# Une Analyse de la Loi Electorale du 29 Juin 1820*

Michel Le Breton† Dominique Lepelley‡ Laurent Vidu§

Février 2010

**Abstract**

Nous exploitons dans cet article la théorie des indices de pouvoir pour évaluer les influences respectives des deux classes d'électeurs dans le mode de scrutin instauré par la loi électorale du 29 juin 1920, dite loi du "double vote". Nous montrons, à l'aide d'un modèle simplifié, que le pouvoir de vote des "grands" électeurs, qui votent deux fois, est au moins trois à quatre fois supérieur à celui des "petits" électeurs, qui ne votent qu'une fois. Le modèle proposé constitue une extension de celui qu'Edelman (2004) a récemment utilisé pour étudier les situations dans lesquelles certains électeurs appartiennent à plus d'un collège électoral. L'impact des hypothèses simplificatrices qui fondent ce modèle est évalué à l'aide de simulations.

**Classification JEL :** D71, D72.

**Mots clés :** Elections, Vote, Pouvoir de vote.

---

*Les auteurs remercient A. Laruelle pour avoir attiré leur attention sur l'article d'Edelman (2004) ainsi que les participants à la conférence de l'ADRES pour leurs commentaires et leurs suggestions.

†GREMAQ et IDEI, Université de Toulouse 1, France.

‡CEMOI, Université de La Réunion, France

§CREM, Université de Caen, France

# 1 Introduction

## 1.1 Préambule

L'objet de cet article est de revisiter un épisode intéressant de l'histoire électorale française à la lumière des outils modernes de la mesure du pouvoir. La théorie des choix collectifs nous enseigne qu'il n'existe aucune méthode de vote qui puisse être considérée comme universellement supérieure aux autres, chaque méthode présentant des avantages et des inconvénients que les chercheurs de ce domaine ont d'ailleurs soigneusement répertoriées. Le choix définitif d'une méthode plutôt qu'une autre est en quelque sorte affaire de goût. La principale vertu du travail des théoriciens est d'avoir formulé le problème du choix entre les méthodes en concurrence comme un problème de choix entre les propriétés que l'on souhaiterait voir vérifier par la méthode ultimement retenue. Nous n'allons pas passer ici en revue l'ensemble de ces propriétés. Parmi celles qui reviennent systématiquement figure la propriété de traitement symétrique des agents participant à la procédure de choix collectif (les électeurs), encore appelée propriété d'anonymat, car en principe aucune caractéristique personnelle de l'agent n'est supposée jouer un quelconque rôle dans le fonctionnement de la procédure. De ce point de vue toute violation du suffrage universel en matière électorale constitue une violation de la propriété d'anonymat. Par exemple, des caractéristiques personnelles comme le sexe ou encore le montant d'impôts payés (dans le cas du suffrage censitaire) peuvent intervenir pour exclure certaines personnes du droit de vote. Dans ce type de situations, la violation de la symétrie est extrême : on est électeur à part entière ou pas du tout. Dans certains environnements électoraux, comme ceux décrivant des modes d'élections à plusieurs degrés (élections présidentielles aux USA,...) ou encore ceux correspondant au mode de décision de certaines assemblées et grandes organisations internationales (Conseil des ministres de la Commission Européenne, ONU,.), les asymétries éventuelles sont plus cachées et plus nuancées. Même si en apparence, les électeurs ou représentants sont tous dotés d'un pouvoir de vote, c'est à dire d'une capacité à influencer le résultat d'un vote, force est de reconnaitre que l'intensité de cette influence varie parfois fortement d'un acteur à l'autre. Il y a là, aussi, violation de la propriété de symétrie. Elle est moins tranchée que dans le cas d'une exclusion totale (un acteur dépourvu d'influence est appelé "dummy" en anglais) mais elle est bien présente et la question se pose d'évaluer quantitativement le pouvoir réel alloué aux uns et aux autres par la procédure. La théorie de la mesure du pouvoir dont les plus célèbres indices sont dus respectivement à Banzhaf (1965)(1966)(1968) et à Shapley-Shubik (1954) est précisement dédiée à cette question[1]. Cette théorie a été appliquée avec succès

[1]On trouvera des exposés de ces questions dans Felsenthal et Machover (1998) et Owen (2001).

à l'analyse de la répartition du pouvoir de vote dans des contextes différents comme par exemple le collège électoral Américain (quel est le pouvoir d'un électeur Californien comparé à celui d'un électeur de l'Ohio ? Owen (1975)) ou la communauté Européenne (dans le cadre du système retenu par le traité de Nice et les versions ultérieures, quel est le pouvoir du représentant de la Pologne comparé à celui du représentant du Portugal ? Felsenthal et Machover (2001), (2004)). Nous nous proposons dans cet article d'appliquer ces outils à l'étude d'une loi électorale utilisée au dix neuvième siècle en France durant une décennie.

La loi à laquelle cet article est consacré est la loi du 29 Juin 1820 portant sur le mode d'élection des députés de la "chambre des départements" et qui introduisit d'importants changements par rapport à la loi du 7 Février 1817. Sans procéder ici à une analyse complète du contexte historique de ce changement, nous allons cependant en rappeler les principaux éléments[2].

## 1.2 Génèse et Contexte Historique de la Loi du 29 Juin 1820

La loi électorale a connu plusieurs changements notoires durant la période de la restauration[3] qui commence avec la charte constitutionnelle du 4 juin 1814. Il est important de rappeler que la chartre constitutionnelle ne fixe pas le détail des élections. Comme le note Rémond (1965)[4]: "La Charte, faute de temps et par prudence politique, s'est abstenue de fixer les modalités pratiques des élections. Elle s'est bornée à quelques dispositions permanentes qui tiennent en quelques articles... Elle concourt, ce faisant, à consacrer en France la tradition qui refuse tout caractère constitutionnel aux régimes électoraux : si le principe électif participe de la nature quasi-sacrée du pacte fondamental, les modalités de son application relèvent des lois ordinaires. Elles sont donc à la merci des renversements de majorité : l'histoire des régimes électoraux présente de ce fait une instabilité dont la restauration donne le premier exemple...". Il poursuit[5] en notant que : "De même que sous la révolution, l'assemblée primaire était l'unité constitutive, le collège électoral est sous la restauration la cellule de base... Outre les conditions pour être électeur, la Charte fixe la répartition des sièges entre les départements, qui demeurera inchangée, et stipule que la chambre sera renouvelée par cinquième... Tout le reste est laissée à l'initiative législative : elle ne se privera pas d'en user". Par exemple, s'agissant des ordonnances de 1815 et 1816 et des élections de l'été

[2]Voir Campbell (1958) et Challeton (1891).

[3]Sur la période de la restauration on pourra consulter De Bertier de Sauvigny (1993) et De Waresquiel et Yvert (2002).

[4]p 308.

[5]p 309.

1815, il note[6] que : “L’élection a lieu à deux degrés les 14 et 21 août 1815. Le rôle des collèges d’arrondissement se borne à dresser une liste des candidats, selon une répartition des tâches qui rappellent le système de l’empire. Sur ces listes les collèges de département sont tenus de prendre la moitié au moins des députés : pour l’autre moitié, leur liberté de choix est entière”.

La période de restauration conserve le suffrage censitaire[7], usuel depuis la convocation des états généraux de 1789. La loi du 7 février 1817 (dite loi Lainé) introduit pour la première fois en France l’élection directe. Il n’y a dans chaque département qu’un seul collège électoral divisé en sections dans les départements où il y a plus de 600 électeurs. Chaque section concourt directement à nomination de tous les députés que le collège doit élire. Les électeurs votent par bulletins de liste contenant à chaque tour de scrutin autant de noms qu’il y a de nominations à faire. Il n’y a que trois tours de scrutin. Après les deux premiers tours, le bureau dresse une liste des personnes qui au deuxième tour ont obtenu le plus de suffrages. Cette liste contient deux fois autant de noms qu’il ya encore de députés à élire. L’élection se fait alors à la majorité relative. Comme le note Rémond[8] : “La loi Lainé supprime la hiérarchie des collèges par le canal desquels le choix des représentants s’était jusqu’à présent presque toujours opéré... elle adopte le collège unique dont font partie tous ceux qui satisfont aux conditions requises. Il n’y a donc plus qu’une seule catégorie d’électeurs, qui se réunissent au chef lieu de département”[9]. Les élections qui suivirent consacrèrent la montée des libéraux au détriment des ultraroyalistes. Ceux-ci s’employaient pas divers moyens à tout mettre en oeuvre pour modifier la loi à leur profit.

L’élection de l’abbé Grégoire en 1819 et l’assassinat du duc de Berry en février 1820 sont

[6]p 310. La célèbre chambre introuvable, selon une expression de Louis XVIII, est issue de ces élections.

[7]Il est utile de rappeler que le mode de calcul du cens révèle la conception familialiste du suffrage (Verjus (1996, 2000, 2002).

[8]p 313.

[9]Rosenvallon (1992, p 273) offre une analyse très poussée de la Loi Lainé dont le projet est rédigé par Guizot qui développe deux principes fondamentaux. Le premier écrit t-il, c’est que l’élection doit être directe, c’est-à-dire que tous les citoyens qui, dans un département, remplissent les conditions exigées par la charte pour être électeur, doivent concourir directement, et par eux-mêmes, à la nomination des députés du département. Le second, c’est que la nomination de chaque député doit être le résultat du concours de tous les électeurs du département, et non l’ouvrage de telle ou telle portion déterminée par ces mêmes électeurs. Rosenvallon propose une analyse très fouillée de la perception du vote à deux degrés par les libéraux et de la philosophie du vote direct. Il présente également une analyse très pertinente de la réthorique des ultras au service d’une coalition des extrêmes composée de l’aristocratie et du petit peuple qui dans la cas du suffrage indirect continue d’exercer une influence sur le choix des représentants. Nous renvoyons a son chapitre “L’Ordre Capacitaire”, qui contient un examen minutieux des débats et enjeux politiques qui ont accompagné le choix et les changements de régimes électoraux. La documentation sur laquelle il s’appuie comprend en autres choses de nombreux extraits de débats parlementaires ainsi que des articles d’époque, comme ceux publiés dans *Le Conservateur* ou le *Mercure de France*.

deux événements symboliques qui contribuèrent au succés de la campagne des ultras : dès février 1819, sous l'impulsion notamment de l'ancien directeur Barthélémy, une proposition fut introduite à la chambre des Pairs tendant à modifier le cens et réintroduire le suffrage indirect. Au nombre des arguments mis en avant pour dénoncer la loi de 1817, figurait l'importance du taux d'abstention, évalué globalement à un tiers. "Dans le département du Nord, disait M. Lainé le 20 mars 1819 à la chambre des députés, le plus riche et le plus peuplé de France, le nombre des électeurs inscrits ne s'est élevé qu'à 2103. Dans ce même département, il ya eu deux élections depuis la loi du 5 février. En 1817, sur 2303 électeurs, il ne s'en est rendu au collège que 439, et en 1818 que 994. Dans les Landes, sur 674 électeurs inscrits, le collège n'a reçu que 336 votants. Dans les Basses-Pyrénées où il ya 321 électeurs, 83 seulement ont paru"[10]. La proposition Barthélémy fut rejetée.

Pour bien comprendre la genèse de la loi électorale de 1820, il est utile de rappeler quelques repères chronologiques sans négliger, bien entendu, l'impact de l'assassinat du Duc de Berry et des défaites électorales sur la réaction royaliste à l'encontre de la loi Lainé. Le travail très fouillé de Berger (1903) est de ce point de vue fort utile. Il décrit comment les victoires de la gauche aux différentes élections de renouvellement partiel de la chambre ont conduit la droite à tout mettre en oeuvre pour stopper ce processus[11]. Comme nous venons de le signaler, l'opposition royaliste fit allusion aux forts taux d'abstention et à la fraude. Le ministre de la justice de Serres prépara un grand projet de réforme constitutionnelle où l'organisation de la chambre des députés tenait une grande place. Les deux collèges sont introduits dans ce projet. Suite à la démission de certains ministres, le ministère Decazes voit le jour. Decazes pensa substituer au projet de Serres un projet plus simple sur lequel un accord pût se faire. Il maintint le système des deux collèges mais proposa qu'au lieu de nommer séparément leurs députés, ceux-ci les choisissent parmi les candidats qu'ils se seraient mutuellement présentés. Au terme de pourparlers infructueux, le roi ordonna de rédiger un nouveau projet. Le 10 février 1820 celui-ci était rédigé et approuvé par le roi. Ce projet conservait les deux collèges. Les collèges d'arrondissement devaient nommer 258 députés. Les collèges supérieurs étaient composés de 600 membres au plus et de 100 membres au moins, élus par les collèges d'arrondissement parmi les électeurs payant 1000 F de contributions directes. Ils devaient élire 172 députés. On espérait qu'une entente allait pouvoir être obtenue sur cette base. Le projet devait être présenté à la chambre le 14 février mais le 13, le Duc de Berry est assassiné ! Qu'advient-il de la loi électorale ? Comment faire

[10] Cité par Weil (1895).

[11] Les arguments présentés ci-dessous sont empruntés à Berger mais on pourra aussi consulter Newman (1974) , Spitzer (1983) et Skuy (2003).

plaisir à une droite ultra qui considère l'orientation du cabinet pendant ces dernières années comme un encouragement aux pires idées revolutionnaires ? Moins d'un an plus tard, en février 1820, Decazes revenait à la charge en introduisant à son tour un projet. Comme le note Weil (1895) : "Dans l'exposé des motifs, M. Decazes signalait les vices de la législation existante : un scrutin de liste pouvant porter sur un nombre de députés pouvant aller jusqu'à 12 et le vote au chef-lieu". En effet, la loi prévoyait que les collèges électoraux devaient se réunir physiquement au chef-lieu du département. Decazes décrivait le déclin des motivations "des propriétaires enlevés à leur sol, contraints de faire porter leurs choix sur des noms qui sont nouveaux pour eux et ne peuvent pas exprimer un vote personnel, un suffrage réel. Ils arrivent à se désintéresser de l'élection. Une conséquence inévitable de cet état de choses est d'assurer au chef lieu toute l'influence électorale. Les trois cinquièmes des arrondissements n'ont pas élu de députés". Le projet Decazes dut être retiré mais le ministre de l'intérieur M. Simeon présenta dès avril un nouveau projet reprenant l'idée de deux classes de collèges électoraux. Le projet de loi fut débattu avec ardeur à la chambre des députés et aboutit à des émeutes dans Paris.

Dans le premier projet présenté à la chambre, les collèges de département devaient se composer des électeurs les plus imposés du département jusqu'à concurrence du cinquième de la totalité de ces électeurs. Les collèges d'arrrondissement ne nommaient pas de députés, mais ils choisissaient chacun un nombre de candidats égal au nombre des députés du département et c'est parmi ces candidats que les collèges supérieurs devaient élire les députés. Le projet souleva les protestations de la gauche. La discussion de la loi commenca le 15 mai et devait durer jusqu'au 10 juin. Dans la chambre, deux partis se trouvaient en présence : d'un côté les défenseurs de la loi du 5 février, de l'autre ses adversaires... Les deux partis en présence étaient à peu près égaux. On en eut bientôt la preuve. Après la clôtude de la discussion sur le premier article du projet, deux amendements furent présentés par Delaunay et par Camille Jordan, membres l'un et l'autre du centre gauche... Rejet des amendements... La nécessité de faire appel à la conciliation déboucha sur une transaction. Le 6 juin, un amendement de nature à établir la conciliation est introduit par Courvoisier. C'est la version connue de la loi de 1820, à ceci près que pour lui les plus fortement imposés ne devaient voter que dans les collèges inférieurs... La droite est contre... Il retire sa motion... Boin introduit le double vote et l'amendement est présenté le 7 juin.

Au nombre des dispositions principales de la loi qui fut définitivement adoptée, figure le découpage en deux catégories de collèges, découpage qui avait pourtant fait l'objet de discussions animées. Il y a dans chaque département un collège électoral de département et des collèges électoraux d'arrondissement. Comme dans le cas de la loi du 7 février 1817, sont électeurs dans les collèges d'arrondissement, les citoyens de sexe masculin agés d'au moins 30 ans et payant au moins 300F de contributions directes. Les collèges d'arrondissement élisent les $\frac{3}{5}$ des députés, soit 258. Le collège de département est composé du premier quartile des électeurs les plus imposés du département procède à l'élection des $\frac{2}{5}$ restants, soit 172 députés. La méthode d'élection est le scrutin uninominal (plurinominal dans le cas des collèges de département élisant plus d'un député) majoritaire à 3 tours déjà utilisé dans le cadre de la loi du 5 février 1817[12].

Sans surprise, les élections de novembre 1820 virent une victoire écrasante des ultrasroyalistes surnommée la "chambre retrouvée" en référence à la chambre de 1815 connue sous le nom de "chambre introuvable". La loi a été utilisée à plusieurs reprises à l'occasion des renouvellements de la chambre et aussi suite à plusieurs dissolutions. A la suite de la dissolution de 1823, les élections de février-mars 1824 conduisent à une domination sans partage des ultras : les libéraux n'ont plus que 19 sièges. Celles de novembre 1827 voit la remontée des libéraux qui ne cessera de se confirmer jusqu'aux élections de juillet 1830. On connaît la suite: l'attitude intransigeante du roi Charles X, les ordonnances de Juillet, les trois glorieuses et le début de la monarchie de Juillet. La loi électorale du 19 avril 1831 remplace celle du 29 juin 1820. Au nombre des principaux changements, signalons l'abandon du collège électoral de département ainsi qu'un abaissement du cens et de l'âge. Le pays est en marche vers le suffrage universel.

## 1.3 Objet et Plan de l'Etude

La loi électorale du 29 juin 1820, en distinguant deux catégories d'électeurs, ceux qui ne votent que dans le collège d'arrondissement et ceux qui votent dans le collège d'arrondissement et le collège de département, présente une caratéristique tout à fait orginale qui en fait un "cas d'école" pour l'analyse du pouvoir de vote. Comme le souligne Rémond (1965) : "la minorité fortunée est ainsi deux fois représentée. La loi accentue et *porte au carré* le caractère foncièrement inégalitaire de l'élection censitaire".

Comment peut-on mesurer le degré d'influence de chaque catégorie d'électeurs dans un tel processus électoral ? Les électeurs les plus riches, qui votent deux fois, ont-ils deux fois

[12]Nous n'allons pas exposer tous les détails de la loi de 1820. Il faut cependant savoir qu'il y a des cas spéciaux où la division en deux catégories de collèges n'est pas mise en oeuvre. L'article 1 de la loi mentionne que "...Néanmoins, tous les électeurs se réuniront dans un seul collège dans les départements qui n'avaient à l'époque du 5 février 1817 qu'un seul député à nommer, dans ceux où le nombre d'électeurs n'excède pas 300 et dans ceux qui, divisés en 5 arrondissements de sous-préfecture n'auront pas au delà de 400 électeurs". Notons par ailleurs que certains historiens ont mal reproduit les proportions attachées aux deux colèges électoraux. Par exemple, De Waresquiel et Yvert (2002) rapportent que "deux tiers sont nommés par les électeurs d'arrrondissement à raison d'un par collège, l'autre tiers par les électeurs de département".

plus de “pouvoir” que ceux qui ne votent qu’une fois ? L’analyse que nous proposons dans les sections qui suivent s’efforce de répondre à ces questions.

On notera que le champ de cette étude dépasse le cadre étroit de la loi de 1820 : le double vote peut en effet intervenir également dans le cas de systèmes électoraux hybrides. Dans ces systèmes (utilisés notamment dans les Conseils de certaines structures intercommunales aux Etats-Unis), le territoire est découpé en districts et les électeurs de chaque district élisent un représentant qui siègera au Conseil ; à ces représentants élus par district s’ajoutent des représentants élus sur une base globale par la population de l’ensemble du territoire. Des systèmes de ce type ont été récemment étudiés par Edelman (2004). Nous y reviendrons.

L’article est structuré de la manière suivante. La Section 2 présente les fondements théoriques de notre analyse. Nous introduisons tout d’abord, de manière brève, la théorie des indices de pouvoir, dont nous soulignons la nature fondamentalement probabiliste (Section 2.1). Nous rappelons ensuite dans la Section 2.2 certains résultats utiles pour comprendre les développements ultérieurs ; ces résultats, dus notamment à Owen (2001), concernent l’analyse du pouvoir des électeurs dans les système représentatifs les plus courants, où les différents collèges électoraux sont disjoints (chaque électeur ne vote qu’une fois). La Section 2.3 présente enfin l’analyse d’Edelman (2004), qui, le premier, a étudié la situation plus générale où les différents districts électoraux ne sont pas disjoints. A la lumière de ces analyses, nous proposons dans la Section 3 un modèle simplifié et approximatif permettant d’évaluer le rapport des pouvoirs de chaque catégorie d’électeurs dans le cadre de la loi de 1820. Le modèle présenté repose (notamment) sur une hypothèse discutable, selon laquelle les votes des électeurs qui votent deux fois sont indépendants. Afin d’évaluer l’impact des hypothèses simplificatrices utilisées, nous présentons dans la même section des simulations de Monte Carlo qui prennent en compte la corrélation des votes des électeurs qui votent dans deux collèges. Des calculs exacts pour des cas simples, proposés dans les Appendices 3 et 4, complètent l’analyse, que conclut la Section 4.

# 2 Fondements Théoriques

## 2.1 Choix Social Binaire

On considére le cas d’une collectivité $N$ qui doit faire un choix parmi deux options : D ou G, réforme ou statut quo,... Chaque membre $i$ de $N$ est décrit pas sa préférence $P_i$. Il y a deux préférences possibles : $G$ ou $D$. Un mécanisme de choix social (interprété ici comme un mécanisme de vote) est une application $F$ définie sur $\{G, D\}^N$ et à valeurs dans $\{G, D\}$ : $P = (P_1, ..., P_N) \in \{G, D\}^N \rightarrow F(P) \in \{G, D\}$. Le mécanisme $F$ est complètement décrit par la liste des coalitions $S \subseteq N$ telles que $F(P) = G$ dès l'instant où $\{i \in N : P_i = G\} = S(P) = S$. Cette liste $\mathcal{W}$ de coalitions définit ce qui est communément appelé un *jeu simple* ; une coalition $S$ dans $\mathcal{W}$ sera appelée ici une coalition gagnante.

Intuitivement, un électeur a du pouvoir dans le mécanisme $F$ (i.e. $\mathcal{W}$) lorsque sa préférence $P_i$ joue un role important dans la sélection de l'option collective. Peut-on évaluer *ex ante* (c'est à dire avant la connaissance des préférences des uns et des autres) le pouvoir des différents électeurs ?

Une telle mesure repose tout d'abord sur un modèle de tirage aléatoire du profil $P$. Plaçons nous du point de vue de l'électeur $i$. Lorsqu'il découvre sa préférence $P_i$ il forme une croyance $\pi(T \mid P_i)$ sur le profil résiduel $T = P_{-i}$. Si ce qui importe est d'être celui dont la préférence fait la différence, alors il faut évaluer le nombre de profils $P = (P_{-i}, P_i)$ ou de facon équivalente $S = S(P)$ tels que $S \in \mathcal{W}$ et $S \backslash \{i\} \notin \mathcal{W}$. La probabilité conditionnelle d'un tel événement est:

$$\sum_{T \notin \mathcal{W} \text{ et } T \cup \{i\} \in \mathcal{W}} \pi(T \mid P_i)$$

D'un point de vue *ex ante* cette probabilité est égale à:

$$\sum_{T \notin \mathcal{W} \text{ et } T \cup \{i\} \in \mathcal{W}} \pi(T)$$

où $\pi$ désigne la loi conjointe décrivant le tirage de $P$ (i.e. $\pi(P_{-i} \mid P_i) = \frac{\pi(P \cap P_i)}{\pi(P_i)}$). La mesure est donc clairement sensible à la spécification de $\pi$. Deux cas majeurs ont retenu l'attention. Le premier cas correspond à la situation où les $P_i$ résultent de tirages indépendants et équiprobables *ex post*. Dans ce cas, $\pi(T) = \frac{1}{2^{N-1}}$ pour tout $T$. Le second cas suppose toujours que les tirages sont indépendants et identiquement distribués mais pas équiprobables. En notant $p$ la probabilité que $P_i = G$, on obtient $\pi(T) = p^t(1-p)^{n-1-t}$ où $t \equiv \#T$. En supposant que le paramètre $p$ est tiré uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$, on obtient une mesure du pouvoir de l'électeur i égale à :

$$\int_0^1 \left( \sum_{T \notin \mathcal{W} \text{ et } T \cup \{i\} \in \mathcal{W}} p^t (1-p)^{n-1-t} \right) dp$$

On pourrait songer à bien d'autre modèles probabilistes incluant plus ou moins de corrélation entre les votes. On pourrait par exemple supposer que les électeurs sont décrits au départ par des caractéristiques socioéconomiques et géographiques et que deux électeurs ayant des caractéristiques voisines ont plus de chances de voter de façon similaire. S'agissant de l'influence, on pourrait aussi s'intéresser à d'autres événements que celui d'être électeur pivot/décisif/critique. On pourrait, par exemple, considérer l'événement "Concordance entre le choix social et la préférence de l'électeur $i$ ": le pouvoir de l'électeur i est mesuré dans ce cas par la probabilité de voir le mécanisme respecter son choix. Cette mesure n'est cependant pas éloignée de la mesure d'influence considérée ici. Dans la suite de notre travail, nous allons nous limiter à la mesure du pouvoir d'influence attachée au fait d'être critique et aux deux modèles probabilistes évoqués ci-dessus. Ce sont les deux modèles les plus populaires[13]. Ils sont connus dans la littérature anglosaxonne sous les vocables de *Impartial Culture (IC) assumption* (indice de Banzhaf) et *Impartial Anonymous Culture (IAC) assumption* (indice de Shapley-Shubik)[14].

Le calcul de ces indices va bien entendu dépendre en premier lieu du jeu simple dérivant le mécanisme. Dans ce qui suit, nous nous concenterons principalement sur les jeux majoritaires pondérés (en particulier les jeux majoritaires ordinaires) et les jeux composés. Un jeu simple $(N, W)$ est un jeu majoritaire pondéré si il existe un vecteur de poids $(w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{R}_+^\ltimes$ et un quota $q > 0$ tels que:

$$S \in \mathcal{W} \text{ ssi } \sum_{i \in S} w_i \geq q$$

Le nombre $q$ désigne le quota nécessaire pour valider l'alternative qui est examinée. Suivant le contexte, les poids $w_i$ pourront désigner le nombre de représentants de $i$ si $i$ désigne un pays votant dans une organisation internationale ou encore le nombre de députés de $i$ si $i$ désigne un parti votant de façon disciplinée dans une assemblée parlementaire. Souvent, le quota est supposé égal à $\left\lceil \frac{\sum_{i \in N} w_i}{2} \right\rceil$ où $\lceil x \rceil$ désigne le premier entier strictement supérieur à $x$. Dans le cas où tous les poids sont égaux à 1 et $q = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, on obtient le jeu majoritaire ordinaire. Si $n$ est impair, le jeu majoritaire ordinaire est fort dans le sens où pour tout $S \subseteq N : S \in \mathcal{W}$ ou $N \backslash S \in \mathcal{W}$.

## 2.2 Composition Classique : les Collèges Disjoints

La complexité du problème examiné ici trouve son origine dans le fait que les différents collèges qui élisent un ou plusieurs représentants ne sont pas disjoints. Certains électeurs

[13]Pour une présentation plus générale de ces deux modèles et des indices qui y sont associés, voir par exemple Felsenthal et Machover (1998), Laruelle et Valenciano (2008) et Straffin (1988).

[14]Dans les Appendices 1 et 2, nous introduirons cependant deux modèles complémentaires, adaptés à notre contexte électoral et qui s'intercalent entre IC et IAC ; cela nous permettra d'éviter quelques-unes des difficultés du modèle IAC conventionnel dans le cas des jeux composés.

appartiennent à plusieurs collèges et votent donc plusieurs fois. Ceci doit être contrasté avec le cas d'école le plus souvent considéré dans l'examen des assemblées dont les représentants sont élus sur la base d'un découpage électoral de la population. La population totale des électeurs $N$ est partitionnée en $K$ districts électoraux: $N = \cup_{1 \leq k \leq K} N_k$. Les électeurs du district $k$ élisent à la majorité simple $w_k$ représentants (les $w_k$ représentants du district $k$ sont tous de droite ou tous de gauche). L'assemblée comprend donc au total $\sum_{1 \leq k \leq K} w_k$ représentants. Nous allons déterminer des formules permettant un calcul exact ou approximatif des indices de Banzhaf et de Shapley-Shubik des électeurs suivant le district auquel ils appartiennent. Ce calcul exploite les propriétés des deux indices par rapport à l'opération de composition. Dans le cas de Banzhaf, l'indice de pouvoir résulte d'une simple multiplication de l'indice de pouvoir de l'électeur dans son district et de l'indice de pouvoir de son représentant dans l'assemblée. Dans le cas de Shapley-Shubik, les choses sont beaucoup moins simples comme nous le rappelle Owen (2001) et nous y revenons ci-dessous.

Comme on l'a vu dans la section précédente, le calcul de la probabilité de l'événement "l'électeur i du district k est pivot" est assez simple dans son principe : il suffit de dénombrer les profils de vote où cet électeur est pivot. Ce sera le cas si les votes dans le district $k$ se divisent en deux parts égales **et** si le bloc des $w_k$ représentants du district $k$ est pivot dans l'assemblée. Dans le cas de IC, ce dernier événement est indépendant de ce qui s'est passé dans le district $k$. Il n'en est pas de même sous l'hypothèse IAC. C'est la raison qui justifie l'introduction du modèle IAC$^*$ décrit dans l'Appendice 1.

Le bloc des $w_k$ représentants du district $k$ est pivot dans l'assemblée si l'ensemble des districts $G \subseteq \{1, ..., K\} \setminus \{k\}$ qui votent à gauche est tel que:

$$\frac{\sum_{1 \leq j \leq K} w_j}{2} - w_k < \sum_{j \in G} w_j < \frac{\sum_{1 \leq j \leq K} w_j}{2}$$

Le dénombrement $M_k$ des ensembles $G$ vérifiant l'inégalité ci-dessus n'est pas immédiat en général. En particulier, le cas du collège électoral des USA a beaucoup retenu l'attention. Dans ce cas et sous des conditions non complètement caractérisées, les rapports $\frac{M_k}{M_l}$ sont très proches des rapports $\frac{w_k}{w_l}$ (Mann and Shapley (1964), Riker and Shapley (1968)). C'est aussi le sens du théorème limite de Penrose (1946) qui affirme que, si le nombre de représentants est suffisamment grand, alors les deux ratios sont proches pour chaque paire d'électeurs. Cette affirmation n'est pas vraie en toute généralité mais l'est sous certaines conditions (Chang, Chua and Machover (2006), Lindner and Machover (2004)). Dans l'Appendice 5, nous étudions dans le détail un exemple où, précisément, cette convergence n'a pas lieu.

Une approche générale et remarquable des questions qui précèdent a été développée par Owen (1972, 1975, 2001). Elle est basée sur le concept d'extension multilinéaire d'un jeu coopératif à utilité transférable. Dans le cas où l'ensemble des joueurs est $\{1,...,K\}$, un tel jeu est décrit par une fonction d'ensemble $V : S \subseteq \{1,...,K\} \to V(S) \in \mathbb{R}_+$ telle que $V(\varnothing) = 0$. Son extension multilinéaire est la fonction $f = f_V$ définie sur $[0,1]^K$ comme suit:

$$f(x_1, x_2, ..., x_K) = \sum_{S \subseteq \{1,...,K\}} \left\{ \prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i) \right\} V(S)$$

Le vecteur $(x_1, x_2, ..., x_K) \in [0,1]^K$ peut être interprété comme le vecteur des probabilités décrivant la formation d'une coalition aléatoire $\widetilde{S}$ sous réserve que les appartenances des membres soient le résultat de tirages aléatoires indépendants. Dans ce cas, $f(x_1, x_2, ..., x_K)$ correspond à l'espérance mathématique de la fonction $V$ i.e. $f(x_1, x_2, ..., x_K) = E\left[\widetilde{S}\right]$. Le propriété la plus remarquable est attachée à la formule suivante :

$$Sh_k(V) = \int_0^1 f_k(t, t, ..., t) dt \text{ où } f_k(x_1, x_2, ..., x_K) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, ..., x_K)$$

Dans cette formule, $Sh_k(V)$ désigne la valeur de Shapley du joueur $k$ dans le jeu $V$ c'est à dire:

$$Sh_k(V) \equiv \sum_{\substack{T \subseteq \{1,...,K\} \\ k \in T}} \frac{(t-1)!(K-t)!}{K!} \left[ V(T) - V(T \setminus \{k\} \right]$$

On obtient facilement :

$$f_k(x_1, x_2, ..., x_K) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,...,K\} \\ k \notin S}} \left\{ \prod_{j \in S} x_j \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq k}} (1 - x_j) \right\} (V(S \cup \{k\}) - V(S))$$

Dans cette expression, le coefficient $\prod_{j \in S} x_j \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq k}} (1 - x_j)$ peut s'interpréter comme la probabilité que $\widetilde{S} = S$. D'où l'on déduit que $f_k(x_1, x_2, ..., x_K) = E\left[V\left(\widetilde{S} \cup \{i\}\right) - V(\widetilde{S})\right]$. Dans le cas où V est un jeu simple i.e. $V(S) \in \{0,1\}$ pour tout $S \subseteq \{1,...,K\}$, on obtient :

$$f_k(x_1, x_2, ..., x_K) = \text{ Prob}(\widetilde{S} \text{ est perdante et } \widetilde{S} \cup \{i\} \text{ est gagnante})$$

Dans le cas du jeu majoritaire pondéré $[q; w_1, w_2, ..., w_K]$ considéré ici[15], c'est-à-dire le cas où $q$ est l'entier le plus petit supérieur à $\frac{\sum_{1 \leq j \leq K} w_j}{2}$, on obtient:

$$f_k(x_1, x_2, ..., x_K) = \text{Prob}(q - w_k \leq Y < q)$$

[15]Les arguments sont valables pour un quota arbitraire.

où $Y$ est la variable aléatoire $\sum_{j\in\{1,...,K\}\setminus\{k\}} Z_j$ et $Z_j$ est la variable aléatoire égale à $w_j$ avec la probabilité $x_j$ et 0 sinon. Puisque $E(Z_j) = x_j w_j$ et $\sigma^2(Z_j) = x_j(1-x_j)w_j^2$, on déduit du fait que les variables $Z_j$ sont indépendantes:

$$E(Y) = \sum_{j\neq k} x_j w_j \text{ et } \sigma^2(Y) = \sum_{j\neq k} x_j(1-x_j)w_j^2$$

Sous réserve d'être dans les conditions d'application d'une version du théorème de la limite centrale[16], on en déduit que $Y$ est approximativement égale à une loi normale $\widetilde{Y}$ de moyenne $E(Y)$ et variance $\sigma^2(Y)$. dans le cas où $(x_1, x_2, ..., x_K) = (t, t, ..., t)$:

$$E(\widetilde{Y}) = t\sum_{j\neq k} w_j \text{ et } \sigma^2\left(\widetilde{Y}\right) = t(1-t)\sum_{j\neq k} w_j^2$$

On en déduit que:

$$\text{Prob}(q - w_k \leq Y < q) = \text{Prob}(q - w_k \leq \widetilde{Y} < q) = \Phi\left(\frac{q - E(\widetilde{Y})}{\sigma\left(\widetilde{Y}\right)}\right) - \Phi\left(\frac{q - E(\widetilde{Y}) - w_k}{\sigma\left(\widetilde{Y}\right)}\right)$$

où:

$$\Phi(s) \equiv \int_{-\infty}^{s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-r^2}{2}} dr$$

En supposant que $w_k$ est négligeable par rapport à $\sum_{j\neq k} w_j$, on déduit du théorème des accroissements finis que :

$$\begin{aligned} f_k(t, t, ..., t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(\frac{q-E(\widetilde{Y})}{\sigma(\widetilde{Y})}\right)^2}{2}} \frac{w_k}{\sigma\left(\widetilde{Y}\right)} \\ &\cong w_k \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(\frac{q-t\sum_j w_j}{\sqrt{t(1-t)\sum_j w_j^2}}\right)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)\sum_j w_j^2}}\right] \end{aligned}$$

On en déduit que l'indice de pouvoir $SS_k$ du joueur $k$ dans le jeu majoritaire pondéré est approximativement[17] égal à:

[16] Ces conditions ne sont pas remplies dans le cadre de la situation examinée dans l'appendice 6.

[17] Notons que l'utilisation du théorème central limite doit être appliqué uniformément en t avec la difficulté supplémentaire du traitement des voisinages de t=0 et t=1. L'argument présenté ici est donc loin d'être complet.

$$\int_0^1 f_k\left(t,t,...,t\right)dt = w_k \int_0^1 \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(\frac{q-t\sum_j w_j}{\sqrt{t(1-t)\sum_j w_j^2}}\right)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)\sum_j w_j^2}} \right] dt$$

Alors que l'indice de pouvoir $B_k$ du joueur $k$ dans le jeu majoritaire pondéré est approximativement égal à:

$$f_k\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},...,\frac{1}{2}\right) = w_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(\frac{q-\frac{\sum_j w_j}{2}}{\frac{\sqrt{\sum_j w_j^2}}{2}}\right)^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{\sum_j w_j^2}} \simeq\cong w_k \sqrt{\frac{2}{\pi \sum_j w_j^2}}$$

soit la formule d'approximation de Penrose (1952). Considérons le cas particulier où $K$ est un nombre impair, $q = \frac{K+1}{2}$ et $w_k = 1$ pour tout $k = 1,...,K$. Dans ce cas, il est facile de déduire de l'expression ci-dessus que l'indice $B_k$ est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{K}}$. Par ailleurs, on déduit immédiatement de la propriété de symmétrie de la valeur de Shapley que l'indice $SS_k$ est proportionnel à $\frac{1}{K}$.

La probabilité de l'événement “l'électeur $i$ du district $k$ est pivot”, i.e. l'indice de Banzhaf d'un électeur générique du district $k$ est proportionnel à:

$$\frac{w_k}{\sqrt{N_k}}$$

Alternativement, on peut déduire le second facteur de l'approximation de la formule de Stirling : $\binom{N_k}{\frac{N_k}{2}}\frac{1}{2^{N_k}}$ se comporte comme $\frac{1}{\sqrt{N_k}}$ . On dispose donc d'une formule très compacte de la mesure du pouvoir au sens de Banzhaf d'un électeur en fonction de la taille de son district et du nombre de représentants que son district envoie à l'assemblée.

Dans le cas de la mesure de Shapley-Shubik classique, c'est-à-dire dans le cadre du modèle IAC classique, le calcul est plus compliqué. On peut à la suite d'Owen (2001) exploiter le fait que l'extension multilinéaire d'un jeu composé est la composition de l'extension multilinéaire du jeu global et des extensions multilinéaires des jeux locaux. En notant, $f$ l'extension multilinéaire du jeu majoritaire pondéré décrivant l'assemblée et $g^k$ l'extension multilinéaire du jeu majoritaire ordinaire decrivant l'élection des représentants du district $k$, nous disposons de la formule générale[18] (Owen, 2001) :

$$SS_k = \frac{1}{N_k}\int_0^1 f_k\left(y^1\left(t\right), y^2(t), ..., y^K(t)\right)\frac{dy^k\left(t\right)}{dt}dt$$

[18] On peut ensuite à nouveau utiliser les approximations Gaussiennes (Owen (2001)).

où:

$$y^j(t) \equiv g^j(t, t, ..., t)$$

Si l'on fait l'hypothèse que les votes dans les différents disctricts sont indépendants, la formule se simplifie et prend une forme multiplicative. Le modèle $IAC^*$, présenté dans l'Appendice 1, repose précisément sur cette hypothèse. On peut dans ce cas démontrer (voir Appendice 1) que l'indice de Shapley-Shubik modifié d'un électeur générique du district $k$ est alors proportionnel à :

$$\frac{w_k}{N_k}$$

## 2.3 Composition Généralisée : les Collèges Emboités

Edelman (2004) a développé une généralisation de l'opération de composition où les $K$ districts électoraux $N_k$ ne sont plus nécessairement disjoints ; on continue de noter $N$ la population de l'ensemble des électeurs, i.e. $N = \cup_{1 \leq k \leq K} N_k$. Un jeu simple généralisé est un $N_k$-tuple $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, ..., \mathcal{W}_K)$ où $\mathcal{W}_k$ est un ensemble de parties de $N_k$ vérifiant :

· $(N_1, N_2, ..., N_K) \in \mathcal{W}$

· $(\varnothing, \varnothing, ..., \varnothing) \notin \mathcal{W}$

· Si $(S_1, S_2, ..., S_K) \in \mathcal{W}$ et $S_k \subseteq T_k$ pour tout $k = 1, ..., K$, alors $(T_1, T_2, ..., T_K) \in \mathcal{W}$.

Les coalitions $(S_1, S_2, ..., S_K) \in \mathcal{W}$ sont appelées coalitions gagnantes globales alors que les composantes sont appelées coalitions locales. Edelman définit un indice de pouvoir de Banzhaf pour un jeu simple généralisé de la manière suivante. Etant donné un électeur i et une coalition gagnante globale $S = (S_1, S_2, ..., S_K)$, on dit que $i$ est pivot en $S$ dans la composante $k$ si $i \in N_k$ et $(S_1, ..., S_k \backslash \{i\}, ..., S_K) \notin \mathcal{W}$. Soit:

$$Piv(i, S, k) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ est pivot en } S \text{ dans la composante } k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note $\chi(\mathcal{W}, i)$ le nombre de fois où $i$ est pivot pour une coalition globale dans une composante donnée i.e:

$$\chi(\mathcal{W}, i) = \sum_{S \in \mathcal{W}} \sum_{k=1}^{K} Piv(i, S, k)$$

Edelman définit l'indice de pouvoir $\widetilde{B}_i$ comme suit:

$$\widetilde{B}_i = \frac{\chi(\mathcal{W}, i)}{2_1^{N_1 + ... + N_K - 1}}$$

Il est important de souligner que cette mesure diffère de l'indice de pouvoir de Banzhaf habituel ($B_i$).

Le jeu simple généralisé qui retient le plus l'attention d'Edelman est celui que nous avons discuté plus haut sous l'hypothèse que les ensembles $N_k$ étaient disjoints. Etant donné un jeu majoritaire pondéré $[q; w_1, ..., w_K]$ sur l'ensemble $\{1, 2, ..., K\}$ et $K$ jeux simples $(N_k, \mathcal{W}_k)$, $(S_1, S_2, ..., S_K) \in \mathcal{W}$ ssi:

$$\sum_{\{k:S_k \in \mathcal{W}_k\}} w_k \geq q$$

Cette opération de composition généralisée diffère de l'opération de composition classique car rien dans la définition ne force à considérer qu'un électeur est dans toutes les coalitions ou dans aucune : il peut être compatbilisé dans certains $S_i$ et non dans certains autres. C'est un peu comme si un électeur avait autant de sosies (doubles, jumeaux,...) que de collèges dans lesquels il est présent.

L'indice de pouvoir $\widetilde{B}_i$ soulève plusieurs problèmes qui sont discutés dand Edelman. Le premier est celui du double comptage qui tient au fait qu'un électeur peut être pivot pour une même coalition globale dans plusieurs composantes. Il est possible de montrer que le problème n'est pas trop sérieux lorsque la taille de l'électorat est suffisamment grande. Le second problème est plus sérieux. La mesure de pouvoir $\widetilde{B}_i$ suppose que les votes d'un même électeur sont indépendants les uns des autres[19]. Il montre à l'aide de certains exemples que les indices $B_i$ et $\widetilde{B}_i$ peuvent être très différents.

# 3 Application à une Représentation Simplifiée de la Loi du "Double Vote".

## 3.1 Notation et Hypothèses Principales.

Pour appliquer la théorie classique de la mesure du pouvoir, nous allons passer sous silence certaines difficultés et nous concentrer sur un cadre simplifié qui ne déforme pas l'essentiel de l'esprit du mode de scrutin instauré par la loi du "double vote". Ce cadre est le suivant :

• Nous supposons qu'il n'y a que deux types de candidats : des candidats de gauche et des candidats de droite. Ce modèle binaire est le cadre habituel d'application de la théorie des indices et nous oblige à ignorer toute autre considération. L'avantage fondamental du modèle binaire est l'équivalence entre vote sincère et vote stratégique, équivalence qui cesse

[19] Le problème de la corrélation entre les votes est étudiée de façon abstraite par certains auteurs comme par exemple Kaniovski (2006).

d'être vraie en présence de trois options ou plus. Du point de vue des préférences, il y aura donc deux types d'électeurs : les électeurs de gauche et les électeurs de droite.

• Nous supposons que la population totale des électeurs est divisée en $K$ départements de taille identique, eux mêmes subdivisés en $A$ arrondisssements de taille identique notée $L$. La taille des départements est donc égale à $AL$ et la taille de l'électorat total est égale à $ALK$.

• Le scrutin de chaque arrondissement est uninominal. En revanche, dans certains départements, il se peut que le collège de département procède à l'élection de plusieurs députés, auquel cas le scrutin est plurinominal (sans être cependant un scrutin de liste). Pour simplifier, nous supposerons que chaque collège départemental élit le même nombre $D$ de députés ($D \geq 1$). Le nombre de députés à la chambre est ainsi égal à $K(D + A)$.

• Dans ce contexte symétrique, il y a deux classes d'électeurs : ceux qui ne votent qu'une seule fois (les "petits" électeurs) et ceux qui votent deux fois (les "grands" électeurs). Nous voulons calculer les indices de Banzhaf et de Shapley-Shubik révisé des deux types d'électeurs. Pour continuer à maintenir la symétrie à son maximum, nous allons supposer que le nombre de grands électeurs est le même dans chaque département et qu'il se répartit en parts égales dans chaque arrondissement. Le nombre de grands électeurs d'un arrondissement est ainsi noté $M$ (avec $M \leq L$) et $\frac{M}{L}$ représente la fraction de gands électeurs par arrondissement (et par département, compte tenu de nos hypothèses).

On notera qu'en prenant $K = 86$ départements, $A = 3$ arrondissements par départements, $D = 2$ députés élus par les grands électeurs de chaque département et $\frac{M}{L} = \frac{1}{4}$, on retrouve les principaux éléments caractéristiques de la loi électorale de 1820 : la chambre des députés compte $86 \times (2 + 3) = 430$ membres ; 258 (soit 3/5) sont élus par tous les électeurs et 172 (soit 2/5) sont élus par les électeurs les plus riches qui constituent le quart de l'électorat. On notera aussi que l'environnement électoral considéré par Edelman (2004) est un cas particulier de notre modèle général. Il correspond au cas où $K = 1$ et $\frac{M}{L} = 1$.

• Enfin, comme Edelman, nous allons dériver des formules approximatives de calcul du pouvoir de chaque classe d'électeurs en négligeant les problèmes de corrélation résultant du fait que les grands électeurs votents plusieurs fois. Clairement, l'indépendance est violée au sein de chaque département car la connaissance des votes du collège de département biaise[20] dans une direction le vote des collèges d'arrondissement. Par ailleurs, au niveau de l'assemblée, la probabilité d'être pivot pour un député issu d'un département donné dépend

[20]Le fait que les grands électeurs soient aussi petits électeurs dans leur arrondissement implique que les résultats électoraux (vus comme les réalisations de $A + 1$ variables aléatoires binaires) ne sont pas indépendants les uns des autres.

à son tour des résultats électoraux du département considéré. Intuitivement, ce second problème de corrélation est d'une intensité inférieure au premier si la chambre des députés est suffisamment grande c'est-à- dire ici si le nombre de départements $K$ est suffisamment grand.

Dans le cas du modèle aléatoire IAC, plusieurs options pour amender la version classique en allant vers plus d'indépendance s'offrent à nous. En premier lieu, nous appliquons IAC département par département (et non uniformément à l'ensemble de tous les électeurs). Cette version, déjà mentionnée, notée $IAC^{*}$ et présentée dans l'Appendice 1, permet d'évacuer les délicates questions de calcul de l'indice de Shapley-Shubik dans les jeux composés. S'agissant de la version d'IAC à retenir au sein de chaque département, plusieurs voies sont possibles.

Dans la mesure où, comme Edelman, nous allons dédoubler de manière naturelle les grands électeurs, on peut faire comme si le groupe des grands électeurs votant (uniquement) dans le collège départemental était disjoint du groupe de ceux votant dans les collèges d'arrondissement. Les deux versions que nous avons retenues supposent toutes les deux une application séparée d'IAC au sein de chaque district (les $A$ districts d'arrondissements et le district de département). Le choix résiduel est alors binaire. On peut appliquer IAC uniformément au sein du district ou on peut l'appliquer séparément pour les deux sous-populations. Le premier modèle sera noté $IAC_{*}$ et le second modèle sera noté $IAC_{**}$. Dans le cadre de l'$IAC_{*}$, la probabilité qu'un électeur soit pivot dans son district est inversement proportionnelle au nombre d'électeurs dans le district (voir Section 2.2). La question est plus complexe dans le cas de la version $IAC_{**}$, qui fait l'objet de l'Appendice 2. Nous y démontrons que la probabilité d'être pivot évolue comme l'inverse de la taille de la sous-population la plus grande. On observera par ailleurs que ces deux versions sont compatibles avec le modèle $IAC^{*}$mentionné dans le paragraphe précédent : l'indépendance des votes au sein des districts implique l'indépendance entre les votes des départements.

Notre approche, basée sur un "dédoublement" artificiel des grands électeurs est destinée à simplifier les calculs. Cette simplification est naturellement discutable du point de vue de l'analyse des conséquences du double vote. La dérivation de formules analytiques exactes semble hors d'atteinte car la prise en compte des corrélations soulève des difficultés combinatoires assez délicates. Dans les Appendices 3 et 4, nous offrons une analyse de l'environnement électoral avec corrélation dans deux cas particuliers afin d'apprécier les écarts par rapport au cas de dédoublement. La question qui se pose est de savoir si ces écarts restent significatifs lorsque les principaux paramètres prennent des valeurs élevées. Nous reviendrons sur ce point à l'aide de simulations.

## 3.2 Calcul des Indices de Pouvoir

Nous nous proposons donc de mesurer, à l'aide des indices de Banzhaf et de Shapley-Shubik révisé, le pouvoir de vote de chaque catégorie d'électeurs. $\Omega$ désigne l'ensemble des profils de préférences possibles. Considérons, dans un arrondissement donné d'un département donné, un petit électeur et un grand électeur. Le petit électeur est décisif s'il est décisif dans l'arrondissement et si de plus le représentant élu de cet arrondissement est lui-même décisif à la chambre des députés. Quant au grand électeur, il est décisif s'il est décisif dans son arrondissement et si le représentant élu de l'arrondissement est décisif à la chambre **ou** s'il est décisif dans son département et si l'élu (ou les élus) de ce département est (sont) décisif(s) à la chambre. Introduisons alors les sous-ensembles de $\Omega$ associés aux événements suivants :

$\mathbf{P}$ : "le petit électeur est décisif" ;
$\mathbf{G}$ : "le grand électeur est décisif" ;
$\mathbf{R}_a$ : "le député d'arrondissement est décisif" ;
$\mathbf{R}_d$ : "le ou les députés de département sont décisifs" ;
$\mathbf{P}_a$ : "le petit électeur est décisif dans son collège d'arrondissement" ;
$\mathbf{G}_a$ : "le grand électeur est décisif dans son collège d'arrondissement" ;
$\mathbf{G}_d$ : "le grand électeur est décisif dans son collège de département".

Nous avons :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_a \cap \mathbf{R}_a$$

et

$$\mathbf{G} = (\mathbf{G}_a \cap \mathbf{R}_a) \cup (\mathbf{G}_d \cap \mathbf{R}_d).$$

Notons $\pi_\alpha(\mathbf{X})$ la probabilité de l'événement $\mathbf{X}$ lorsque l'ensemble $\Omega$ des profils de préférences possibles est muni de la mesure de probabilité $\alpha$. Le pouvoir de vote d'un petit électeur est donné par $\pi_\alpha(\mathbf{P})$ et celui d'un grand électeur par $\pi_\alpha(\mathbf{G})$. Nous obtenons l'indice de Banzhaf en prenant $\alpha = IC$ et les indices de Shapley-Shubik révisés introduits ci-dessus en prenant $\alpha = IAC_*$ et $\alpha = IAC_{**}$.

L'opération de dédoublement et les révisions du modèle IAC auxquelles nous avons procédé conduisent alors, pour les trois $\alpha$ considérés, aux égalités suivantes :

$$\pi_\alpha(\mathbf{P}) = \pi_\alpha(\mathbf{P}_a) \times \pi_\alpha(\mathbf{R}_a)$$

et

$$\pi_\alpha(\mathbf{G}) = \pi_\alpha(\mathbf{G}_a) \times \pi_\alpha(\mathbf{R}_a) + \pi_\alpha(\mathbf{G}_d) \times \pi_\alpha(\mathbf{R}_d) - \pi_\alpha((\mathbf{G}_a \cap \mathbf{R}_a) \cap (\mathbf{G}_d \cap \mathbf{R}_d)).$$

Dans l'expression de $\pi_\alpha(\mathbf{G})$, nous pouvons, au moins en première analyse, négliger le troisième terme car ce terme est du second ordre par rapport aux deux premiers : on néglige donc les profils de préférences dans lesquelles le grand électeur est à la fois décisif dans le collège d'arrondissement et dans le collège départemental, obtenant ainsi :

$$\pi_\alpha(\mathbf{G}) \approx \pi_\alpha(\mathbf{G}_a) \times \pi_\alpha(\mathbf{R}_a) + \pi_\alpha(\mathbf{G}_d) \times \pi_\alpha(\mathbf{R}_d).$$

Nous allons enfin poser que

$$\pi_\alpha(\mathbf{R}_d) = D\pi_\alpha(\mathbf{R}_a).$$

Nous considérons donc qu'un député de département a autant de chances d'être décisif qu'un député d'arrondissement et que $D$ députés de département ont $D$ fois plus de chances d'être décisif qu'un seul[21]. Il en résulte que le rapport entre le pouvoir d'un grand électeur et celui d'un petit s'écrit :

$$\frac{\pi_\alpha(\mathbf{G})}{\pi_\alpha(\mathbf{P})} \approx \frac{\pi_\alpha(\mathbf{G}_a) + D\pi_\alpha(\mathbf{G}_d)}{\pi_\alpha(\mathbf{P}_a)}. \qquad (1)$$

Nous sommes alors en mesure de proposer des formules de calcul simples en précisant le modèle probabiliste sous-jacent. Si l'on utilise la mesure du pouvoir préconisée par Banzhaf (qui suppose implicitement $\alpha = IC$), on sait que le pouvoir d'un électeur dans un collège donné est proportionnel à l'inverse de la racine carrée du nombre d'électeurs (supposé elevé) dans le collège (voir Section 2.2). Précisément, l'on a $\pi_{IC}(\mathbf{P}_a) = \pi_{IC}(\mathbf{G}_a) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi L}}$ puisqu'il y a $L$ électeurs dans un arrondissement et $\pi_{IC}(\mathbf{G}_d) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi MA}}$ puisqu'il y a $MA$ grands électeurs dans un département. La relation (1) donne ainsi, en posant $\mu = M/L$ :

$$\frac{\pi_{IC}(\mathbf{G})}{\pi_{IC}(\mathbf{P})} \approx 1 + D\sqrt{\frac{1}{A\mu}}. \qquad (2)$$

Si l'on applique maintenant le modèle de Shapley-Shubik révisé $IAC_*$, le pouvoir d'un électeur dans un collège donné est inversement proportionnel au nombre d'électeurs du collège. Nous obtenons donc $\pi_{IAC_*}(\mathbf{P}_a) = \pi_{IAC_*}(\mathbf{G}_a) \approx \frac{1}{L}$ et $\pi_{IAC_*}(\mathbf{G}_d) \approx \frac{1}{MA}$, ce qui donne :

$$\frac{\pi_{IAC_*}(\mathbf{G})}{\pi_{IAC_*}(\mathbf{P})} \approx 1 + \frac{D}{A\mu}. \qquad (3)$$

Enfin, si l'on applique le modèle de Shapley-Shubik révisé $IAC_{**}$ , le pouvoir d'un électeur dans un arrondissement donné est inversement proportionnel au nombre de petits électeurs

[21] Autrement dit, nous supposons que dans l'assemblée des députés, poids et pouvoirs coïncident. Cette hypothèse implique bien sûr (entre autres choses) que le nombre de départements soit élevé. Voir sur ce point l'Appendice 5.

de l'arrondissement (voir l'Appendice 2 pour une preuve de ce résultat). Nous obtenons dans ce cas $\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{P}_a) = \pi_{IAC_{**}}(\mathbf{G}_a) \approx \frac{1}{L-M}$ et $\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{G}_d) \approx \frac{1}{MA}$, ce qui donne[22] :

$$\frac{\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{G})}{\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{P})} \approx 1 + \frac{D\,(1-\mu)}{A\mu}. \qquad (4)$$

Le rapport des pouvoirs entre un grand et un petit électeur dépend donc, dans notre modélisation simplifiée, de trois paramètres : le nombre d'arrondissements par département ($A$), le nombre de députés élus dans le collège départemental ($D$) et la proportion $\mu$ de grands électeurs ; il est par ailleurs indépendant du nombre $K$ de départements. En prenant $A = 3$, $D = 2$ et $\mu = 1/4$, afin de se rapprocher autant que faire se peut de l'environnement électoral de 1820, nous obtenons grâce aux relations (2), (3) et (4) $\frac{\pi_{IC}(\mathbf{G})}{\pi_{IC}(\mathbf{P})} = 3,31$, $\frac{\pi_{IAC_*}(\mathbf{G})}{\pi_{IAC_*}(\mathbf{P})} = 3,67$ et $\frac{\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{G})}{\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{P})} = 3$ : le pouvoir d'un grand électeur apparaît ainsi comme étant entre 3 et 4 fois plus élevé que celui d'un petit électeur ! Les relations (2), (3) et (4) indiquent en outre que, conformément à l'intuition, le rapport de pouvoir entre les deux catégories d'électeurs augmente avec $D$ (plus le nombre de députés élus par un collège départemental est élevé, plus le pouvoir relatif d'un grand électeur est important) et diminue si le législateur élève les valeurs de $A$ et/ou de $\mu$ (une augmentation de $A$ ou de $\mu$ "dilue" le pouvoir d'un grand électeur puisqu'alors la taille $MA$ du collège départemental s'élève). Les Tableaux 1, 2 et 3 précisent l'impact de ces différents paramètres.

| | Banzhaf ($IC$) | Shapley-Shubik ($IAC_*$) | Shapley-Shubik ($IAC_{**}$) |
|---|---|---|---|
| $A = 1$ | 5 | 9 | 7 |
| $A = 2$ | 3,83 | 5 | 4 |
| $A = 3$ | 3,31 | 3,67 | 3 |
| $A = 4$ | 3 | 3 | 2,5 |
| $A = 5$ | 2,79 | 2,60 | 2,20 |
| $A = 6$ | 2,63 | 2,33 | 2 |
| $A = 7$ | 2,51 | 2,14 | 1,86 |
| $A = 8$ | 2,41 | 2 | 1,75 |
| $A = 9$ | 2,33 | 1,89 | 1,67 |
| $A = 10$ | 2,26 | 1,80 | 1,60 |

**Tableau 1. Rapport des pouvoirs en fonction de A ($D = 2$, $\mu = \frac{1}{4}$, $L$ grand)**

[22]Nous supposons ici qu'il y a d'avantage de petits électeurs que de grands électeurs, i.e $\mu < 1/2$. Si $\mu \geq 1/2$, comme dans Edelman (2004), la formule (4) se réduit à $\frac{\pi_{IAC_{**}(\mathbf{G})}}{\pi_{IAC_{**}(\mathbf{P})}} \simeq 1 + \frac{D}{A}$ car $\pi_{IAC_{**}(\mathbf{G}_a)} = \pi_{IAC_{**}(\mathbf{P}_a)} \simeq \frac{1}{M}$.

| | Banzhaf ($IC$) | Shapley-Shubik ($IAC_*$) | Shapley-Shubik ($IAC_{**}$) |
|---|---|---|---|
| $D = 1$ | 2,15 | 2,33 | 2 |
| $D = 2$ | 3,31 | 3,67 | 3 |
| $D = 3$ | 4,46 | 5 | 4 |
| $D = 4$ | 5,62 | 6,33 | 5 |
| $D = 5$ | 6,77 | 7,67 | 6 |
| $D = 6$ | 7,93 | 9 | 7 |
| $D = 7$ | 9,08 | 10,33 | 8 |
| $D = 8$ | 10,27 | 11,67 | 9 |
| $D = 9$ | 11,39 | 13 | 10 |
| $D = 10$ | 12,55 | 14,33 | 11 |

**Tableau 2. Rapport des pouvoirs en fonction de D ($A = 3$, $\mu = \frac{1}{4}$, $L$ grand)**

| | Banzhaf ($IC$) | Shapley-Shubik ($IAC_*$) | Shapley-Shubik ($IAC_{**}$) |
|---|---|---|---|
| $\mu = 1/10$ | 4,65 | 7,67 | 7 |
| $\mu = 1/4$ | 3,31 | 3,67 | 3 |
| $\mu = 1/3$ | 3 | 3 | 2,33 |
| $\mu = 1/2$ | 2,63 | 2,33 | 1,67 |
| $\mu = 3/4$ | 2,33 | 1,89 | 1,67 |
| $\mu = 9/10$ | 2,22 | 1,74 | 1,67 |
| $\mu = 1$ | 2,15 | 1,67 | 1,67 |

**Tableau 3. Rapport des pouvoirs en fonction de $\boldsymbol{\mu}$ ($A = 3$, $D = 2$, $L$ grand)**

## 3.3 Simulations

Les résultats que nous venons de présenter reposent sur diverses hypothèses simplificatrices dont la plus discutable est certainement celle du dédoublement des grands électeurs, qui votent de manière indépendante dans le collège d'arrondissement et dans le collège de département. L'objet principal de la présente sous-section est de mesurer, à l'aide de simulations aléatoires, l'impact de cette hypothèse sur le rapport des pouvoirs entre les deux types d'électeurs. Ces simulations nous permettront en outre d'évaluer la précision des formules "théoriques" de la sous-section précédente.

Contrairement à nos formules analytiques, les simulations que nous avons effectuées considèrent un nombre fini d'électeurs. Afin d'éviter le recours à des mécanismes (toujours discutables) de tie-break lorsque le nombre d'électeurs du collège est pair, nous avons choisi de ne considérer qu'une (large) classe de configurations symétriques impaires. Nous y parvenons en fixant les valeurs des paramètres de la manière suivante. Soit $M$ un entier impair et $Q$ un entier strictement supérieur à 1. Nous supposons qu'il y a dans l'arrondissement type $M$ grands électeurs et un total de $L = (Q+1)M + 1$ électeurs si $Q+1$ est pair ($(Q+1)M$ si $Q+1$ est impair). Ainsi, si $Q = 9$, les grands électeurs représentent le dixième de l'électorat. Par ailleurs, nous prenons un nombre d'arrondissements $A$ impair et nous fixons $D$ (le nombre de députés élus au niveau d'un département) tel que $A+D$ soit impair, ce qui implique $D$ pair. On notera que le nombre de députés à la chambre ($(A+D)K$) est impair si et seulement si le nombre $K$ de départements est impair.

Nous avons étudié analytiquement deux cas particuliers très simples en appendice :

- Appendice 3 : $Q = 3$, $A = 1$, $D = 1$, $K = 1$[23].

- Appendice 4 : $Q = 3$, $A = 3$, $D = 2$, $K = 1$.

Les difficultés rencontrées dans l'étude de ces cas pourtant élémentaires nous ont convaincus de la nécessité de faire appel à des méthodes de simulations.

Quel peut-être, *a priori*, l'impact de l'hypothèse de dédoublement sur le pouvoir de vote des grands électeurs ?

Edelman (2004) suggère à travers un exemple que l'indépendance des votes devrait augmenter le pouvoir des électeurs qui votent deux fois car elle donne de la flexibilité à leur vote (voir aussi Miller, 2008). L'on peut illustrer ce point de vue (conforme à l'intuition, selon Edelman) à l'aide de l'exemple suivant.

**Exemple 1** : $K = 1$, $A = 3$, $D = 2$, $M = 1$, $Q = 2$. Supposons que les votes soient les suivants (les votes des grands électeurs apparaissent en italique et l'électeur focal est en gras):

vote du collège de l'arrondissement 1 : **D**, D, G

vote du collège de l'arrondissement 2 : *G*, D, D

vote du collège de l'arrondissement 3 : *D*, D, D

vote du collège de département : **G**, *G*, *D*

Dans cet exemple, le grand électeur de l'arrondissement 1 vote différemment dans le collège de son arrondissement et dans le collège de département. L'assemblée résultant de ce vote comporte 3 députés de droite et 2 députés de gauche. Il apparaît alors que le grand électeur de l'arrondissement 1 peut faire basculer l'assemblée en modifiant son vote dans l'arrondissement, tout en maintement son vote à gauche dans le collège de département. Une telle configuration n'est possible que sous l'hypothèse d'indépendance.

Dans d'autres types de configurations, des votes corrélés sont cependant susceptibles d'accroître le pouvoir d'un grand électeur.

[23]On notera que dans ce cas -le plus simple qui soit-, l'hypothèse $A + D$ impair est violée.

**Exemple 2** : $K = 1$, $A = 3$, $D = 2$, $M = 1$, $Q = 4$. Supposons que les votes soient les suivants (même notation que dans l'exemple 1):

vote du collège de l'arrondissement 1 : **D**, D, D, G, G

vote du collège de l'arrondissement 2 : *D*, D, D, G, G

vote du collège de l'arrondissement 3 : *G*, D, D, D, G

vote du collège de département : **D**, *D*, *G*

L'assemblée est ici constituée de 5 députés de droite. Mais si le grand électeur focal change son vote (dans l'arrondissement **et** dans le département), l'assemblée bascule à gauche. Dans ce type de configuration, un vote indépendant peut réduire le pouvoir du grand électeur.

Il n'est donc pas évident, dans notre contexte, que l'intuition d'Edelman s'applique[24]. Commes nous allons le voir, nos simulations tendent plutôt à l'infirmer.

Ces simulations, de type Monte Carlo, consistent à tirer au hasard un grand nombre de profils de préférence et à calculer sur l'échantillon ainsi obtenu la fréquence des situations pour lesquelles un électeur peut influencer le résultat du vote. Afin d'évaluer correctement l'impact de l'hypothèse d'indépendance, deux types de simulations ont été effectuées. Les premières supposent que le vote des grands électeurs est identique dans le collège d'arrondissement et dans le collège de département (1 seul tirage aléatoire par grand électeur) ; les secondes supposent deux votes indépendants (2 tirages aléatoires par grand électeur). L'écart entre les résultats obtenus permet ainsi de mesurer l'impact de l'hypothèses du dédoublement ; l'écart entre les résultats simulés avec indépendance et les résultats "théoriques"[25] (déduits des formules (2), (3) et (4)) donnera quant à lui une idée du rôle joué par les autres hypothèses simplificatrices utilisées dans notre modélisation de la sous-section précédente. Les simulations ont été menées dans le cadre du modèle $IC$ (indice de Banzhaf) puis dans le cadre des modèles $IAC_*$ et $IAC_{**}$ (Shapley-Shubik révisé).

Une première série de simulations nous a permis de constater que l'augmentation du nombre d'électeurs n'apportait pas de précision significative supplémentaire. Nous nous sommes donc contentés de considérer dans ce qui suit (sauf exceptions explicites) le cas où $L = 45$ et $M = 11$, soit $\mu \simeq 1/4$. Sauf indications contraires, nous prenons par ailleurs $A = 3$ et $D = 2$. Nous avons fait successivement varier la valeur de $K$, puis celle de $A$, de $D$ et enfin de $\mu$. Pour chaque jeu de paramètres, 1 000 000 de simulations ont été effectuées. Les valeurs numériques qui apparaissent dans les tableaux qui suivent correspondent au rapport des pouvoirs entre grands et petits électeurs.

[24] On observera que la corrélation des votes des grands électeurs est susceptible de modifier non seulement le pouvoir de vote des grands mais aussi celui des petits.

[25] Outre l'hypothèse de dédoublement, il est important de rappeler que ces formules théoriques n'ont de valeur que si $K$ est suffisamment élevé.

• **Résultats sous l'hypothèse** $IC$

| $K$ | IC-vote corrélé | IC-vote indépendant | valeur "théorique" |
|---|---|---|---|
| 1 | 7,049 | 4,475 | 3,335 |
| 3 | 3,617 | 3,446 | 3,335 |
| 5 | 3,367 | 3,403 | 3,335 |
| 21 | 3,408 | 3,325 | 3,335 |
| 51 | 3,369 | 3,292 | 3,335 |
| 85 | 3,460 | 3,335 | 3,335 |

**Tableau 4. Valeurs simulées (IC) : impact du paramètre** $K$
$(L = 45, M = 11, A = 3, D = 2)$

Si l'on excepte le cas très particulier où $K = 1$, il apparaît que l'impact du nombre de départements est très faible (conformément à notre modélisation) ; c'est la raison pour laquelle nous nous somme limités dans les simulations qui suivent au cas où $K = 5$.

| $A$ | IC-vote corrélé | IC-vote indépendant | valeur "théorique" |
|---|---|---|---|
| 1 | 5,648 | 5,366 | 5,045 |
| 3 | 3,367 | 3,403 | 3,335 |
| 5 | 2,876 | 2,838 | 2,809 |
| 7 | 2,605 | 2,533 | 2,529 |
| 9 | 2,398 | 2,377 | 2,348 |

**Tableau 5. Valeurs simulées (IC) : impact du paramètre** $A$
$(L = 45, M = 11, K = 5, D = 2)$

| $D$ | IC-vote corrélé | IC-vote indépendant | valeur "théorique" |
|---|---|---|---|
| 2 | 3,367 | 3,403 | 3,335 |
| 4 | 6,858 | 6,228 | 5,671 |
| 6 | 16,279 | 11,981 | 8,006 |
| 8 | 52,310 | 32,248 | 10,342 |
| 10 | 261,790 | 133,688 | 12,677 |

**Tableau 6. Valeurs simulées (IC) : impact du paramètre** $D$
$(L = 45, M = 11, K = 5, A = 3)$

| $M$ | IC-vote corrélé | IC-vote indépendant | valeur "théorique" |
|---|---|---|---|
| 1 | 9,582 | 9,546 | 8,746 |
| 5 | 4,643 | 4,671 | 4,464 |
| 11 | 3,367 | 3,403 | 3,335 |
| 21 | 2,784 | 2,721 | 2,690 |
| 31 | 2,471 | 2,419 | 2,391 |
| 41 | 2,363 | 2,242 | 2,210 |

**Tableau 7. Valeurs simulées (IC) : impact du paramètre** $\mu = \frac{M}{45}$
$(L = 45, K = 5, D = 2, A = 3)$

Globalement, il ressort des tableaux qui précèdent que (i) l'impact de l'hypothèse de dédoublement apparaît comme minime dans la plupart des cas : les écarts entre les chiffres de la colonne "IC-vote corrélé" et ceux de la colonne "IC-vote indépendant" sont très généralement faibles ; (ii) d'autre part, les autres hypothèses de notre modélisation jouent un rôle très mineur puisque la formule (2) donne des valeurs très proches des valeurs simulées sous l'hypothèse de dédoublement (vote indépendant). Deux exceptions doivent cependant être notées. La première concerne le cas particulier où l'on prend $K = 1$ (étudié en Appendice 3). La seconde apparaît lorsque l'on augmente, toutes choses égales par ailleurs, la valeur du paramètre $D$ (nombre de députés d'arrondissement). Les députés d'arrondissement tendent alors à devenir des "dummies" et le pouvoir des petits électeurs tend naturellement vers 0. La formule "théorique", qui confond poids et pouvoir à l'Assemblée, ne prend pas en compte ce phénomène.

- **Résultats sous l'hypothèse** $IAC_*$

| $K$ | $IAC_*$-vote corrélé | $IAC_*$-vote indépendant | valeur "théorique" |
|---|---|---|---|
| 1 | 129,422 | 5,077 | 3,727 |
| 3 | 10,839 | 3,869 | 3,727 |
| 5 | 7,755 | 3,834 | 3,727 |
| 21 | 6,704 | 3,691 | 3,727 |
| 51 | 6,859 | 3,939 | 3,727 |
| 85 | 6,802 | 3,776 | 3,727 |

**Tableau 8. Valeurs simulées (IAC$_*$) : impact du paramètre** $K$
$(L = 45, M = 11, A = 3, D = 2)$

| $A$ | $IAC_*$-vote corrélé | $IAC_*$-vote indépendant | valeur "théorique" |
|---|---|---|---|
| 1 | 22,703 | 9,620 | 9,182 |
| 3 | 7,755 | 3,834 | 3,727 |
| 5 | 6,091 | 2,657 | 2,636 |
| 7 | 5,122 | 2,097 | 2,169 |
| 9 | 4,646 | 1,912 | 1,909 |

**Tableau 9. Valeurs simulées (IAC$_*$) : impact du paramètre** $A$
($L = 45, M = 11, K = 5, D = 2$)

| $D$ | $IAC_*$-vote corrélé | $IAC_*$-vote indépendant | valeur "théorique" |
|---|---|---|---|
| 2 | 7,755 | 3,834 | 3,727 |
| 4 | 30,855 | 7,245 | 6,455 |
| 6 | 143,828 | 14,282 | 9,182 |
| 8 | 1256,421 | 33,868 | 11,909 |
| 10 | $\infty$ | 127,764 | 14,636 |

**Tableau 10. Valeurs simulées (IAC$_*$) : impact du paramètre** $D$
($L = 45, M = 11, K = 5, A = 3$)

| $M$ | $IAC_*$-vote corrélé | $IAC_*$-vote indépendant | valeur "théorique" |
|---|---|---|---|
| 1 | 48,163 | 30,576 | 31,000 |
| 5 | 14,575 | 7,294 | 7,000 |
| 11 | 7,755 | 3,834 | 3,727 |
| 21 | 4,746 | 2,421 | 2,429 |
| 31 | 3,833 | 2,005 | 1,968 |
| 41 | 3,019 | 1,709 | 1,732 |

**Tableau 11. Valeurs simulées (IAC$_*$) : impact du paramètre** $\mu = \frac{M}{45}$
($L = 45, K = 5, D = 2, A = 3$)

L'hypothèse de dédoublement joue dans le cadre du modèle $IAC_*$ un rôle beaucoup plus important. La prise en compte de la corrélation des votes des grands électeurs conduit en effet à une *augmentation* très significative (souvent supérieure à 100%) du rapport des pouvoirs en leur faveur. Lorsque $K = 1$, les simulations indiquent un rapport des pouvoirs supérieur à 100 ; ce résultat étonnant s'explique vraisemblablement par les très fortes corrélations qui existent dans ce cas (très) particulier entre les votes des grands et des petits électeurs.

Les autres hypothèses en revanche ont peu d'impact, comme en témoigne la relative proximité des valeurs de la colonne "théorique" et de la colonne "vote indépendant".

• **Résultats sous l'hypothèse $IAC_{**}$**

| $K$ | $IAC_{**}$-vote corrélé | $IAC_{**}$-vote indépendant | valeur "théorique" |
|---|---|---|---|
| 1 | 9,130 | 4,033 | 3,061 |
| 3 | 5,795 | 3,143 | 3,061 |
| 5 | 5,486 | 3,057 | 3,061 |
| 21 | 5,487 | 3,041 | 3,061 |
| 51 | 5,415 | 3,149 | 3,061 |
| 85 | 5,517 | 3,136 | 3,061 |

**Tableau 12. Valeurs simulées (IAC$_{**}$) : impact du paramètre $K$**
$(L = 45, M = 11, A = 3, D = 2)$

| $A$ | $IAC_{**}$-vote corrélé | $IAC_{**}$-vote indépendant | valeur "théorique" |
|---|---|---|---|
| 1 | 7,648 | 7,550 | 7,182 |
| 3 | 5,486 | 3,057 | 3,061 |
| 5 | 4,507 | 2,235 | 2,236 |
| 7 | 4,054 | 1,912 | 1,883 |
| 9 | 3,526 | 1,663 | 1,687 |

**Tableau 13. Valeurs simulées (IAC$_{**}$) : impact du paramètre $A$**
$(L = 45, M = 11, K = 5, D = 2)$

| $D$ | $IAC_{**}$-vote corrélé | $IAC_{**}$-vote indépendant | valeur "théorique" |
|---|---|---|---|
| 2 | 5,486 | 3,057 | 3,061 |
| 4 | 11,487 | 5,672 | 5,121 |
| 6 | 24,168 | 10,707 | 7,182 |
| 8 | 79,455 | 28,180 | 9,242 |
| 10 | 281,337 | 124,802 | 11,303 |

**Tableau 14. Valeurs simulées (IAC$_{**}$) : impact du paramètre $D$**
$(L = 45, M = 11, K = 5, A = 3)$

| $M$ | $IAC_{**}$-vote corrélé | $IAC_{**}$-vote indépendant | valeur "théorique" |
|---|---|---|---|
| 1 | 45,736 | 31,462 | 30,333 |
| 5 | 12,075 | 6,385 | 6,333 |
| 11 | 5,486 | 3,057 | 3,061 |
| 21 | 2,674 | 1,792 | 1,762 |
| 31 | 2,765 | 1,737 | 1,667 |
| 41 | 2,836 | 1,745 | 1,667 |

**Tableau 15. Valeurs simulées (IAC$_{**}$) : impact du paramètre $\mu = \frac{M}{45}$**
$(L = 45, K = 5, D = 2, A = 3)$

On retrouve globalement les mêmes conclusions que celles qui sont obtenues avec $IAC_*$. Le vote corrélé engendre cependant dans le cadre du modèle $IAC_{**}$ une augmentation du rapport des pouvoirs un peu moins importante que le modèle $IAC_*$. Cette augmentation reste malgré tout significative puisqu'elle est de l'ordre de 75% pour $K = 85$, $A = 3$, $D = 2$ et $\mu \simeq 1/4$.

On notera par ailleurs que les valeurs simulées pour $K = 1$, $A = 3$, $D = 2$ et $\mu \simeq 1/4$ (1ère ligne du Tableau 12) sont très proches de celles que nous avons obtenues par une méthode analytique dans l'Appendice 4 où ce cas de figure est étudié.

En résumé, les formules (2), (3) et (4) que nous avons proposées peuvent être considérées comme fiables -dans le cadre de notre modèle symétrique- si l'on a de bonnes raisons de penser que les votes des grands électeurs ne sont pas corrélés. Si l'on pense en revanche que ces votes sont parfaitement corrélés, alors la précision dépend de l'hypothèse probabiliste utilisée : sous l'hypothèse $IC$, la formule (2) demeure valide alors que les formules (3) et (4), fondées sur les modèles $IAC_*$ et $IAC_{**}$, sous-estiment le pouvoir des grands électeurs par rapport à celui des petits.

# 4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons procédé à une analyse du pouvoir des deux classes d'électeurs introduites par la loi du 20 Juin 1820. Cette analyse nous a conduit à proposer un modèle simplifié du mode de scrutin instauré par cette loi. Ce modèle présente, en tant que tel, un intérêt théorique puisqu'il généralise la modélisation introduite par Edelman (2004) dans un contexte voisin. La généralisation proposée étend le modèle d'Edelman dans deux directions: d'une part nous avons introduit deux classes d'électeurs, et d'autre part, nous ne nous somme pas contentés de fonder nos calculs probabilistes sur l'hypothèse IC (indice de Banzhaf) puisque nous avons églement considéré l'hypothèse IAC (indice de Shapley-Shubik), que nous avons revisitée pour l'occasion.

D'un point de vue appliqué, nous avons vu que dans le cas où $K = 86$, $A = 3$ et $D = 2$, notre modèle se rapprochait de l'environnement électoral qui prévalait en 1820. Reste cependant une ombre au tableau : l'hypothèse de symétrie entre les départements d'une part, et au sein des arrondissements d'autre part, que nous avons introduite dans la totalité de l'étude. En réalité, la situation est beaucoup moins symétrique que celle retenue dans cette modélisation et le pouvoir d'un petit ou grand électeur varie certainement d'un département à l'autre. En tout état de cause, la recherche d'une division en circonscriptions électorales de manière à assurer une représentation équitable n'a pas été un souci majeur du législateur. La loi du 10 mai 1821 qui détermine la circonscription de chaque arrondissement électoral offrait les inégalités les plus choqauntes, que le rapporteur du projet à la chambre des députés essayait de justifier en rappelant d'autres inégalités non moins choquantes, mais nécessaires selon lui, qui existaient dans la loi électorale[26]. Les électeurs se répartissent entre les départements suivant des chiffres qui varient entre 9414 pour le département de la Seine et 41 pour la Corse. La Seine-Inférieure arrive immédiatement après la Seine avec un chiffre de 3902. Viennent ensuite quatre autres départements qui ont plus de 2000 électeurs ; trente en ont plus de 1000. En queue de liste figurent huit départements qui ont moins de 400 électeurs[27].

La prochaine étape de notre projet consistera à s'affranchir autant que faire se peut de cette hypothèse de symétrie. Pour ce faire, nous comptons nous appuyer sur l'atlas historique des circonscriptions électorales Françaises établi par Gaudillère (1995). Notons tout d'abord que 7 départements n'ont qu'un collège de département. Pour ces 7 départements $A = 0$ et $D = 2$. Pour tous les autres départements, on constate une certaine hétérogénéité. Le rapport $\frac{3}{5}$ est de loin le plus fréquent. Parfois il est plus bas : il prend la valeur $\frac{1}{2}$ (par exemple, $A = 2$ et $D = 1$ pour le Cher et la Creuse, $A = 4$ et $D = 2$ pour la Dordogne et $A = 8$ et $D = 4$ pour le Nord et la Seine). Parfois il est plus haut : il prend parfois la valeur $\frac{3}{4}$ (par exemple, $A = 4$ et $D = 3$ pour la Haute-Garonne et l'Ile-et-Vilaine) et même 1 (par exemple, $A = D = 2$ pour la Lozère et la Meuse). Il faudra également tenir compte de la taille de l'électorat de chaque collège pour apprécier l'effet pur résultant d'un écart par rapport à une représentation proportionnelle des électorats.

[26]De ce dernier point de vue, ce passage du discours de M de la Bourdonnaye est des plus piquants : "*Sans doute, il serait désirable que chaque électeur investi des mêmes droits pût les exercer dans la même proportion. Mais s'il est démontré que ce but ne puisse être atteint dans toute l'étendue de la France, si cette inégalité se trouve même sanctionnée par nos lois, si elles l'ont consacrée dans 7 départements, si elle existe déjà de fait de département à département dans une proportion telle que le collège électoral de la Seine, qui ne nomme qu'un député, contient à lui seul autant d'électeurs que quatre ou cinq collèges d'électeurs réunis de quelques départements du midi qui en envoient à la chambre 8 à 10; si le collège électoral de la Corse qui se compose de 36 votants, élit deux députés, tandis que plusieurs collèges électoraux de départements industrieux qui renferment un nombre vingt fois plus considérable d'électeurs, n'ont droit que d'en choisir qu'un seul, il faut bien convenir que l'égalité de nombre dans les électeurs de collèges d'arrondissement d'un même département, n'est ni dans l'esprit de la charte, ni le but d'un travail de circonscription parce que la nature des choses y résiste.*"

[27]Par ailleurs, on peut relever de 1820 à 1823 pluse de 300 arrondissements qui n'ont pas 200 électeurs.

# 5 Appendices

## 5.1 Appendice 1 Un Nouveau Modèle Aléatoire pour les Jeux Composés

La population totale des électeurs $N$ est partitionnée en $K$ districts électoraux: $N = \cup_{1\leq k\leq K} N_k$. Les électeurs du district $k$ élisent sur la base d'un jeu simple $\mathcal{W}_k$, $w_k$ représentants (les $w_k$ représentants du district $k$ sont tous de droite ou tous de gauche). L'assemblée comprendra donc au total $\sum_{1\leq k\leq K} w_k$ représentants. La loi conjointe $\pi$ décrivant le tirage du profil $P$ est supposé résulter de $K$ tirages uniformes indépendants i.e. on procède à $K$ tirages indépendants où $p_k$ est tiré uniformément dans $[0, 1]$. On notera $IAC^*$ ce modèle aléatoire. Dans ce cas, la mesure du pouvoir d'un électeur $i \in N_k$ est égale à :

$$\left[\int_0^1 \left(\sum_{T\notin\mathcal{W}_k \text{ et } T\cup\{i\}\in\mathcal{W}_k} p_k^t(1-p_k)^{n-1-t}\right) dp_k\right] Prob(q - w_k \leq Y_k < q)$$

où $Y_k$ est la variable aléatoire $\sum_{j\in\{1,\ldots,K\}\setminus\{k\}} Z_j$ et $Z_j$ est la variable aléatoire égale à $w_j$ avec la probabilité $\pi_j$ et 0 sinon, où:

$$\pi_j \equiv \int_0^1 \left(\sum_{T\in\mathcal{W}_k} p_k^t(1-p_k)^{n-1-t}\right) dp_k$$

Dans le cas où le jeu $\mathcal{W}_k$ est le jeu à la majorité simple, $\pi_k = \frac{1}{2}$pour tout $k = 1, ..., K$. En utilisant l'approximation Gaussienne présentée dans la Section 2.2, on déduit que la mesure du pouvoir d'un électeur $i \in N_k$ est égale à:

$$\frac{w_k}{n_k}\sqrt{\frac{2}{\pi\sum_j w_j^2}}.$$

## 5.2 Appendice 2 Un Nouveau Modèle Aléatoire pour les Districts avec Deux Classes d'Electeurs

On notera $n_1$ le nombre de petits électeurs dans l'arrondissement et $n_2 < n_1$ le nombre de grands électeurs de ce même arrondissement. Le nombre total d'électeurs est $n = n_1 + n_2$. Notons $x_1$ le nombre de petits électeurs dans l'arrondissement votant à gauche et $x_2$ le nombre de grands électeurs de ce même arrondissement votant à gauche. On appelera type de l'électorat la statistique anonyme $(x_1, x_2)$ : on notera qu'il y a (bien sûr) plusieurs profils de préférences individuelles générant le même type d'électorat. On notera $x = x_1 + x_2$.

La loi conjointe $\pi$ décrivant le tirage du profil $P$ dans le district est supposé résulter de 2 tirages uniformes indépendants, i.e. on procède à 2 tirages indépendants où $p_1$ et $p_2$ sont tirés uniformément dans $[0,1]$. Dans ce cas la probabilité d'une configuration particulière de type $(x_1, x_2)$ est :

$$\frac{(x_1)!(n_1 - x_1)!}{(n_1+1)\, n_1!} \frac{(x_2)!(n_2 - x_2)!}{(n_2+1)\, n_2!}$$

On notera $IAC_{**}$ ce modèle aléatoire. Ce modèle est différent du modèle attaché à décrire une corrélation parfaite. Dans ce cas, le vecteur aléatoire $(p_1,\, p_2)$ suit une loi uniforme sur la diagonale du carré unité $[0,1]^2$et la probabilité d'une configuration particulière de type $(x_1, x_2)$ est :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 p^{x_1+x_2}\,(1-p))^{n_1+n_2-x_1-x_2}\,dp \\ = & \frac{(x)!(n-x)!}{(n+1)\,n!} \end{aligned}$$

Plusieurs modèles hybrides peuvent être bien entendu envisagés. Par exemple, le modèle où le vecteur aléatoire $(p_1,\, p_2)$ suit une loi uniforme sur le triangle supérieur du carré unité $[0,1]^2$ décrit une corrélation forte à la hausse. Dans ce cas la probabilité d'une configuration particulière de type $(x_1, x_2)$ est :

$$2\int_0^1 \int_{p_1}^1 p_1^{x_1}\,(1-p_1))^{n_1-x_1}\, p_2^{x_2}\,(1-p_2))^{n_2-x_2}\,dp_1 dp_2$$

Mais revenons au modèle $IAC_{**}$.

La probabilité $\pi_1$ pour un petit électeur d'être pivot dans son arrondissement est:

$$\sum_{x_1=\frac{n-1}{2}-n_2}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n_1-1}{x_1}\binom{n_2}{\frac{n-1}{2}-x_1}\left(\int_0^1 p_1^{x_1}\,(1-p_1))^{n_1-x_1-1}\,dp_1\right)\left(\int_0^1 p_2^{\frac{n-1}{2}-x_1}\,(1-p_2))^{n_2-\left(\frac{n-1}{2}-x_1\right)}\,dp_1\right)$$

En utilisant la formule:

$$\int_0^1 p^{t-1}\,(1-p))^{n-t}\,dp = \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}$$

on obtient après simplifications:

$$\pi_1 = \sum_{x_1=\frac{n-1}{2}-n_2}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n_1}\frac{1}{n_2+1} = \frac{1}{n_1}$$

La probabilité $\pi_2$ pour un grand électeur d'être pivot dans son arrondissement est:

$$\sum_{x_1=\frac{n-1}{2}-(n_2-1)}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n_1}{x_1}\binom{n_2-1}{\frac{n-1}{2}-x_1}\left(\int_0^1 p_1^{x_1}(1-p_1))^{n_1-x_1}\,dp_1\right)\left(\int_0^1 p_2^{\frac{n-1}{2}-x_1}(1-p_2))^{n_2-1-\left(\frac{n-1}{2}-x_1\right)}\,dp_1\right)$$

Après simplifications, on obtient:

$$\pi_2 = \sum_{x_1=\frac{n-1}{2}-(n_2-1)}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n_1+1}\frac{1}{n_2} = \frac{1}{n_1+1}$$

Les probabilités d'être pivot sont donc presque similaires ; *elles évoluent comme l'inverse de taille de la sous-population la plus grande.*

## 5.3 Appendice 3 : Le District est Découpé en Deux Collèges

### 5.3.1 Le Résultat Electoral

Afin d'illustrer, dans le cas le plus simple qui soit, la nature des calculs combinatoires à conduire dans le cas de collèges emboités, considérons la cas d'un collège composé de $N = 4r+1$ électeurs où $r$ désigne un entier pair. Le collège des "grands électeurs" est composé des $r$ premiers électeurs de ce collège. Les électeurs dont le numéro va de $r+1$ à $4r+1$ seront appelés "petis électeurs". Il y a $3r+1$ petits électeurs. Chaque collège élit un député. On suppose que les votes des électeurs sont indépendants et équidistribués: ils votent avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ pour la candidat de droite D ou le candidat de gauche G. Il y a donc quatre résultats électoraux possibles : (G,G), (D,D), (G,D) et (D,G) où la premiere lettre correspond au résultat du collège composé de tous les électeurs.

Quelle est la probabilité du premier scenario ? Notons qu'il se produit lorsque $i \geq \frac{r+1}{2}$ grands électeurs du grand collège votent à gauche et que $j \geq \frac{N+1}{2} - i = 2r+1-i$ petits électeurs votent à gauche. La probabilité de cet événement est donc égale à:

$$\frac{\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r}\sum_{j=2r+1-i}^{3r+1}\binom{r}{i}\binom{3r+1}{j}}{2^{4r+1}}$$

Voyons dans des cas particuliers comment elle s'écarte de la valeur $\frac{1}{4}$.

Dans le cas où $r = 1$, il y a 1 grand électeur et 4 petits électeurs. L'expression ci-dessus est égale à:

$$\frac{\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}}{2^5} = \frac{11}{32} > \frac{8}{32}$$

Dans le cas où $r = 3$, il y a 3 grands électeurs et 10 petits électeurs. L'expression ci-dessus est égale à:

$$\frac{\binom{3}{2}\left[\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}\right]}{2^{13}} + \frac{\left[\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10}\right]}{2^{13}}$$

En utlisant la formule du binôme et la symétrie des coefficients binomiaux, on obtient:

$$\begin{aligned} & \frac{\binom{3}{2}\left[\frac{2^{10}-\binom{10}{5}}{2}+\binom{10}{5}\right]+\left[\frac{2^{10}-\binom{10}{5}}{2}+\binom{10}{5}+\binom{10}{4}\right]}{2^{13}} \\ = & \frac{\binom{3}{2}\left[2^9+\frac{\binom{10}{5}}{2}\right]+\left[2^9+\frac{\binom{10}{5}}{2}+\binom{10}{4}\right]}{2^{13}} \\ = & \frac{1}{4}+\frac{714}{2^{13}} \end{aligned}$$

La différence positive par rapport à $\frac{1}{4}$ varie de 0.093 75 à 0.08715 8. Que peut-on dire en général ? L'expression ci-dessus peut être écrite de manière à faire apparaître l'écart à $\frac{1}{4}$. En utilisant la formule du binôme et la symétrie des coefficients binomiaux, on obtient :

$$\sum_{j=2r+1-i}^{3r+1}\binom{3r+1}{j} = \left[\frac{2^{3r+1}-\binom{3r+1}{\frac{3r+1}{2}}}{2}+\sum_{k=2r+1-i}^{\frac{3r+1}{2}}\binom{3r+1}{k}\right]$$

Donc:

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r}\sum_{j=2r+1-i}^{3r+1}\binom{r}{i}\binom{3r+1}{j}}{2^{4r+1}} \\ = & \frac{\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r}2^{3r}\binom{r}{i}}{2^{4r+1}} \\ & +\frac{\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r}\sum_{k=2r+1-i}^{\frac{3r+1}{2}}\binom{3r+1}{k}\binom{r}{i}}{2^{4r+1}}-\frac{\binom{3r+1}{\frac{3r+1}{2}}\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r}\binom{r}{i}}{2^{4r+2}} \\ = & \frac{1}{4}+A(r) \end{aligned}$$

où:

$$A(r) \equiv \frac{\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r}\sum_{k=2r+1-i}^{\frac{3r+1}{2}}\binom{3r+1}{k}\binom{r}{i}}{2^{4r+1}}-\frac{\binom{3r+1}{\frac{3r+1}{2}}\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r}\binom{r}{i}}{2^{4r+2}} > 0$$

Il serait intéressant d'analyser le comportement asymptotique de la fonction $A(x)$. Les calculs numériques ci-dessus suggèrent[28] une convergence vers 0.08... mais la convergence ne semble pas monotone ![29]

### 5.3.2 Probabilité d'être Pivot

Considérons maintenant le calcul de la probabilité d'être pivot dans plusieurs cas de figure. On considère tout d'abord le calcul de ces probabilités dans chacun des districts pris de façon isolée.

Pour un petit électeur, elle est égale à:

$$\frac{1}{2^{N-1}}\binom{N-1}{\frac{N-1}{2}} = \frac{1}{2^{N-1}}\frac{(N-1)!}{\left(\frac{N-1}{2}!\right)^2} = \frac{1}{2^{4r}}\frac{4r!}{(2r!)^2} \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi r}}$$

Pour un grand électeur, elle est égale à :

$$\frac{1}{2^{N-1}}\binom{N-1}{\frac{N-1}{2}} + \frac{1}{2^{r-1}}\binom{r-1}{\frac{r-1}{2}} - \frac{1}{2^{N-1}}\binom{r-1}{\frac{r-1}{2}}\binom{3r+1}{\frac{3r+1}{2}} \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} + \sqrt{\frac{2}{\pi r}} - \frac{2}{3\pi r^2}$$

Lorsque $r \to \infty$, le ratio des deux quantités tend vers:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

Imaginons que ce département envoie ses deux élus dans une chambre comprenant par ailleurs $2K+1$ autres représentants. La chambre comprend donc au total $2K+3$ représentants. Imaginons que les décisions soient prises à la majorité des voix. Un petit électeur du département considéré est pivot si son représentant est pivot à la chambre. Ce sera le cas si le reste de la chambre (i.e. les $2K+2$ élus restants) se divisent en deux groupes égaux: $K+1$ votant à gauche et $K+1$ votant à droite. Il est facile de voir qu'en pareil cas, les probabilités considérées sont proportionnelles aux probabilités calculées ci-dessus.

Supposons maintenant à l'opposé que la chambre ne comprend que ces deux élus et que le vote à gauche n'a lieu que si les deux élus votent à gauche i.e. à l'unanimité. Un petit électeur est pivot ssi l'autre élu est de gauche et si les électeurs de son groupe sont divisés en deux parts égales. Un grand électeur est pivot si le petit élu est de gauche et si les électeurs du grand collège sont divisés en deux parts égales ou si le grand élu est de gauche et si les électeurs du petit collège sont divisés en deux parts égales ou si dans les deux collèges les électeurs sont divisés en deux parts égales.

[28]Par exemple, $A(3) = 8.7158 \times 10^{-2}$ et $A(101) = 8.3447 \times 10^{-2}$.

[29]Cette conclusion est confirmée par les simulations.

Considérons le point de vue d'un petit électeur. La probabilité d'être pivot est égale à:

$$\frac{\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r} \binom{r}{i}\binom{3r}{2r-i}}{2^{4r}}$$

On constate que ce calcul est identique au calcul naif qui consiste à considérer une forme d'indépendance entre les élections dans les deux collèges. Dans ce cas la probabilité d'être pivot est égale à :

$$\frac{1}{2}\frac{\binom{4r}{2r}}{2^{4r}} = \frac{\binom{4r}{2r}}{2^{4r+1}}$$

Cette identité découle de la symétrie du calcul. En effet:

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r} \binom{r}{i}\binom{3r}{2r-i}}{2^{4r}} + \frac{\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \binom{r}{i}\binom{3r}{2r-i}}{2^{4r}} \\ = \quad & 2\frac{\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r} \binom{r}{i}\binom{3r}{2r-i}}{2^{4r}} = \frac{\binom{4r}{2r}}{2^{4r}} \end{aligned}$$

Pour illustrer l'importance du quota majoritaire dans ce calcul , considérons le cas où l'élection du candidat de gauche dans le collège des grand électeurs est acquise à partir de $\frac{r+5}{2}$ votes. Dans ce cas la probabilité pour un petit électeur d'être pivot est égale à:

$$\frac{\sum_{i=\frac{r+5}{2}}^{r} \binom{r}{i}\binom{3r}{2r-i}}{2^{4r+1}}$$

Comparons ce calcul au calcul sous l'hypothèse d'indépendance. Dans ce cas, la probabilité d'élection d'un candidat de gauche dans le collège des grands électeurs vaut:

$$\frac{\sum_{i=\frac{r+5}{2}}^{r} \binom{r}{i}}{2^{r}}$$

On en déduit que la probabilité pour un petit électeur d'être pivot vaut cette fois:

$$\frac{\sum_{i=\frac{r+5}{2}}^{r} \binom{r}{i}}{2^{r}} \frac{\binom{4r}{2r}}{2^{4r+1}}$$

et le calcul numérique révèle que les deux expressions diffèrent.

### 5.3.3 Calculs sous l'Hypothèse IAC

L'hypothèse IAC présente l'avantage, dans un cas élémentaire comme celui que nous considérons dans cet appendice, de conduire à des formules analytiques exprimant les probabilités recherchées de manière simple et élégante. La difficulté reside dans la formulation de l'hypothèse IAC elle-même dans le contexte étudié, qui implique des groupes de votants distincts. Plusieurs approches sont envisageables ; la plus simple, celle que nous adopterons, consiste à définir une "configuration de vote" comme un vecteur $(x_1, x_2)$, où $x_1$ désigne le nombre de petits électeurs votant à gauche et $x_2$ le nombre de grands électeurs votant à gauche, et à considérer que toutes les configurations possibles ont la même probabilité d'occurrence. On notera que cette façon de procéder coïncide avec le modèle $IAC_{**}$ présenté dans l'Appendice 2 et utilisé dans la Section 3.

Dans la formulation adoptée, il y a $(r+1)(3r+2)$ configurations possibles puisque nous avons

$$0 \leq x_1 \leq 3r+1 \ \text{ et } 0 \leq x_2 \leq r \ .$$

Calculons la probabilité d'obtenir un résultat électoral de type (G,G). Un tel résultat survient si et seulement si l'on a

$$x_2 \geq \frac{r+1}{2} \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 \geq 2r+1.$$

Il n'est pas difficile d'établir que le nombre de configurations vérifiant ces conditions s'exprime par le polynôme suivant :

$$\frac{7}{8}r^2 + \frac{3}{2}r + \frac{5}{8} = \frac{(r+1)(7r+5)}{8}.$$

Il en résulte que la probabilité du résultat électoral (G,G) est égale à :

$$\frac{7r+5}{8(3r+2)} \ .$$

Lorsque $r \to \infty$, cette probabilité tend donc vers :

$$\frac{7}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} \ .$$

Considérons maintenant le rapport des pouvoirs des deux catégories d'électeurs. Supposons comme nous l'avons fait plus haut que la chambre ne comprend que les deux élus de chacun des collèges et que le vote à gauche exige l'unanimité de ces deux élus.

Adoptons le point de vue d'un petit électeur ($x_1$ désigne désormais le nombre de petits électeurs, autres que celui que l'on considère, qui votent à gauche ; le nombre total de configurations est alors de $(r+1)(3r+1)$). Ce petit électeur est décisif ssi $x_1 + x_2 = 2r$

(il est pivot dans son arrondissement) et $x_2 \geq \frac{r+1}{2}$ (les grands électeurs envoient un député de gauche à la chambre) . Le nombre de configurations associées est $\frac{r+1}{2}$ et l'on en déduit aisément l'expression du pouvoir du petit électeur :

$$\frac{1}{2(3r+1)}.$$

Considérons ensuite le point de vue d'un grand électeur ($x_2$ désigne maintenant le nombre de grands électeurs de gauche, autres que celui que l'on considère). Il est décisif si et seulement si

$$(x_2 = \frac{r-1}{2} \text{ et } x_1 + x_2 \geq 2r+1) \text{ ou } (x_1 + x_2 = 2r \text{ et } x_2 \geq \frac{r-1}{2}).$$

Notons que dans le cas où ($x_1 + x_2 = 2r$ et $x_2 \geq \frac{r-1}{2}$), le grand électeur est décisif dans le collège d'arrondissement et peut aussi l'être dans le collège des grands électeurs (lorsque $x_2 = \frac{r-1}{2}$). Le nombre de configurations associées au premier cas est de $\frac{3r+1}{2}$. Il est de $\frac{r+1}{2}$ dans le second cas. On en déduit que le pouvoir d'un grand électeur est égal à :

$$\frac{2r+1}{(r+1)(3r+1)}.$$

Le rapport des pouvoirs est donc donné par :

$$\frac{4r+2}{r+1}.$$

Lorsque $r \to \infty$, ce rapport tend ainsi vers 4.

On notera que le modèle approximatif présenté dans la Section 3 donne aussi un rapport des pouvoirs égal à 4 (formule (4) avec $D = A = 1$ et $\mu = 1/4$). Autrement dit, dans le cas de figure considéré, l'hypothèse du "dédoublement" (indépendance des votes des grands électeurs) n'a pas d'incidence sur le rapport des pouvoirs lorsque le nombre d'électeurs est élevé sous l'hypothèse $IAC_{**}$ .

## 5.4 Appendice 4 : Le District Comprend Trois Collèges d'Arrondissement et un Collège de Département

Cette fois on considère le cas d'un district (département) composé de $N = 12r + 3$ électeurs où $r$ désigne un entier impair divisé en 3 collèges d'arrondissement comprenant chacun $4r+1$ électeurs. Le collège des "grands électeurs" (collège de département) comprend $3r$ électeurs; il est composé des $r$ premiers électeurs de chaque collège d'arrondissement. Chaque collège d'arrondissement élit un député. Le collège de département élit 2 députés au scrutin de liste sans panachage. On suppose comme précédemment que les votes des électeurs sont indépendants et équidistribués: ils votent avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ pour la candidat de droite D ou le candidat de gauche G. Il y a donc cette fois quatre (16 si l'on regarde collège par collège) résultats électoraux possibles : (3G;G), (2G,D;2G), (G,2D;2G) et (3D;2G), (3G;2D), (2G,D;2D), (1G,2D;2G), (3D;2G) où les deux premières lettre correspondent aux résultats des collèges d'arrondissement. Dans chaque district $r$, il y a quatre votes. Le résultat final est décrit par la réalisation du vecteur aléatoire $(X_r^1, X_r^2, X_r^3, X_r^4)$ où $X_r^4$ désigne le résultat du vote dans le collège de département. Les quatre variables aléatoires ne sont pas indépendantes mais l'étude des covariances est nettement plus compliquée que dans le cas décrit dans l'Appendice 3. Par exemple la probabilité que conjointement $X_r^1 = G$ et $X_r^4 = G$ est donnée par l'expression:

$$\frac{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=Max(0,\frac{r-1}{2}-i)}^{r}\sum_{k=Max(0,\frac{3r+1}{2}-i-j)}^{r}\sum_{l=2r+1-i}^{3r+1}\binom{r}{i}\binom{r}{j}\binom{r}{k}\binom{3r+\&}{l}}{2^{6r+1}}$$

Il serait intéressant de voir de combien cette valeur s'écarte de la valeur $\frac{1}{4}$. Il serait également utile de calculer les probabilités d'être pivot des grands et des petits électeurs en notant $K$ le nombre de districts. On peut voir la chambre comme comprenant $4K$ députés mais où $K$ d'entre eux ont un pouvoir de vote égal à 2. La somme des poids est donc égale à $3K + 2K$. Si $K$ est impair, cette somme est impaire et le jeu est donc fort. Nous nous limiterons ici à quelques indications numériques dans le cas où $r = 3$. Le numérateur de l'expression ci-dessus est la somme des quatre termes suivants:

$$\left[\left(\sum_{l=7}^{10}\binom{10}{l}\right)\times\left(\sum_{j=2}^{3}\sum_{k=5-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}\right)\right] = 1232$$

$$3\left[\left(\sum_{l=6}^{10}\binom{10}{l}\right)\times\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=4-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}\right)\right] = 66\left(\sum_{l=6}^{10}\binom{10}{l}\right) = 25476$$

$$3\left[\left(\sum_{l=6}^{10}\binom{10}{l}\right)\times\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=4-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}\right)\right] = 66\left(\sum_{l=6}^{10}\binom{10}{l}\right) = 25476$$

$$\left[\left(\sum_{l=4}^{10}\binom{10}{l}\right)\times\left[\left(\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=2-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}+\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\right)\right]\right] = 57\left(\sum_{l=4}^{10}\binom{10}{l}\right) = 48336$$

On en déduit que la probabilité vaut $\frac{1.5543\times10^5}{2^{19}} = 0.29646$ qui diffère significativement de $\frac{1}{4} = 0.25$

Calculons maintenant la probabilité pour un petit électeur d'être pivot, sachant que le grand collège a voté majoritairement G. Cette probabilité vaut $\frac{Num}{2^{18}}$ où le numérateur $Num$ est la somme des quatre termes suivants:

$$\sum_{j=2}^{3}\sum_{k=5-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}\binom{9}{6}=588$$

$$3\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=4-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}\binom{9}{5}\right)=8316$$

$$3\left(\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=3-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}\binom{9}{4}\right)=15876$$

$$\binom{9}{3}\times\left[\left(\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=2-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}+\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\right)\right]=\binom{9}{3}\times 57=4788$$

Cette probabilité vaut donc: $\frac{29568}{2^{18}}=0.112\,79$. On remarque que cette valeur diffère de la valeur $\frac{\binom{12}{6}}{2^{12}}=0.225\,59$ obtenue lorsqu'on fait un calcul naïf direct. Sachant que l'on vote à gauche dans le grand collège, la probabilité qu'aucun des 3 grands électeurs du petit collège de 13 électeurs ne vote à gauche n'est plus égale à $\frac{1}{8}$. Elle vaut exactement :

$$\frac{\sum_{j=2}^{3}\sum_{k=5-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}}{\sum_{k=5}^{9}\binom{9}{k}}=\frac{7}{256}=2.\,734\,4\times10^{-2}$$

qui diffère de $\frac{1}{8}=0.125$. La probabilité qu'un grand électeur seulement vote à gauche vaut :

$$\frac{\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=4-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}}{\sum_{k=5}^{9}\binom{9}{k}}=\frac{66}{256}=0.257\,81$$

qui diffère de $\frac{3}{8}=0.375$. La probabilité que deux grands électeurs exactement votent à gauche vaut :

$$\frac{\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=3-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}}{\sum_{k=5}^{9}\binom{9}{k}}=\frac{126}{256}=0.492\,19$$

qui diffère aussi de $\frac{3}{8}$. Finalement, la probabilité que les 3 grands électeurs votent à gauche vaut :

$$\frac{\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=2-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}+\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}}{\sum_{k=5}^{9}\binom{9}{k}}=\frac{57}{256}=0.222\,66$$

qui diffère de $\frac{1}{8}$. On constate que conditionnellement à l'événement "le Collège des 9 grands électeurs vote majoritairement à gauche", les probabilités qui étaient uniformes avant le conditionnement sont désormais biaisées en direction d'un vote plus à gauche. Le nombre *moyen* de grands électeurs de cet arrondissement qui votent à gauche passe de $\frac{3}{2}=1.5$ à $\frac{66+252+171}{256}=1.910\,2$.

Analysons maintenant le rapport des pouvoirs à la lumière de l'hypothèse IAC qui, nous l'avons vu, est susceptible de rendre les calculs plus aisés. Nous présentons ici encore l'approche associée à la version $IAC_{**}$, la plus simple du point de vue calculatoire. Elle consiste à définir une configuration comme un vecteur $(x_{11},x_{12},x_{21},x_{22},x_{31},x_{32})$, $x_{i1}$ désignant le nombre de petits électeurs de gauche dans l'arrondissement $i$ et $x_{i2}$ le nombre de grands électeurs de gauche dans l'arrondissement $i$, $i=1,2,3$.

Adoptons le point de vue d'un petit électeur, que nous supposerons sans perte de généralité issu de l'arrondissement 1. L'ensemble des configurations possibles est défini par :

$$0\le x_{i2}\le r \text{ pour } i=1,2,3,\quad 0\le x_{11}\le 3r \text{ et } 0\le x_{i1}\le 3r+1 \text{ pour } i=2,3.$$

Le nombre de ces configurations s'exprime donc en fonction de $r$ de la manière suivante :

$$(r+1)^3(3r+1)(3r+2)^2.$$

Le petit électeur considéré est décisif s'il est pivot dans son arrondissement (ce qui implique $x_{11}+x_{12}=2r$) et si la chambre comporte 2 députés de droite et 2 députés de gauche ; tel sera le cas si le collège de département vote à gauche (respectivement à droite) et les collèges d'arrondissement 2 et 3 à droite (à gauche). Autrement dit, nous devons avoir :

$$x_{11}+x_{12}=2r,\ x_{21}+x_{22}\ge 2r+1,\ x_{31}+x_{32}\ge 2r+1 \text{ et } x_{12}+x_{22}+x_{32}\le\frac{3r-1}{2};$$

ou

$$x_{11}+x_{12}=2r,\ x_{21}+x_{22}\le 2r,\ x_{31}+x_{32}\le 2r \text{ et } x_{12}+x_{22}+x_{32}\ge\frac{3r+1}{2}.$$

Après évaluation et addition du cardinal de chacun de ces deux sous-ensembles, nous obtenons :

$$\frac{(r+1)^2(3r+2)(59r^2+94r+39)}{96}.$$

Il en résulte que le pouvoir du petit électeur s'écrit :

$$\frac{59r^2+94r+39}{96(r+1)(3r+1)(3r+2)}.$$

Considérons ensuite le cas d'un grand électeur, supposé issu de l'arrondissement 1. Une fois écarté cet électeur, nous avons $0 \leq x_{12} \leq r-1$ et le nombre total de configurations possibles est légèrement différent de ce qu'il était lorsque l'on adoptait le point de vue du petit électeur, puisqu'il est égal à :

$$r(r+1)^2(3r+2)^3.$$

Pour évaluer le nombre de configurations dans lesquelles le grand électeur est décisif, nous distinguerons trois cas.

- Cas 1 : Le grand électeur est pivot dans le collège départemental (et dans ce collège seulement) et les collèges d'arrondissement envoient 1 ou 2 députés de gauche à la chambre. Ce sera le cas ssi :

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=\frac{3r-1}{2} \text{ et } [(x_{11}+x_{12}\geq 2r+1,\ x_{21}+x_{22}\leq 2r \text{ et } x_{31}+x_{32}\leq 2r) \text{ ou}$$
$$(x_{11}+x_{12}<2r,\ x_{21}+x_{22}\geq 2r+1 \text{ et } x_{31}+x_{32}\leq 2r) \text{ ou } (x_{11}+x_{12}<2r,\ x_{21}+x_{22}\leq 2r$$
$$\text{et } x_{31}+x_{32}\geq 2r+1)]$$

ou

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=\frac{3r-1}{2} \text{ et } [(x_{11}+x_{12}\geq 2r+1,\ x_{21}+x_{22}\geq 2r+1 \text{ et } x_{31}+x_{32}\leq 2r) \text{ ou}$$
$$(x_{11}+x_{12}<2r,\ x_{21}+x_{22}\geq 2r+1 \text{ et } x_{31}+x_{32}\geq 2r+1) \text{ ou } (x_{11}+x_{12}\geq 2r+1,\ x_{21}+x_{22}\leq 2r$$
$$\text{et } x_{31}+x_{32}\geq 2r+1)].$$

Après calcul, il apparaît que le nombre total de configurations associées au cas 1 est donné par :

$$\frac{(r+1)(987r^4+1963r^3+1395r^2+413r+42)}{64}$$

- Cas 2 : Le grand électeur est pivot dans son collège d'arrondissement (et dans ce collège seulement) et le collège départemental vote à gauche (respectivement, à droite) et les collèges des arrondissements 2 et 3 à droite (à gauche). Il faut donc :

$$x_{11}+x_{12}=2r,\ x_{12}+x_{22}+x_{32}\geq \frac{3r+1}{2},\ x_{21}+x_{22}\leq 2r,\ x_{31}+x_{32}\leq 2r$$

ou

$$x_{11} + x_{12} = 2r,\ x_{12} + x_{22} + x_{32} < \frac{3r-1}{2},\ x_{21} + x_{22} \geq 2r+1,\ x_{31} + x_{32} \geq 2r+1.$$

Le nombre de configurations correspondant s'écrit :

$$\frac{(r+1)(3r+1)(118r^3 + 111r^2 - 10r - 27)}{192}.$$

- Cas 3 : Le grand électeur est pivot dans le collège départemental et dans son collège d'arrondissement, i.e.

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = \frac{3r-1}{2} \quad \text{et} \quad x_{11} + x_{12} = 2r.$$

Le nombre de configurations associées est égal à :

$$\frac{(r+1)(3r+1)(3r+2)^2}{4}.$$

En sommant ces trois types de configurations et en divisant par le nombre total de configurations, nous obtenons le pouvoir de vote du grand électeur :

$$\frac{3315r^4 + 7636r^3 + 6426r^2 + 2300r + 291}{192r(r+1)(3r+2)^3}.$$

Le rapport des pouvoirs est alors donné par l'expression suivante :

$$\frac{(3r+1)(3315r^4 + 7636r^3 + 6426r^2 + 2300r + 291)}{2r(3r+2)^2(59r^2 + 94r + 39)}.$$

Lorsque $r \to \infty$, ce rapport tend vers $\frac{1105}{118}$. Autrement dit, dans la situation considérée, le pouvoir d'un grand électeur est plus de 9 fois supérieur à celui d'un petit électeur ! Ce résultat est nettement différent de celui que l'on obtient avec le modèle approximatif de la Section 3 (formule (4)), qui donne pour $A = 3$, $D = 2$ et $\mu = 1/4$ un rapport des pouvoirs de 3. Cet écart important peut provenir du nombre très réduit de députés (5) dans le cas étudié : les pouvoirs des députés sont alors différents de leurs poids, contrairement à ce que l'on a supposé dans notre modèle approximatif. Mais l'écart peut aussi résulter de l'impact de l'hypothèse de "dédoublement" des grands électeurs, sur laquelle est fondé l'ensemble de nos formules. Afin d'éclairer cette question, nous avons calculé le rapport des pouvoirs en prenant en compte explicitement cette hypothèse. Il faut, pour y parvenir, introduire une variable supplémentaire, indépendante de $x_{11}$, $x_{12}$, $x_{21}$, $x_{22}$, $x_{31}$, $x_{32}$ et désignant le nombre de grands électeurs votant à gauche dans le département ; soit $x_{42}$ cette variable. Il suffit alors de reprendre l'analyse qui précède en remplaçant $x_{12} + x_{22} + x_{32}$ par $x_{42}$ pour obtenir un vote non corrélé des grands électeurs. En procédant de cette manière, nous obtenons un rapport des pouvoirs dont l'expression est nettement plus simple :

$$\frac{2(2r+1)(3r+1)}{r(3r+2)}.$$

Lorsque $r$ tend vers l'infini, ce rapport tend vers $\frac{12}{3}=4$. Le résultat n'est maintenant plus très éloigné de celui que donne notre formule. L'on en conclut que la prise en compte de la dépendance des votes des grands électeurs joue, dans ce cas particulier, un rôle considérable.

## 5.5 Appendice 5 Le Pouvoir de Shapley-Shubik dans un Parlement avec Deux Classes de Députés

On considére un parlement composé de deux types de députés. Les premiers (appelés petits députés) sont au nombre de $KA$ (où $K$ et $A$ sont des nombres entiers) et ont un poids égal à 1. Les seconds (appelés grands députés) sont au nombre de $K$ et ont un poids égal à $D$ (où $D$ est un nombre entier). On suppose que les entiers $K$ et $A+D$ sont impairs. Cette hypothèse implique que le jeu majoritaire pondéré $\mathcal{W}$ décrivant ce parlement est fort. Le quota $q$ vaut exactement:

$$\frac{K(A+D)+1}{2}$$

Considérons un petit député. Il est pivot lorsque la coalition des députés votant à gauche (ou par symétrie à droite car $\mathcal{W}$ est fort) a un poids égal à $\frac{K(A+D)-1}{2}$. Dénombrer les permutations où un petit électeur fixé est pivot est fondamentalement équivalent à dénombrer les combinaisons de petits et grands députés dont le poids total vaut $\frac{K(A+D)-1}{2}$. (fondamentalement car tous les réarrangements de ces combinaisons doivent bien entendu être comptabilisés). On obtient que le le pouvoir de Shapley -Shubik $\underline{SS}$ d'un petit député est égal à :

$$\frac{\sum_{j=0}^{M}\binom{K}{j}\binom{KA-1}{q-1-Dj}(j+q-Dj-1)!\,(KA+K-j-1-q+Dj)!}{(KA+K)!}$$

où $M$ est la partie entière de $\frac{KA+KD-1}{2D}$. On en déduit que le pouvoir de Shapley-Shubik $\overline{SS}$ d'un grand électeur est égal à :

$$\frac{1}{K}-A\frac{\sum_{j=0}^{M}\binom{K}{j}\binom{KA-1}{q-1-Dj}(j+q-Dj-1)!\,(KA+K-j-1-q+Dj)!}{(KA+K)!}$$

Dans le cas où $K=1$, c'est-à-dire dans le contexte parlementaire retenu par Edelman (2004), on obtient :

$$\underline{SS}(A,D) = 2\frac{(A-1)!}{(q-1)!\,(A-q)!}\frac{[(q-1)!]\,[(A+1-q)!]}{(A+1)!}$$

et donc:

$$\overline{SS}(A,D) = 1 - A\underline{SS}$$

A titre d'illustration, on obtient par exemple:

$$\overline{SS}(A,D) = \begin{cases} 0.454\,55 \text{ quand } (A,D) = (10,5) \\ 0.234\,57 \text{ quand } (A,D) = (80,19) \\ 0.248\,44 \text{ quand } (A,D) = (800,199) \\ 0.249\,84 \text{ quand } (A,D) = (8000,1999) \end{cases}$$

Le rapport $\frac{D}{A+D}$ passe de 33% dans le cas du premier calcul à 20% pour les trois derniers calculs. On suspecte une convergence vers 25% qui est confirmée par le calcul. On remarque que :

$$A\left[2\frac{(A-1)!}{(q-1)!\,(A-q)!}\frac{[(q-1)!]\,[(A+1-q)!]}{(A+1)!}\right] = 2\frac{(A+1-q)}{A+1}$$

Supposons que $A = \alpha N$ où $N \equiv A + D$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$. On obtient que la part agrégée $A\overline{SS}$ des petits vaut

$$2\frac{(A+1-q)}{A+1} \simeq \frac{2\alpha-1}{\alpha} \equiv \phi(\alpha) \text{ lorsque } N \text{ est grand}$$

A titre d'illustration:

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} 0.333\,33 \text{ pour } \alpha = 0.6 \\ 0.571\,43 \text{ pour } \alpha = 0.7 \\ 0.75000 \text{ pour } \alpha = 0.8 \\ 0.888\,89 \text{ pour } \alpha = 0.9 \end{cases}$$

Le fossé entre $\phi(\alpha)$ et $\alpha$ est non négligeable lorsque $\alpha$ est proche de $\frac{1}{2}$ et tend vers 0 lorsque $\alpha$ tend vers 1. Dans le cas de Banzhaf, les pouvoirs des petits et grands députés sont respectivement[30].

$$\underline{B}(A,D) = \frac{\binom{A-1}{q-1}}{2^{A-1}} = \frac{\frac{(A-1)!}{((q-1)!)((A-q)!)}}{2^{A-1}}$$

$$\overline{B}(A,D) = \frac{\sum_{i=q-(N-A)}^{q-1}\binom{A}{i}}{2^{A}} = \frac{\sum_{i=q-(N-A)}^{q-1}\frac{A!}{(i!)((A-i)!)}}{2^{A}}$$

[30]Ces deux formules apparaissent aussi dans Edelman (2004).

A titre d'illustration numérique:

$$\overline{B}(A,D)=\begin{cases} 0.890\,63 \text{ quand } (A,D)=(10,5)\\ 0.974\,35 \text{ quand } (A,D)=(80,19)\\ 0.656\,25 \text{ quand } (A,D)=(10,3)\\ 0.451\,17 \text{ quand } (A,D)=(11,2)\end{cases}$$

et

$$\underline{B}(A,D)=\begin{cases} 7.\,031\,3\times 10^{-2} \text{ quand } (A,D)=(10,5)\\ 9.\,172\,8\times 10^{-3} \text{ quand } (A,D)=(80,19)\\ 0.164\,06 \text{ quand } (A,D)=(10,3)\\ 0.205\,08 \text{ quand } (A,D)=(11,2)\end{cases}$$

On constate que le ratio$\frac{\overline{B}(A,D)}{\underline{B}(A,D)}$ prend successivement les valeurs 12.667, 106.22, 4 et 2.2 alors que les ratios des poids prend les valeurs $5, 20, 3$ et $2$. On est loin de la formule d'approximation de Penrose ! On notera que le théorème de la limite centrale ne s'applique pas ici car la variance de la variable aléatoire attachée au grand député occupe toujours une part non négligeable de la variance totale.

# References


[1] Banzhaf, J.F. (1965) "Weighted voting does not work : a mathematical analysis", *Rutgers Law Review*, 19, 317-343.

[2] Banzhaf, J.F. (1966) "Multi-member electoral districts : do they violate the one man, one vote principle", *Yale Law Journal*, 75, 1309-1338.

[3] Banzhaf, J.F. (1968) "One man, 3.312 votes : a mathematical analysis of the electoral college", *Villanova Law Review*, 13, 304-332.

[4] Berger, J. (1903) *Etude sur la Législation Electorale de 1820*, Thèse pour le Doctorat, Arthur Rousseau, Paris.

[5] Campbell, P. (1958) *French electoral system and elections since 1789*, Faber and Faber Ltd, London.

[6] Challeton, F. (1891) *Cent ans d'élections. Histoire électorale et parlementaire de la France de 1789 à 1830*, Sauvaire, Paris.

[7] Chang, P.L., Chua, V.C.H. and M. Machover (2006) "L.S. Penrose's Limit Theorem: tests by Simulation", *Mathematical Social Sciences*, 51, 90-106.

[8] De Bertier de Sauvigny, G. (1993) *La Restauration*, Flammarion, Paris.

[9] De Waresquiel, E. et B. Yvert (2002) *Histoire de la Restauration 1814-1830*, Perrin, Paris.

[10] Edelman, P.H. (2004). "Voting Power and At-Large Representation", *Mathematical Social Sciences*, 47, 219-232.

[11] Felsenthal, D.S. and M. Machover. (1998) *The measurement of voting power*, Edward Elgar, Cheltenham.

[12] Felsenthal, D.S. and M. Machover (2001) "The Treaty of Nice and Qualified Majority Voting", *Social Choice and Welfare*, 18, 431-464.

[13] Felsenthal, D.S. and M. Machover (2004) "Analysis of QM Rules in the Draft Constitution for Europe Proposed by the European Convention, 2003", *Social Choice and Welfare*, 23, 1-20.

[14] Gaudillère, B. (1995) *Atlas Historique des Circonscriptions Electorales Françaises*, Librairie Droz, Genève.

[15] Kaniovski, S. (2006) "The Exact Biais of the Banhzaf's Measure of Power when Votes are Not Equiprobable and Independent", Austrian Institute of Economic Research, Mimeo.

[16] Laruelle, A. and F. Valenciano. (2008) *Voting and Collective Decision-Making*, Cambridge University Press, Cambridge.

[17] Lindner, I. and M. Machover (2004) "L.S. Penrose's Limit Theorem: Proof of Some Special Cases", *Mathematical Social Sciences*, 47, 37-49.

[18] Mann, I. and L.S. Shapley (1964) "The A priori Strength of the Electoral College", in *Game Theory and Related Approaches to Social Behavior*, M. Shubik (Ed), Wiley, New-York, 151-164.

[19] Miller, N. (2008) "Voting Power with District Plus At-Large Representation", Presented at the 2008 Annual Meeting of the Public Choice Society, San Antonio, Texas.

[20] Newman, E. (1974) "The Blouse and the Frock Coat: the Alliance of the Common People of Paris with the Liberal Leadership and the Middle Class During the Last Years of the Bourbon Restoration", *Journal of Modern History,* 46, 26-59.

[21] Neyman, A. (1982) "Renewal Theory for Sampling without Replacement", *Annals of Probability*, 10, 464-481.

[22] Owen, G. (1972) "Multilinear extensions of games", *Management Science*, 18, 64-79.

[23] Owen, G. (1975) "Evaluation of a Presidential Election Game", *American Political Science Review*, 69, 947-953.

[24] Owen, G. (2001) *Game Theory*, Third Edition, Academic Press, New York.

[25] Penrose, L.S. (1946) "The Elementary Statistics of Majority Voting", *Journal of the Royal Statistical Society*, 109, 53-57.

[26] Penrose, L.S. (1952) *On the Objective Study of Crowd Behaviour*, H.K Lewis and Co, London.

[27] Rémond, R. (1965) *La Vie Politique en France depuis 1789 : Tome 1 (1789-1848)*, Armand Colin, Paris.

[28] Riker, W.H. and L.S. Shapley (1968) "Weighted Voting: A Mathematical Analysis for Instrumental Judgments", in *Representation: Nomos X*, J.R. Pennock and J.W. Chapman (Eds), Atherton, New-York, 199-216.

[29] Rosenvallon, P. (1992) *Le Sacre du Citoyen: Histoire du Suffrage Universel en France*, Gallimard, Paris.

[30] Shapley, L.S. and M. Shubik (1954) "A method for evaluating the distribution of power in a committee system", *American Political Science Review*, 48, 787-792.

[31] Skuy, D. (2003) *Assasination, Politics and Miracles: France and the Royalist Reaction of 1820*, McGill-Queen University Press, Montréal.

[32] Spitzer, A. (1983) "Restoration Political Theory and the Debate over the Law of the Double Vote", *Journal of Modern History,*

[33] Straffin P.D. (1988) "The Shapley-Shubik and Banzhaf Power Indices as Probabilities", in A.E. Roth (eds.) *The Shapley Value : Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press.

[34] Verjus, A (1996) "Les Femmes dans les Lois Electorales de la Restauration (1817 et 1820)" in *La Démocratie à la Française ou les Femmes Indésirables (1793-1993)*, E.

Viennot (Ed), Paris, Publications de l'Université Paris VII-Denis Diderot, Collection des Cahiers du CEDREF.

[35] Verjus, A (2000) "Femmes et Famille dans l'Elaboration des Droits Electoraux de 1789 à la IIIème République" in *Les Droits de L'Homme et le Suffrage Universel*, G. Chianéa et J.L. Chabot (Eds),Paris, L'Harmattan

[36] Verjus, A (2002) "La Veuve et son Gendre dans la Stratégie Electoraliste Libérale sous la Monarchie Censitaire" in *Suffrage, Citoyenneté et Révolutions 1789-1848*, M. Pertué (Ed), Paris, Société des Etudes Robespierristes, Collection des Etudes Révolutionnaires, n°3, 89-98.

[37] Weil, G.D. (1895) *Les élections législatives depuis 1789 : Histoire de la législation et de moeurs*, F. Alcan, Paris.