DEUG ECONOMIE-GESTION
PREMIERE ANNEE
MICROECONOMIE
LISTE DE PROBLEMES ET EXERCISES

Michel Le Breton

2000-2003

Voici une liste de 12 problèmes mis au point pour des sessions d'examen sanctionnant le semestre 1.

PROBLEME 1 (Aix, Janvier 2001)

On considère une économie composée de 3 biens notés respectivement 1,2 et 3 et de 2 groupes de ménages notés respectivement A et B.

1. Dans cette première question nous nous intéressons exclusivement aux ménages du groupe A. Ceux ci ne consomment pas le bien 3. Ils ont tous un revenu identique noté R^A et des preférences identiques pour les biens 1 et 2 représentées par la fonction d'utilité U^A définie ci-dessous :

$$U^A(x_1^A, x_2^A) = x_1^A + 5Log(x_2^A + 1)$$

où x_1^A et x_2^A designent les quantités consommées des biens 1 et 2.

1.1. On note p_2 le prix unitaire du bien 2 et on suppose que le prix unitaire du bien 1 est égal à 1. En utilisant le théorème de Kuhn-Tucker, calculez les demandes Walrasiennes des ménages du groupe A. Montrez en particulier que les deux biens sont consommés dès l'instant où $p_2 < 5$ et $R^A > 5 - p_2$.

1.2. On suppose dorénavant que $p_2 = 1$ et $R^A > 4$. Le gouvernement souhaite lever une taxe indirecte sur la consommation du bien 2. Nous noterons t_2 le montant unitaire de cette taxe (le prix TTC est donc $1 + t_2$). En utilisant les résultats de la question 1.1. montrez que le montant des recettes fiscales est égal à :

$$\frac{5t_2}{1+t_2} - t_2 \text{ si } t_2 < 4 \text{ et } 0 \text{ si } t_2 \geq 4$$

Déduisez de ce calcul qu'il a un "effet Laffer". Montrez en particulier que les recettes fiscales commencent à décliner dès l'instant où t_2 est supérieur à $\sqrt{5} - 1$.

2. Nous nous intéressons maintenant au ménages du groupe B. Ceux ci ne consomment pas le bien 2. Ils ont tous un revenu identique noté R^B et des preférences identiques pour les biens 1 et 3 représentées par la fonction d'utilité U^B définie ci-dessous :

$$U^B(x_1^B, x_3^B) = x_1^B + 3Log(x_3^B + 1)$$

où x_1^B et x_3^B designent les quantités consommées des biens 1 et 3.

2.1. On note p_3 le prix unitaire du bien 3 et on suppose toujours que le prix unitaire du bien 1 est égal à 1. En utilisant le théorème de Kuhn-Tucker, calculez les demandes Walrasiennes des ménages du groupe B. Montrez en particulier que les deux biens sont consommés dès l'instant où $p_3 < 3$ et $R^B > 3 - p_3$.

2.2. On suppose que les ménages du groupe B ont des revenus plus modestes que ceux du groupe A, c'est à dire $R^B < R^A$. Le gouvernement souhaite améliorer le niveau de vie des ménages du groupe B en taxant la consommation du bien 2 comme à la question 1 et en utilisant les recettes collectées pour subventionner la consommation du bien 3. Nous noterons t_3 le montant unitaire de cette subvention (le prix TTC est donc $1 - t_3$). En supposant qu'il y a exactement le même nombre de ménages dans les deux groupes, que $p_3 = 1$ et que le gouvernement se fixe sur $t_2 = 1$, montrez en utilisant les résultats des questions 1.2. et 2.1. que pour équilibrer son budget, t_3 doit être égal à : $\frac{\sqrt{65}-7}{4} \approx \frac{1}{4}$.

2.3. Calculez la perte de surplus des ménages du groupe A et le gain de surplus des ménages du groupe B consécutives à la mise en place de cette politique fiscale. Pourquoi est-il légitime ici de mesurer l'amélioration ou la dégradation du niveau de vie d'un ménage à l'aide des surplus ? En sommant ces surplus, que constatez vous ? Que concluez vous ? Quelle autre politique visant à venir en aide aux ménages du groupe B, le gouvernement pourrait-il envisager ?

PROBLEME 2 (Aix, Janvier 2001)

On considére un ménage dont les préférences sur les biens de consommation rangés en deux groupes notés respectivement 1 et 2 sont décrites par la fonction d'utilité U définie ci-dessous :

$$U(x_1, x_2) = \alpha Log x_1 + \sqrt{x_2}$$

où x_1 et x_2 designent les quantités consommées des biens des groupes 1 et 2 et α est un paramètre positif.

1. En supposant que les prix unitaires des deux groupes de biens sont tous les deux égaux à 1 et en notant R le revenu de ce ménage, montrez que ses demandes Walrasiennes pour les deux groupes de biens sont respectivement :

$$2\alpha\sqrt{\alpha^2 + R} - 2\alpha^2 \text{ pour le premier groupe}$$

et

$$2\alpha^2 + R - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + R} \text{ pour le second groupe}$$

2. Représentez les courbes d'Engel relatives aux deux groupes de biens. Les biens sont-ils normaux ? Quelle est la valeur des élasticités revenu lorsque R est très élevé ? Expliquez pourquoi les préférences ne sont pas homothétiques ?

PROBLEME 3 (Aix, Janvier 2001)

1. On considère un premier ménage dont les préférences *indirectes* sur les biens de consommation groupés en deux groupes notés respectivement 1 et 2 sont décrites par la fonction d'utilité indirecte V définie ci-dessous :

$$V(p_1, p_2, R) = \frac{R(p_1 + p_2)}{p_1 p_2}$$

où p_1 et p_2 designent les prix unitaires des biens des groupes 1 et 2 et R le revenu du ménage.

1.1. Cette fonction d'utilité indirecte a t-elle la forme de Gorman ?

1.2. En utilisant les identités de Roy, déduisez les demandes Walrasiennes de ce ménage.

2. On considère maintenant un second ménage dont les préférences sur les groupes de biens de consommation 1 et 2 sont décrites par la fonction dépense e définie ci-dessous :

$$e(p_1, p_2, u) = \frac{p_1 p_2 u}{p_1 + p_2}$$

où p_1 et p_2 designent les prix unitaires des biens des groupes 1 et 2 et $u > 0$ le niveau de vie du ménage.

2.1. Calculez les demandes Hicksiennes de ce ménage.

2.2. Que peut-on déduire des identités de Slutsky ?

3. Pourquoi peut-on affirmer que les préférences de ces deux ménages coincident ?

PROBLEME 4 (Aix, Janvier 2001)

On considére un ménage dont les préférences sur la consommation et le loisir sont représentés par la fonction d'utilité U ci-dessous :

$$U(C, L) = \alpha LogC + (1 - \alpha)LogL$$

où C et L désignent respectivement le volume de sa consommation et son temps de loisir et α est un paramètre positif strictement inférieur à 1. On supposera que son temps maximal de loisir est égal à 1 et que le prix unitaire de la consommation vaut 1. Enfin on notera w le salaire brut horaire auquel peut prétendre ce ménage.

1. Déterminez la consommation et l'offre de travail Walrasiennes de ce ménage. Calculez l'utilité indirecte de ce ménage.

2. On examine maintenant les conséquences de l'introduction d'un "impôt" T. On note $T(R)$ le montant d'impôt "payé" par un ménage déclarant un revenu égal à R et on suppose :

$$T(R) = \theta R - M$$

où θ est un paramètre compris entre 0 et 1 et M est un paramètre positif.

2.1. Interprétez cet "impôt". Pour quelles valeurs de R, cet impôt est-il en fait un impôt négatif c'est à dire un transfert monétaire de l'état vers le ménage.

2.2. Quelles sont les conséquences d'un tel impôt sur l'offre de travail des ménages? Calculez l'utilité indirecte du ménage en fonction de w, θ et M. Sous quelles conditions un ménage est-il favorable à la mise en place d'un tel impôt ?

3. **On considère une économie composée de 2 groupes de ménages notés respectivement A et B. On suppose que les ménages ont tous les mêmes préférences (décrites ci-dessus) mais que les ménages du groupe A peuvent prétendre à un salaire brut w^A supérieur à celui auquel peuvent prétendre ceux du groupe B noté w^B. En utilisant les résultats de la question 2.2, étudiez les conditions garantissant l'équilibre budgétaire du gouvernement.**

PROBLEME 5 (Aix, Janvier 2001)

Dans son édition du 27 Janvier 1998 le quotidien *Le Monde* se faisait l'écho d'une étude de l'insee sur les économies liées à la vie de couple. On pouvait y lire " Les avantages matériels de la vie en couple sont loin d'être négligeables. Sont-ils pour autant quantifiables ? C'est ce qu'a tenté de démontrer Lucile Ollier, de la division des études sociales de l'insee, dans une étude rendue publique vendredi 23 janvier. La vie à deux permet de réaliser d'importantes économies conclut la chercheuse après avoir démontré qu'*un couple n'a besoin que d'une fois et demie le revenu d'un célibataire pour atteindre le même niveau de vie*".

1. On considére une économie composée de 2 types de ménages : les célibataires d'une part et les couples sans enfants d'autre part. On suppose par ailleurs qu'il y a deux types de biens. On suppose que tous les consommateurs (vivant en couple ou non) ont tous les mêmes préférences décrites par la fonction d'utilité ci-dessous :

$$U(x_1, x_2) = \alpha Log x_1 + (1 - \alpha) Log x_2$$

où x_1 et x_2 designent les quantités consommées des biens 1 et 2 et α set un paramètre positif strictement inférieur à1.

Dans le premier groupe de biens il n'y a aucune économie d'échelle alors que dans le second groupe de biens les économies d'échelle sont maximales. Cela signifie que si un couple achète des quantités x_1 et x_2 des deux biens, la quantité x_2 est la quantité consommée par les deux membres du couple alors que la quantité x_1 devra être partagée entre les deux membres du couple (en notant A et B les deux membres du couple et x_1^A la consommation de bien 1 de A, la consommation de bien 1 de B est $x_1 - x_1^A$). Dans ce qui suit on note p_1 et p_2 les prix unitaires respectifs des biens 1 et 2. Donnez des exemples de biens ayant approximativement ces caractéristiques.

1. Considérons un ménage célibataire dont le revenu est R. Montrez que son utilité indirecte $V(p_1, p_2, R)$ est donnée par l'expression :

$$\alpha Log\alpha + (1-\alpha)Log(1-\alpha) - \alpha Logp_1 - (1-\alpha)Logp_2 + LogR$$

2. Considérons maintenant un couple qui répartit égalitairement les achats en bien 1 entre ses deux membres et dont le revenu total est R'.

2.1. Montrez qu'un couple disposant d'un revenu $R' = (1+\alpha)R$ atteint une niveau de vie supérieur ou égal à celui d'un célibataire disposant d'un revenu égal à R.

2.2. Montrez que l'utilité indirecte de chacun des membres du couple est donnée par l'expression :

$$\alpha Log\alpha + (1-\alpha)Log(1-\alpha) - \alpha Log2p_1 - (1-\alpha)Logp_2 + LogR'$$

3. Déduisez des questions 1 et 2.2. qu'un couple n'a besoin que d'un revenu $R' = R2^{\alpha}$ pour atteindre le niveau de vie d'un célibataire ayant un revenu égal à R. Comparez cette formule avec la formule $R' = (1+\alpha)R$ de la question 2.1 et expliquez la différence. Commentez cette formule lorsque α est très proche de 0 ou à l'inverse très proche de 1. Pour quelle valeur de α trouve t-on le ratio de $\frac{3}{2}$ de Lucile Ollier ?

4. Chaque année les ménages français acquittent l'impôt sur le revenu des personnes physiques. Un célibataire ayant déclaré un revenu égal à R acquitte un impôt égal à $T(R)$. Le description mathématique de la fonction T ne sera pas donnée ici (elle figure dans les formulaires annexés à la déclaration annuelle de revenus). En revanche, un couple sans enfants ayant déclaré un revenu total égal à R' acquitte un impôt égal à :

$$2T(\frac{R'}{2})$$

En vous basant sur vos calculs de la question 3, argumentez pour ou contre le remplacement de la formule ci-dessus, dite du quotient familial, par la formule $2T(2^{-\alpha}R')$. Remarquez que dans le cas limite $\alpha = 1$, on retrouve la formule du quotient familial.

PROBLEME 6 (Aix, Septembre 2001)

1. On considère un premier ménage consacrant son revenu R à l'achat de deux biens. On note p_1 et p_2 les prix unitaires de ces deux biens et on désigne par $x_1$et x_2 les quantités consommées. On suppose : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. Les préférences de ce ménage sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$$

1.1. En utilisant le théorème de Kuhn-Tucker, déterminez les demandes Walrasiennes de ces deux biens. Montrez en particulier que si $R > \frac{p_2^2}{4p_1}$, $x_1(p_1, p_2, R) = \frac{p_2^2}{4p_1^2}$ et $x_2(p_1, p_2, R) = \frac{R}{p_2} - \frac{p_2}{4p_1}$. Representez la courbe d'Engel du bien 1 et calculez les élasticités prix et revenu pour chacun des biens.

1.2. Déterminez la fonction d'utilité indirecte $V(p_1, p_2, R)$ de ce ménage. Que peut-on déduire des identités de Roy ?

1.3. Déterminez la fonction dépense $e(p_1, p_2, u)$ de ce ménage.

1.4. On suppose dorénavant que $p_2 = 1$ et $p_1 > \frac{1}{4R}$. Représentez sur un graphique la fonction de demande inverse de bien 1 de ce ménage et calculez le surplus de ce ménage. Expliquez pourquoi une variation de surplus consécutive à une variation de p_1 *mesure exactement* la variation de bien être de ce ménage en unités de revenu.

1.5. Le gouvernement décide d'imposer un taxe unitaire indirecte d'un montant t_1 sur la consommation du bien 1. Quel est le montant des recettes fiscales collectées ? Quelle est la perte de bien être de ce ménage ? Quelle compensation financière devrait recevoir ce ménage pour retrouver son niveau de vie antérieur ? Ce montant coincide t-il avec les recettes du gouvernement ? Pourquoi ?

2. On considére un second ménage disposant d'un revenu R' consacré également à l'achat des biens 1 et 2. On désigne par y_1 et y_2 les quantités consommées des deux biens. Les préférences de ce ménage sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U'(y_1, y_2) = y_1^2 y_2^3$$

2.1. En utilisant le théorème de Kuhn-Tucker, déterminez les demandes Walrasiennes de ces deux biens.

2.2. On suppose dorénavant que $p_2 = 1$. Représentez sur un graphique la fonction de demande inverse de bien 1 de ce ménage et calculez les variations de surplus de ce ménage (ici vous noterez que nous parlons de variations de surplus car l'aire sous la courbe de demande inverse est infinie). Expliquez pourquoi une variation de surplus consécutive à une variation de p_1 *ne mesure pas exactement* la variation de bien être de ce ménage en unités de revenu.

2.3. Dans le contexte de la politique fiscale introduite à la question 1.5., comment calculer la compensation financière que devrait recevoir ce ménage pour retrouver son niveau de vie antérieur ?

PROBLEME 7 (Aix, Septembre 2001)

On considère un ménage dont les préférences portent sur la consommation et le temps consacré aux activités non professionnelles (appelé temps de loisir). On représente par un bien unique la consommation de ce ménage et on note C le volume de cette consommation. On note T le temps de loisir et on suppose que ce ménage peut travailler pendant une durée maximale posée égale à 1.

Le revenu de ce ménage est composé de son revenu salarial et d'une prestation sociale de l'état dont le montant est noté A. On note w le taux de salaire unitaire et on suppose que le prix du bien de consommation est égal à 1. Les préférences du ménage sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(C,T) = LogC + \alpha LogT$$

où α est un paramètre positif.

1. Déterminez l'offre de travail de ce ménage en fonction de w et A.

2. Le gouvernement introduit une imposition sur les revenus salariaux à taux fixe, noté t. Quel est l'impact de cette politique sur l'offre de travail ?

3. On suppose qu'il y dans l'économie deux types de ménages qui ne diffèrent que par le taux de salaire unitaire en raison de différences dans leurs qualifications respectives. On note respectivement w_1 et w_2 les taux de salaire unitaires dans les deux groupes et on suppose $w_1 < w_2$. On suppose que le gouvernement veut venir en aide aux ménages du groupe 1 en imposant à taux fixe le revenu salarial des ménages du groupe 2 et en versant le produit de ces recettes aux ménages du groupe 1 sous la forme d'un forfait.

On note respectivement n_1 et n_2 le nombre de ménages dans chacun des deux groupes, t le taux d'imposition qui s'applique aux ménages du groupe 2 et A la prestation reçue par les ménages du groupe 1. Ecrivez la contrainte budgétaire du gouvernement. **Y a t-il d'autres contraintes auxquelles ce gouvernement pourrait faire face dans la mise en oeuvre d'une telle politique ?**

PROBLEME 8 (Aix, Janvier 2002)

On considère une économie composée d'une population de ménages identiques consommant 3 biens notés respectivement 1, 2 et 3. Ces ménages ont un revenu R et des préférences pour les biens 1, 2 et 3 représentées par la fonction d'utilité U définie ci-dessous :

$$U(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \sqrt{x_2} + 2\sqrt{x_3}$$

où x_1, x_2 et x_3 désignent les quantités consommées des biens 1,2 et 3.

1.1. On note p_2 et p_3 les prix unitaires respectifs des biens 2 et 3 et on suppose que le prix unitaire du bien 1 est égal à 1. En utilisant le théorème de Kuhn-Tucker, calculez les demandes Walrasiennes de ces ménages. Montrez en particulier que les trois biens sont consommés dès l'instant où $R > \frac{1}{4p_2} + \frac{1}{p_3}$.

1.2. Le gouvernement souhaite lever des taxes indirectes sur la consommation des biens 2 et 3 dans le but de financer une dépense publique d'un montant supposé égal à B. Nous noterons respectivement t_2 et t_3 les montants unitaires de ces taxes et nous supposerons que les prix unitaires HT des biens 2 et 3 sont egaux à 1 (les prix TTC des biens 2 et 3 sont donc respectivement égaux à $1 + t_2$ et $1 + t_3$). On suppose dorénavant que $R > \frac{5}{4}$. En notant N le nombre de ménages dans la population, montrez, en utilisant les résultats de la question 1.1. que le montant des recettes fiscales est égal à :

$$N(\frac{t_2}{4(1+t_2)^2} + \frac{t_3}{(1+t_3)^2})$$

Déduisez de ce calcul qu'il a un "effet Laffer". Montrez en particulier que les recettes fiscales commencent à décliner dès l'instant où t_2 ou (et) t_3 est supérieur à 1. Ecrivez la contrainte budgétaire du gouvernement et déduisez de ce qui précède que la dépense B ne saurait excéder $\frac{5N}{16}$.

2. Nous supposons dorénavant que $B < \frac{5N}{16}$ et on suppose que le gouvernement souhaite choisir les taxes t_2 et t_3 de facon à minimiser la dégradation du niveau de vie des ménages.

2.1. Pourquoi est est-il légitime de mesurer ici cette dégradation par la perte de surplus ? Montrez que cette perte de surplus est égale à :

$$\frac{t_2}{4(1+t_2)} + \frac{t_3}{1+t_3}$$

2.2. Déduisez de ce qui précède que le programme du gouvernement s'écrit :

$$\underset{(t_2,t_3)}{Min} \frac{t_2}{4(1+t_2)} + \frac{t_3}{1+t_3}$$

sous les contraintes

$$t_2 \geq 0$$

$$t_3 \geq 0$$

et

$$\frac{t_2}{4(1+t_2)^2} + \frac{t_3}{(1+t_3)^2} = \frac{B}{N}$$

2.3. En utilisant le théorème de Kuhn-Tucker, montrez que le programme de la question 2.2. admet une unique solution $(t_2(B), t_3(B))$ telle que : $t_2(B) = t_3(B) > 0$. Dans la suite de la question nous noterons $t(B)$ la taxe indirecte optimale commune aux biens 2 et 3 lorsque le montant de la dépense publique est B. Montrez que :

$$t(B) = \frac{5N - 8B - 4N\sqrt{\frac{25}{16} - \frac{5B}{N}}}{8B}$$

Notons λ la variable duale associée à la contrainte budgétaire du gouvernement. Montrez que :

$$\lambda(B) = 1 + \frac{2t(B)}{1 - t(B)}$$

2.4. Expliquez pourquoi $\lambda(B)$ s'interprète comme le coût marginal de la dépense publique par ménage lorsque le budget courant est B. Devons nous être surpris de trouver $\lambda(B) > 1$ c'est à dire que l'équivalent monétaire de la perte pour un ménage d'un franc supplémentaire prélevé de la sorte est supérieure à un franc ? Y a t-il un autre mode de prélèvement fiscal pour lequel le coût d'opportunité marginal d'un franc public serait exactement égal à un franc ?

3. Dans ce problème nous avons supposé que tous les ménages étaient identiques. Supposons maintenant que l'économie soit composée de deux groupes de ménages différents notés A et B. Les ménages du groupe A, au nombre de n^A sont décrits par un revenu R^A et la fonction d'utilité U^A considérée ci-dessus, c'est à dire:

$$\mathbf{U}^A(\mathbf{x}_1^A, \mathbf{x}_2^A, \mathbf{x}_3^A) = \mathbf{x}_1^A + \sqrt{x_2^A} + \mathbf{2}\sqrt{x_3^A}$$

où x_1^A, x_2^A et x_3^A désignent les quantités consommées des biens 1,2 et 3 par un ménage du groupe A. Les ménages du groupe B, au nombre de n^B, ne consomment pas le bien 3. Ils sont décrits par un revenu R^B et la fonction d'utilité définie comme suit :

$$\mathbf{U}^B(\mathbf{x}_1^B, \mathbf{x}_2^B) = \mathbf{x}_1^B + \sqrt{x_2^B}$$

où x_1^B et x_2^B désignent les quantités consommées des biens 1et 2 par un ménage du groupe B. On suppose que $n^A = \gamma n^B$ où γ est un paramètre positif inférieur à 1, c'est à dire que les ménages de type B sont plus nombreux que les ménages de type A. Déterminez la politique fiscale mise en place par un gouvernement qui se soucie exclusivement du niveau de vie des ménages du groupe majoritaire.

PROBLEME 9 (Aix, Janvier 2002)

On considére un ménage dont les préférences sur les biens de consommation rangés en deux groupes notés respectivement 1 et 2 sont décrites par la fonction d'utilité U définie ci-dessous :

$$U(x_1, x_2) = -e^{-\alpha x_1} - e^{-\beta x_2}$$

où x_1 et x_2 designent les quantités consommées des biens des groupes 1 et 2 et α et β sont des paramètres positifs.

1. On note p_1 et p_2 les prix unitaires des deux groupes de biens et R le revenu de ce ménage.

1.1. En utilisant le théorème de Kuhn-Tucker, montrez que les deux groupes de biens sont consommés si et seulement si $R > Max(\frac{p_2}{\beta} Log \frac{\beta p_1}{\alpha p_2}, \frac{p_1}{\alpha} Log \frac{\alpha p_2}{\beta p_1})$ et que dans ce cas les demandes Walrasiennes pour les deux groupes de biens sont respectivement :

$$x_1(p_1, p_2, R) = \frac{\beta R - p_2 Log \frac{\beta p_1}{\alpha p_2}}{\beta p_1 + \alpha p_2} \text{ pour le premier groupe}$$

et

$$x_2(p_1, p_2, R) = \frac{\alpha R + p_1 Log \frac{\beta p_1}{\alpha p_2}}{\beta p_1 + \alpha p_2} \text{ pour le second groupe}$$

1.2. En utilisant le théorème de Kuhn-Tucker, déterminez la fonction dépense $e(p_1, p_2, u)$ où u est un réel négatif. Déterminez les demandes Hicksiennes pour les deux groupes de biens. Déterminez la fonction d'utilité indirecte $V((p_1, p_2, R)$. Les préférences de ce ménage sont-elles de type Gorman ? Sont-elles homothétiques ?

2. Dans ce qui suit on suppose $\alpha = \beta = p_2 = 1$ et on note p au lieu de p_1 le prix unitaire du bien 1.

2.1. Pour une valeur de p fixée, représentez les courbes d'Engel relatives aux deux groupes de biens. Les biens sont-ils normaux ? Quelle est la valeur des élasticités revenu lorsque R est très élevé ?

2.2. Pour une valeur de R fixée, représentez la courbe de demande $x_1(p)$ du premier groupe de biens lorsque $R > e$. Calculez $x_1(1)$ et $x_1(e)$ lorsque $R = 10$. En déduire une valeur approchée de la perte de surplus de ce ménage lorsque p augmente de 1 à e.

PROBLEME 10 (Aix, Janvier 2002)

On considére un ménage dont les préférences sur la consommation et le loisir sont représentés par la fonction d'utilité U ci-dessous :

$$U(C,L) = \alpha LogC + (1-\alpha)LogL$$

où C et L désignent respectivement le volume de sa consommation et son temps de loisir et α est un paramètre positif strictement inférieur à 1. On suppose que son temps maximal de loisir est égal à 1 et que le prix unitaire de la consommation vaut 1. Enfin on note w le salaire brut unitaire auquel peut prétendre ce ménage et on suppose que le revenu consiste exclusivement du revenu salarial.

1. Déterminez la consommation et l'offre de travail Walrasiennes de ce ménage.

2. On examine maintenant les conséquences de l'introduction d'un impôt T. On note $T(R)$ le montant d'impôt payé par un ménage déclarant un revenu égal à R et on suppose

$$T(R) = \begin{cases} \theta(R-R_0) \text{ si } R \geq R_0 \\ \qquad\qquad 0 \text{ si } R \leq R_0 \end{cases}$$

où θ est un paramètre compris entre 0 et 1 et $R_0 > 0$.

2.1. Interprétez cet impôt. Représentez dans $\Re_+^2$ l'ensemble des plans (L,C) budgétairement accessibles dans le cas où $R_0 = \frac{w}{2}$ c'est à dire où le seuil de non imposition est le mi-temps.

2.2. En vous basant sur la convexité des préférences, montrez que si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, l'introduction de l'impôt ne change pas l'offre de travail du ménage. Montrez que si $\alpha \geq \frac{1}{2-\theta}$, l'offre de travail du ménage est égale à $\frac{2\alpha-\alpha\theta-\theta}{2-2\theta}$. Montrez enfin que si $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2-\theta}$, l'offre du travail du ménage est égale à $\frac{1}{2}$.

3. On considère une économie composée d'un très grand nombre de ménages ayant les caractéristiques ci-dessus et ne différant entre eux que par la valeur du paramètre α (en particulier ils peuvent prétendre au même salaire brut). On suppose que cette population est décrite par la loi continue uniforme sur $[0,1]$. Calculez le montant des recettes fiscales en fonction de θ.

PROBLEME 11 (Aix, Septembre 2002)

1. On considère un premier ménage consacrant son revenu R à l'achat de deux biens. On note p_1 et p_2 les prix unitaires de ces deux biens et on désigne par $x_1$et x_2 les quantités consommées. On suppose : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. Les préférences de ce ménage sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(x_1,x_2) = 3Logx_1 + x_2$$

1.1. En utilisant le théorème de Kuhn-Tucker, déterminez les demandes Walrasiennes de ces deux biens. Montrez en particulier que si $R > 3p_2$, $x_1(p_1,p_2,R) = \frac{3p_2}{p_1}$ et $x_2(p_1,p_2,R) =$

$\frac{R}{p_2} - 3$. Representez la courbe d'Engel du bien 1 et calculez les élasticités prix et revenu pour chacun des biens.

1.2. Déterminez la fonction d'utilité indirecte $V(p_1, p_2, R)$ de ce ménage. Que peut-on déduire des identités de Roy ?

1.3. Déterminez la fonction dépense $e(p_1, p_2, u)$ de ce ménage.

1.4. On suppose dorénavant que $p_2 = 1$ et $R > 3$. Représentez sur un graphique la fonction de demande inverse de bien 1 de ce ménage et calculez les variations de surplus de ce ménage (ici vous noterez que nous parlons de variations de surplus car l'aire sous la courbe de demande inverse est infinie). Expliquez pourquoi une variation de surplus consécutive à une variation de p_1 *mesure exactement* la variation de bien être de ce ménage en unités de revenu.

1.5. Le gouvernement décide d'imposer un taxe unitaire indirecte d'un montant t_1 sur la consommation du bien 1. Quel est le montant des recettes fiscales collectées ? Quelle est la perte de bien être de ce ménage ? Quelle compensation financière devrait recevoir ce ménage pour retrouver son niveau de vie antérieur ? Ce montant coincide t-il avec les recettes du gouvernement ? Pourquoi ?

2. On considére un second ménage disposant d'un revenu R' consacré également à l'achat des biens 1 et 2. On désigne par y_1 et y_2 les quantités consommées des deux biens. Les préférences de ce ménage sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U'(y_1, y_2) = y_1^3 y_2$$

2.1. En utilisant le théorème de Kuhn-Tucker, déterminez les demandes Walrasiennes de ces deux biens.

2.2. On suppose dorénavant que $p_2 = 1$. Représentez sur un graphique la fonction de demande inverse de bien 1 de ce ménage et calculez les variations de surplus de ce ménage. Expliquez pourquoi une variation de surplus consécutive à une variation de p_1 *ne mesure pas exactement* la variation de bien être de ce ménage en unités de revenu.

2.3. Dans le contexte de la politique fiscale introduite à la question 1.5., comment calculer la compensation financière que devrait recevoir ce ménage pour retrouver son niveau de vie antérieur ?

PROBLEME 12 (Aix, Septembre 2002)

On considère un ménage dont les préférences portent sur la consommation et le temps consacré aux activités non professionnelles (appelé temps de loisir). On représente par un bien unique la consommation de ce ménage et on note C le volume de cette consommation.

On note T le temps de loisir et on suppose que ce ménage peut travailler pendant une durée maximale posée égale à 1.

Le revenu de ce ménage est composé de son revenu salarial et d'une prestation sociale de l'état dont le montant est noté A. On note w le taux de salaire unitaire et on suppose que le prix du bien de consommation est égal à 1. Les préférences du ménage sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(C,T) = \sqrt{C} + \alpha\sqrt{T}$$

où α est un paramètre positif.

1. Déterminez l'offre de travail Walrasienne de ce ménage en fonction de w et A.

2. Le gouvernement introduit une imposition sur les revenus salariaux à taux fixe, noté t. Quel est l'impact de cette politique sur l'offre de travail ?

3. On suppose qu'il y dans l'économie deux types de ménages qui ne diffèrent que par le taux de salaire unitaire en raison de différences dans leurs qualifications respectives. On note respectivement w_1 et w_2 les taux de salaire unitaires dans les deux groupes et on suppose $w_1 < w_2$. On suppose que le gouvernement veut venir en aide aux ménages du groupe 1 en imposant à taux fixe le revenu salarial des ménages du groupe 2 et en versant le produit de ces recettes aux ménages du groupe 1 sous la forme d'un forfait.

On note respectivement n_1 et n_2 le nombre de ménages dans chacun des deux groupes, t le taux d'imposition qui s'applique aux ménages du groupe 2 et A la prestation reçue par les ménages du groupe 1. Ecrivez la contrainte budgétaire du gouvernement. **Y a t-il d'autres contraintes auxquelles ce gouvernement pourrait faire face dans la mise en oeuvre d'une telle politique ?**