prix suivi avant l'arrivée au plafond et $\tilde{p}_t = p_t^H + (c_s - \eta_0 e^{\rho t}) \zeta$ le sentier suivi au plafond durant la phase de séquestration. Lorsqu'il n'existe qu'un seul puits de carbone et que ce puits est de petite taille, la solution du programme (P) est :

$$x_t = \begin{cases} d(\hat{p}_t) & , t \in [0, t_1) \\ d(\tilde{p}_t) & , t \in [t_1, t_2) \\ \bar{x} & , t \in [t_2, t_3) \\ d(p_t^H) & , t \in [t_3, t_4) \\ 0 & , t \in [t_4, \infty) \end{cases}, y_t = \begin{cases} 0 & , t \in [0, t_4) \\ \tilde{y} & , t \in [t_4, \infty) \end{cases}, s_t = \begin{cases} 0 & , t \notin [t_1, t_2) \\ \zeta [d(\tilde{p}_t) - \bar{x}] & , t \in [t_1, t_2) \end{cases} \quad (30)$$

Les variables duales associées au programme (P) sont :

$$\gamma_{st} = \begin{cases} c_s + \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t} - \eta_0 e^{\rho t} & , t \in [0, t_1) \\ 0 & , t \in [t_1, t_2) \\ c_s + (p_t^H - \bar{p})/\zeta & , t \in [t_2, t_3) \\ c_s & , t \in [t_3, \infty) \end{cases}, \bar{\gamma}_{st} = 0, t \geq 0 \quad (31)$$

$$\gamma_{xt} = \begin{cases} 0 & , t \in [0, t_4) \\ p_t^H - c_y & , t \in [t_4, \infty) \end{cases} \quad (32)$$

$$\gamma_{yt} = \begin{cases} c_y - \hat{p}_t & , t \in [0, t_1) \\ c_y - \tilde{p}_t & , t \in [t_1, t_2) \\ c_y - \bar{p} & , t \in [t_2, t_3) \\ c_y - p_t^H & , t \in [t_3, t_4) \\ 0 & , t \in [t_4, \infty) \end{cases} \quad (33)$$

$$\eta_t = \begin{cases} \eta_0 e^{\rho t} & , t \in [0, t_2) \\ 0 & , t \in [t_2, \infty) \end{cases}, \nu_{St} = 0, t \geq 0 \quad (34)$$

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t} & , t \in [0, t_1) \\ \eta_0 e^{\rho t} - c_s & , t \in [t_1, t_2) \\ (p_t^H - \bar{p})/\zeta & , t \in [t_2, t_3) \\ 0 & , t \in [t_3, \infty) \end{cases} \quad (35)$$

$$\nu_{Zt} = \begin{cases} 0 & , t \in [0, t_1) \\ (\alpha + \rho)c_s - \alpha\eta_0 e^{\rho t} & , t \in [t_1, t_2) \\ [\hat{p}_t^H - (\alpha + \rho)(p_t^H - \bar{p})] / \zeta & , t \in [t_2, t_3) \\ 0 & , t \in [t_3, \infty) \end{cases} \quad (36)$$

Pour la solution (30), il est relativement aisé de s'assurer que si $\lambda_0, \mu_0, \eta_0, t_1, t_2, t_3$

et t_4 satisfont les sept équations décrites à la section 5, alors les variables duales définies par (31)-(36) vérifient bien les conditions (11)-(22). Par ailleurs, puisque le stock X_t de ressource fossile est épuisé en t_4 , la condition de transversalité (23) est vérifiée. De même, puisque $\eta_t = 0$ et $S_t = \bar{S}$ pour tout $t \geq t_2$ d'une part, $\mu_t = 0$ et $Z_t = \bar{Z}e^{-\alpha(t-t_4)}$ pour tout $t \geq t_4$ d'autre part, alors les conditions (24) et (25) sont satisfaites.

Références

- [1] Chakravorty, U., Magné B., Moreaux M., 2004. Plafond de concentration atmosphérique en carbone et substitutions entre ressources énergétiques, à paraître dans *Annales d'Économie et de Statistique*.
- [2] Chakravorty, U., Magné B., Moreaux M., 2005. A Hotelling model with a ceiling on the stock of pollution, à paraître dans *Journal of Economic Dynamics and Control*.
- [3] Edmonds J., Clarke J., Dooley J., Kim S.H., Smith S.J., 2004. Stabilization of CO2 in a B2 world : insights on the roles of carbon capture and disposal, hydrogen, and transportation technologies, *Energy Economics*, **26(4)**, 517-537.
- [4] Gaudet, G., Moreaux, M., Salant, S., 2001. Intertemporal depletion of resource sites by spatially-distributed users, *American Economic Review*, **91(4)**, 1149-1159.
- [5] Gitz V., Ambrosi P., Magné B., Ciais P., 2005. Is There an Optimal Timing for Sequestration to Stabilize Future Climate ? American Geophysical Union, Geophysical Monograph, *The Science and Technology of Carbon Sequestration : Assessment and Verification of Natural and Deliberate Carbon Sinks*, American Geophysical Union Ed.
- [6] Heal G., 1976. The Relationship Between Price and Extraction Cost for a Resource with a Backstop Technology, *Bell Journal of Economics*, *The RAND Corporation*, **7(2)**, 371-378.
- [7] Herfindahl, O.L., 1967. Depletion and economic theory, in M. Gaffney, ed., *Extractive Resources and Taxation*, Madison : University of Wisconsin Press, 63-90.
- [8] Herzog, H., Caldeira K., Reilly, J.M. 2003. An issue of permanence : assessing the effectiveness of temporary carbon storage, *Climatic Change*, **59**, 293-310.
- [9] Hotelling, H., 1931. The economics of exhaustible resources, *Journal of Political Economy*, **39**, 137-175.
- [10] IPCC, 2001. *Climate Change 2001 : The Scientific Basis, Contribution of Working Group I to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.
- [11] IPCC, 2005. *Special Report on Carbon dioxide Capture and Storage, Contribution of Working Group III, Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

- [12] Kolstad, C.D., Kraukraemer J.A., 1993. *Natural resource use and the environment in Handbook of Natural Resource and Energy Economics*, Vol. III, Chap. 26, edited by A.V. Kneese and J.L. Sweeney, Elsevier Science Publishers.
- [13] Kurosawa, A., 2004. Carbon concentration target and technological choice, *Energy Economics*, **26(4)**, 675-684.
- [14] Lafforgue, G., Magné, B., Moreaux, M., 2005. The optimal sequestration policy with a ceiling on the stock of carbon in the atmosphere, *mimeo LERNA*, Toulouse University.
- [15] McFarland, J.R., Herzog, H.J., Reilly, J.M. 2003 : Economic modeling of the global adoption of carbon capture and sequestration technologies, In : J. Gale and Y. Kaya (eds.), *Greenhouse Gas Control Technologies : Proceedings of the Sixth International Conference on Greenhouse Gas Control Technologies, Kyoto, Japan*, Elsevier Science, Oxford, UK.
- [16] Pacala, S.W., 2003. Global Constraints on Reservoir Leakage, in *Sixth International Greenhouse Gas Control Technologies Conference*, edited by J. Gale, and Y. Kaya, pp. 477-482, Elsevier Science Unlimited, Kyoto (Japan).
- [17] Riahi, K., Rubin E.S., Taylor M.R., Schrattenholzer L., Hounshell, D., 2004. Technological learning for carbon capture and sequestration technologies, *Energy Economics*, **26(4)**, 539-564.

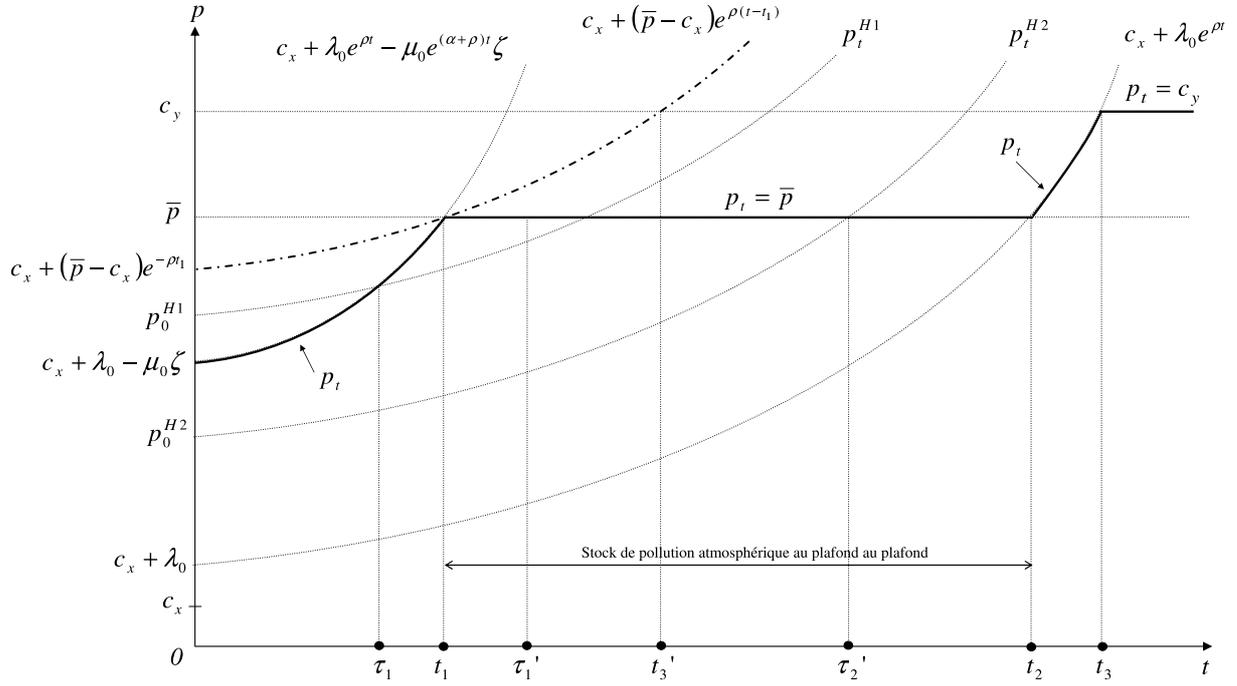


FIG. 1 – Sentier de prix optimal en l'absence de possibilité de captage du carbone

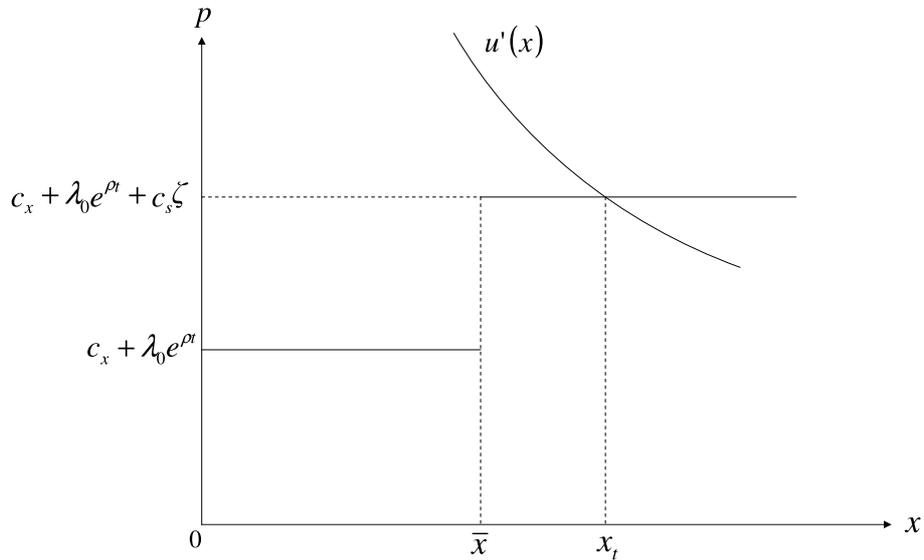


FIG. 2 – Coût marginal complet de la ressource fossile lorsque $Z_t = \bar{Z}$. Phase pendant laquelle la consommation est contrainte et il est optimal de traiter la partie $x_t - \bar{x}$ des rejets potentiels

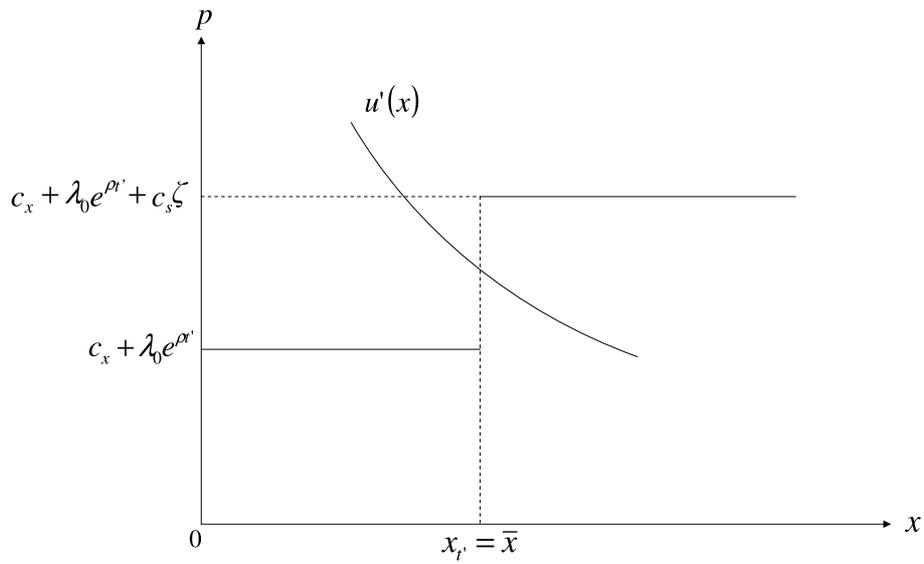


FIG. 3 – Coût marginal complet de la ressource fossile lorsque $Z_t = \bar{Z}$. Phase pendant laquelle il est optimal de ne pas traiter les rejets

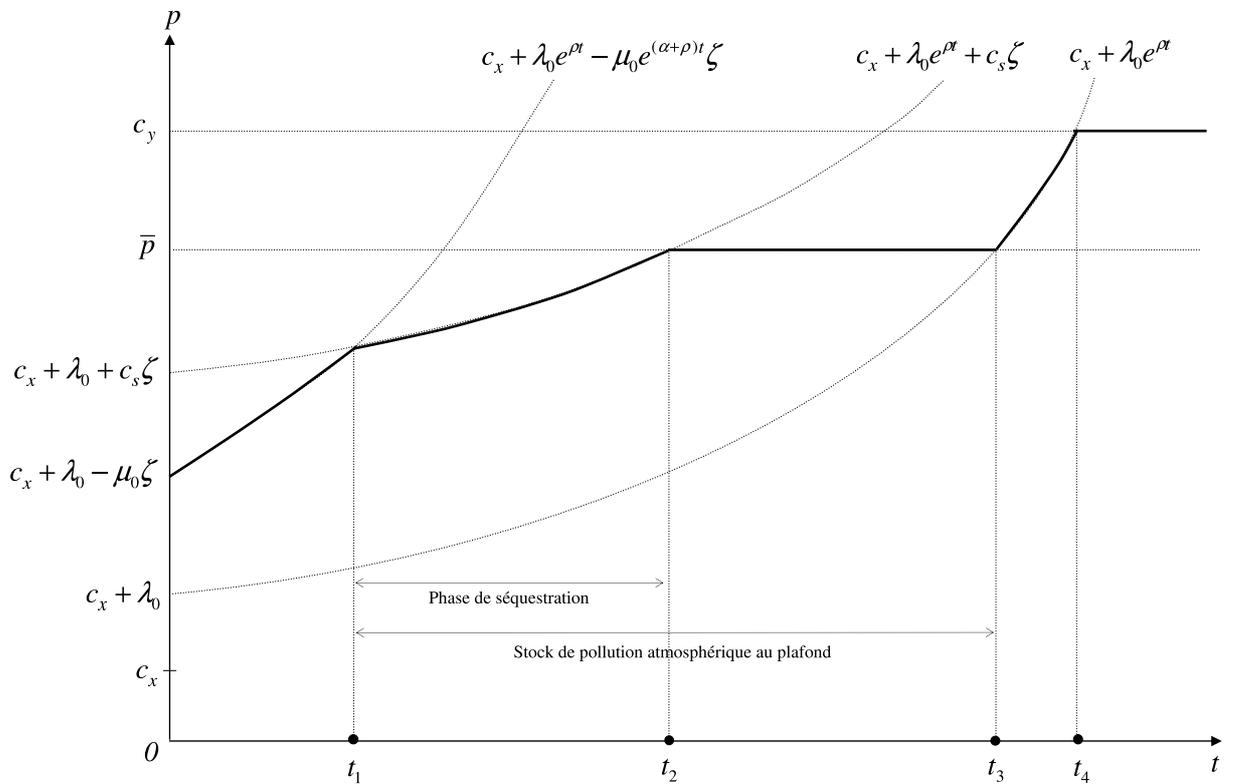


FIG. 4 – Sentier de prix optimal. Cas d'un puits de carbone de grande capacité

