

# Dispatching, redispatching et effacement de demande

Claude Crampes<sup>\*</sup>, Thomas-Olivier Léautier<sup>\*\*</sup>

Institut D'Economie Industrielle

Septembre 2010

## Synthèse :

Grâce au développement de « réseaux intelligents » les consommateurs d'électricité vont progressivement devenir de véritables acteurs des marchés de l'électricité, notamment en utilisant leur capacité d'effacement. Pour que cette transition vers un marché plus dynamique soit rapide et efficiente, il faut que les règles de quantification et de rémunération des droits des consommateurs participant activement aux marchés de l'électricité permettent de décentraliser le dispatching qui est optimal pour la collectivité. Il faut en particulier que :

- i)* les options d'effacement de consommation rémunérées fassent l'objet d'une acquisition payante, le prix payé étant le prix (ou le tarif) de l'électricité consommée ;
- ii)* les sommes versées pour l'acquisition des droits, au comptant ou à terme, soient un revenu pour les producteurs d'énergie, qu'ils soient défaillants ou retirés du dispatching par le gestionnaire du système suite à un effacement;
- iii)* les consommateurs effacés soient rémunérés au prix du marché;
- iv)* la rémunération des effacements soit à la charge des producteurs défaillants et des consommateurs excessifs;
- v)* le volume des droits à l'effacement alloués à chaque consommateur soit calculé en tenant compte de son comportement stratégique, notamment de sa capacité à manipuler les informations sur son profil de consommation et de ses possibilités de modifier son profil.

---

\* [ccrampes@cict.fr](mailto:ccrampes@cict.fr)

\*\* [leautier@cict.fr](mailto:leautier@cict.fr)

## Introduction

Comme toutes les autres industries, l'industrie électrique s'est structurée sur la base des caractéristiques physico-économiques de son produit. La nécessité d'équilibrer le système en temps réel à cause de la non stockabilité de l'électricité est certainement la principale explication de l'intégration verticale du secteur, incontournable à la naissance de l'industrie et qui perdure malgré les efforts des autorités nationales et communautaires. C'est également la non stockabilité qui explique le rôle secondaire accordé à la demande dans le processus d'équilibrage du système électrique. Mais le développement des Technologies de l'Information et de la Communication (TIC) pour former des « réseaux intelligents » laisse penser que les choses vont évoluer à moyen terme, donnant aux consommateurs un rôle plus actif, donc rendant l'ensemble du système plus efficient.

L'équilibrage du système électrique s'est d'abord fait de façon centralisée :

- par délestages massifs, coupures tournantes et délestages sélectifs, méthodes qui restent le vécu quotidien de bon nombre de pays en développement;
- par l'installation de réserves opérationnelles appelées pour garantir une certaine sécurité d'approvisionnement, souvent définie en termes de durée de coupure.

Avec l'augmentation de la demande de gros consommateurs intéressés par un meilleur contrôle de leur facture énergétique et dont le soutirage a un impact significatif sur la demande totale, on a vu naître les coupures négociées dont l'exemple le plus connu est le contrat Effacement Jours de Pointe. C'est alors la valeur d'usage de l'électricité qui donne un signal de coupure sélective. En négociant un contrat de fourniture à prix réduit (par rapport à un contrat sans effacement) le producteur d'électricité achète une option sur la production de mégawattheures qui lui coûte moins cher que la production des mégawattheures supplémentaires qui seraient nécessaires au bouclage du système sans effacement. De son côté le consommateur effaçable règle une facture moins élevée et prévoit une solution de remplacement pour les périodes où il n'est pas servi.

En réalité les réserves d'effacement sont bien plus considérables que les capacités proposées par les gros consommateurs. Tout consommateur est potentiellement effaçable pour des dates, durées et volumes variables selon son équipement et ses besoins. L'obstacle est le coût de mise en œuvre. Aujourd'hui l'installation de boîtiers de télécommande confiant les

clefs des équipements de consommation à un fournisseur d'effacement permet de contourner cet obstacle. Il est donc devenu techniquement possible de réaliser des effacements diffus à grande échelle. Et pour satisfaire aux contraintes environnementales et aux exigences d'économie d'énergie, une participation active des consommateurs, en particulier sous la forme d'effacements volontaires rétribués, est de plus en plus considérée comme politiquement souhaitable.<sup>1</sup>

Mais il est des remèdes qui tuent le malade quand ils sont mal prescrits et mal administrés. Le système ne fonctionnera bien que si l'on crée pour les effacements diffus un cadre réglementaire qui réponde aux critères d'efficacité économique, donc qui donne au gestionnaire du système un classement fiable et véridique des disponibilités de production, de consommation et de non-consommation classées par ordre de préséance. C'est à l'analyse des principes économiques qui doivent servir de fondement au cadre réglementaire des effacements volontaires de demande qu'est consacré cette étude.

La section 1 rappelle que les marchés de l'électricité ont beaucoup de traits communs avec tous les autres marchés, auxquels il faut ajouter quelques spécificités essentielles, notamment la non stockabilité. Les mécanismes habituels d'offre et de demande qui règlent les transactions doivent donc être complétés de règles strictes en matière de résolution des conflits et des déséquilibres.

Dans la section 2, nous abordons le problème des effacements volontaires quand il y a une demande saisonnière et qu'il est impossible d'appliquer la tarification optimale, c'est-à-dire un prix changeant de date en date. Aux périodes de pointe, le prix de détail non saisonnier est trop bas et conduit à une consommation excessive. On montre que la possibilité d'exercer une option d'effacement permet d'approximer la production optimale en pointe, à condition que cette option soit acquise au prix de détail et rémunérée au prix spot optimal. Les consommateurs effaçables apparaissent alors comme des vendeurs de NWh et les producteurs dispatchés à un coût marginal supérieur au prix de détail en sont les demandeurs.

La section 3 traite de la résolution d'un déséquilibre (un producteur dispatché défaillant) en combinant la production supplémentaire de centrales placées en réserve et de

---

<sup>1</sup> Selon la Federal Energy Regulatory Commission, "the Standard Market Design should and will allow demand resources ... to participate fully in energy, ancillary services and capacity markets, and the demand side ... to participate in the real-time market." FERC (2002) *Working Paper on Standardized Transmission Service and Wholesale Electric Market Design*, March.

En France, le projet de loi NOME (version Assemblée nationale 9 juin 2010) prévoit dans son article 2 que "Chaque fournisseur d'électricité doit disposer de garanties directes ou indirectes de capacités d'effacement de consommation et de production d'électricité pouvant être mises en oeuvre pour satisfaire l'équilibre entre la production et la consommation ... notamment lors des périodes où la consommation de l'ensemble des consommateurs est la plus élevée..."

consommation réduite par effacement volontaire. Dans cette configuration où les consommateurs effaçables et les producteurs placés en réserve ne sont plus des partenaires mais des concurrents, on montre que ce sont les mêmes principes économiques que dans la situation précédente de dispatch équilibré qui règlent les échanges. En particulier les consommateurs doivent payer au prix spot les options d'effacement qu'ils exercent et qui sont rémunérées au prix du marché d'ajustement. Les entreprises à l'origine du redispatching doivent donc acquérir au prix du marché d'ajustement (versé aux consommateurs effacés et aux réserves appelées) l'électricité qu'elles vendent au prix spot.

Dans la section 4 nous abordons, sans le résoudre explicitement, le problème beaucoup plus compliqué de la quantification des capacités d'effacement. Au moment de la souscription de son contrat de fourniture d'énergie, le consommateur anticipe rationnellement qu'il va pouvoir utiliser une partie de l'énergie souscrite non pas pour la consommer mais pour toucher le prix de l'effacement. Avec des contrats à prix linéaire, il se produit une souscription excessive, seulement limitée par le coût des équipements d'effacement et par l'aversion au risque des consommateurs. Pour réduire les comportements stratégiques (sélection adverse et hasard moral) les vendeurs d'électricité au détail devraient offrir des contrats de souscription non linéaires, proposant de fournir l'énergie par tranches, chaque tranche contenant un couple variable de prix et de garantie d'approvisionnement. Les consommateurs pourraient ainsi s'auto-sélectionner et révéler leur information privée sur l'intensité véritable de leur besoin en électricité. L'information révélée par ce type de contrat serait évidemment d'une grande valeur pour le fournisseur du service d'effacement.

## **1. Offre et demande sur le marché de l'électricité**

Les autorités européennes ont décidé à partir de 1996 de faire entrer le secteur énergétique dans le champ de l'économie de marché. C'est donc en se basant sur les principes de la concurrence que doit s'organiser l'équilibrage de l'ensemble des interventions des acteurs appartenant à un même système électrique. Et la concurrence doit être encadrée pour que les transactions sur le marché soient aussi proches que possible de celles qui sont optimales pour la collectivité.

Pour ce qui est de la première condition, il faut que chaque producteur base ses décisions sur la comparaison de son coût marginal avec le prix de vente, et que chaque

consommateur base ses décisions sur la comparaison de son utilité marginale avec le prix d'achat. Chaque transaction a donc un prix et c'est par le règlement (au comptant ou à terme) de ce prix que s'acquièrent les droits et se prennent les engagements des acheteurs et des vendeurs

La deuxième condition implique que le prix de vente reflète l'utilité marginale et que le prix d'achat reflète le coût marginal. En d'autres termes, il est essentiel que le prix transmette à chaque acteur du marché une information fiable sur ce que ses actions provoquent de l'autre côté du marché. A l'équilibre du marché on a ainsi l'égalité entre coût marginal et utilité marginale, condition de la maximisation du surplus collectif.

Au-delà de ces conditions très générales, il faut prévoir des règles particulières imposées par la spécificité du produit. Notamment, sur les marchés de l'électricité plus qu'ailleurs, les offres et les demandes doivent être liantes. En effet, comme le produit n'est pas stockable, tout désistement et tout dépassement d'un producteur ou d'un consommateur par rapport aux quantités proposées à la vente ou à l'achat et enregistrées par le commissaire du marché comporte des effets déstabilisateurs très importants pour l'ensemble du système. Donc le droit de changer son offre ou sa demande doit se payer au coût de restauration de l'équilibre du système. Ce coût, et donc le prix à payer, est généralement d'autant plus élevé que le changement était imprévisible et qu'on se rapproche de la date de dénouement des transactions. A plus d'un jour le coût est assez faible, à moins d'une heure il très élevé.

C'est dans le respect de ces principes que les effacements volontaires de consommation doivent être développés. Qu'il s'agisse d'effacements cycliques destinés à participer régulièrement à l'équilibrage du système électrique (en particulier aux heures de pointe) ou qu'il s'agisse d'effacements exceptionnels visant à résoudre à très court terme une situation de crise, leur mise en œuvre doit avoir un but et un seul : la maximisation du surplus collectif de l'industrie. Quand il y a des coûts fixes importants, les règles de rémunération doivent aussi prendre en compte la viabilité financière des opérateurs, donc décentraliser un optimum de second rang. L'ouverture de marchés de capacité apportera un complément de la rémunération de l'énergie, ce qui devrait améliorer l'efficacité du système en transmettant des signaux plus clairs sur les besoins différenciés par technologies, y compris les technologies d'effacement.

## 2. Rémunération des effacements volontaires en vue d'approcher la tarification optimale

Dans un article de *The Electricity Journal*, Janvier-Février 2010, Hung-po Chao<sup>2</sup> étudie dans quelle mesure les programmes de rémunération des effacements volontaires permettent de combler l'écart entre le système de prix de détail uniforme et le système de prix variables optimaux quand la demande est cyclique.

Dans la Figure 1, le coût marginal du système est la fonction croissante  $C'(q)$  et il y a deux régimes de demande (d'utilité marginale) représentés par  $U_1'(q)$  pour les périodes de pointe et  $U_2'(q)$  pour les périodes hors pointe<sup>3</sup>.

Le dispatching optimal consiste à produire la quantité  $q_1^*$  vendue au prix  $p_1^*$  à la période de pointe et la quantité  $q_2^*$  vendue au prix  $p_2^*$  à la période hors pointe. Mais ces prix ne sont pas décentralisables si les consommateurs n'ont pas d'équipement électronique pour les informer des fluctuations du marché de gros.<sup>4</sup>

Donc, le prix optimal à facturer au consommateur est un prix de détail de second rang invariant dans le temps  $\bar{p}$ , obtenu en maximisant le surplus collectif sous contrainte de tarification uniforme.<sup>5</sup> Ce prix se situe nécessairement entre les prix spot optimaux  $p_1^*$  et  $p_2^*$ . Il est d'autant plus proche de  $p_2^*$  qu'il y a peu de périodes de pointe et que les pertes de surplus à la pointe sont faibles relativement à celles provoquées hors pointe. En effet, le prix uniforme  $\bar{p}$  équilibre deux pertes d'efficience : *i*) celle représentée par la surface hachurée  $A$ ; hors pointe la production  $\bar{q}_2$  est insuffisante puisque les unités  $q_2^* - \bar{q}_2$  dont l'utilité est supérieure au coût ne sont pas produites; *ii*) la perte sociale représentée par la surface  $B$  aux

---

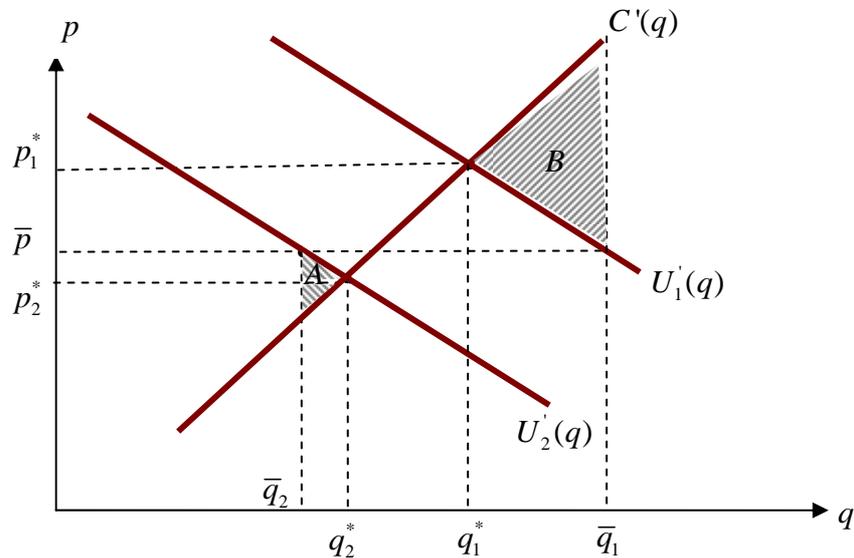
<sup>2</sup> Hung-po Chao (2010), « Price-responsive demand management for a smart grid world », *The Electricity Journal*, Jan/Feb., vol. 23, Issue 1, p. 7-20.

<sup>3</sup> Les notions d'utilité marginale du système, de coût marginal du système et de dispatching optimal sont détaillées dans l'Annexe 1.

<sup>4</sup> Les abonnements qui proposent des prix variables selon les jours et les heures d'utilisation (par exemple l'option Tempo constituée de 6 prix différents pour une puissance souscrite donnée) permettent d'approximer la variabilité horo-saisonnière des prix de gros, mais ce n'est qu'une approximation qualitative puisque les prix de détail sont fixés à l'avance. La veille pour le lendemain, le consommateur abonné est informé de la couleur du jour (22 jours rouges de pointe) mais les heures pleines sont toujours les mêmes, de 6h à 22h.

<sup>5</sup> Nous supposons que la demande au prix  $\bar{p}$  doit être servie et négligeons donc l'autre solution extrême qui consisterait à organiser un rationnement à hauteur de  $\bar{q}_1 - C'^{-1}(\bar{p})$ .

périodes de pointe, car chaque unité dans l'intervalle  $\bar{q}_1 - q_1^*$  a un coût supérieur à son utilité; il est donc inefficace de les produire.



**Figure 1 : Dispatching optimal et dispatching contraint par un prix uniforme**

Supposons maintenant que les consommateurs puissent s'effacer, c'est-à-dire consommer une quantité  $q_t^c$  inférieure à  $\bar{q}_t$  à la période  $t = 1, 2$ . Quel prix faut-il leur faire payer pour l'énergie consommée et pour l'énergie non consommée? Comment rémunérer l'effacement pour que le marché pousse les consommateurs à se rapprocher du niveau de production optimal  $q_t^*$ ?

La solution préconisée dans certains marchés américains et soutenue en France par la société Voltalis est dérivée des protocoles d'effacement entre compagnies verticalement intégrées:

- \* les consommateurs équipés pour être effacés ne payent  $\bar{p}$  que sur la quantité  $q_t^c$  effectivement consommée;

- \* la quantité non consommée  $\bar{q}_t - q_t^c$  est rémunérée au prix d'équilibre du marché spot  $p_t$ .

Il est facile de montrer que cette solution n'est pas efficiente. En effet, avec ces rémunérations les consommateurs effaçables choisissent leur niveau de consommation de la période  $t$  en résolvant

$$\max_{q_t} U_t(q_t) + p_t(\bar{q}_t - q_t) - \bar{p}q_t$$

Donc  $q_t^c$  est la solution de

$$U_t'(q_t^c) = p_t + \bar{p}$$

Puisque la fonction  $U_t'$  est décroissante, la quantité que veulent consommer les consommateurs effaçables est trop petite par rapport au niveau qui, pour un consommateur réactif au prix, devrait être simplement déterminée par le prix de l'énergie  $p_t$ . En ne faisant payer le prix de détail  $\bar{p}$  que sur la quantité effectivement consommée, on donne gratuitement<sup>6</sup> au consommateur effaçable le droit de gagner  $p_t$  sur chaque kWh non consommé en deçà de son profil  $\bar{q}_t$ .

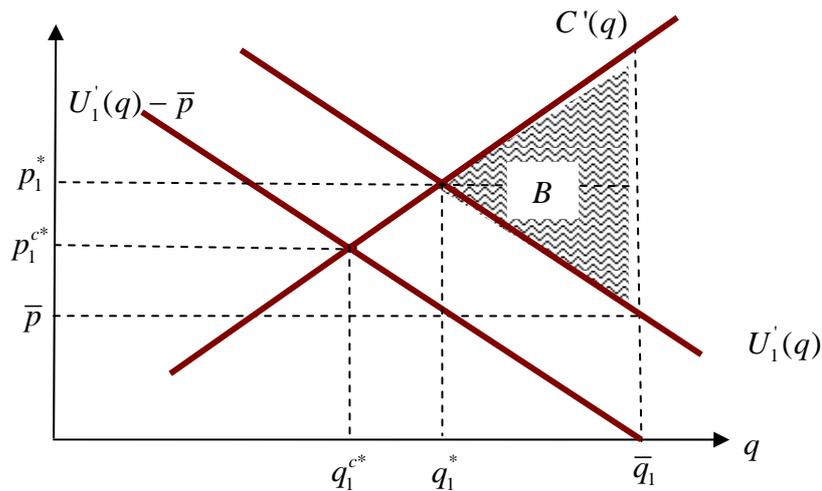
Une autre façon d'expliquer ce résultat est que le consommateur fait face à un double coût quand il veut consommer de l'électricité: il paie le prix du kWh consommé  $\bar{p}$  et il sacrifie le gain  $p_t$  que lui procurerait l'effacement de ce kWh. Vu de façon symétrique, c'est ce que les auteurs comme Chao (2010) appellent la double rémunération de l'effacement: la vente de négawattheures rapporte  $p_t$  et évite de payer  $\bar{p}$ .

En utilisant la condition de premier ordre établie précédemment, à la période  $t$  la fonction inverse de demande d'électricité destinée à la consommation des agents effaçables est  $p_t = U_t'(q_t^c) - \bar{p}$ . Si tous les consommateurs sont effaçables, c'est aussi la demande totale d'électricité à la période  $t$ . Le croisement de cette fonction de demande translatée vers le bas et de la fonction de coût marginal du système donne la consommation à l'équilibre avec effacement  $q_t^{c*}$ . Comme le montre la figure 2 pour le cas des heures de pointe, on a alors  $q_1^{c*} < q_1^*$ .

---

<sup>6</sup> Comme l'écrit Larry Ruff (2002) dans "Economic principles of demand response in electricity", *Edison Electric Institute*, Washington DC, "Normal markets allow consumers to sell what they do not consume as long as they own it, but no rational market pays consumers for not consuming what they do not own, even if they can prove that they would have bought it but didn't."

Voir aussi William W. Hogan (2009), "Providing Incentives for Efficient Demand Response", prepared for Electric Power Supply Association, Comments on PJM Demand Response Proposals, *Federal Energy Regulatory Commission*, Docket No. EL09-68-000.



**Figure 2 : Effacement excessif dû à la gratuité des droits.**

On a bien obtenu une baisse de la consommation comme on le souhaitait, mais la baisse est trop importante et provoque un effet dépressif sur le prix spot de  $p_1^*$  à  $p_1^{c*}$ . Encore plus inefficace, en faisant jouer le même mécanisme il est facile de voir qu'il se produit aussi une réduction de consommation aux heures hors pointe, alors que le volume de consommation était déjà sous-optimal. Au total l'introduction d'une rémunération des effacements provoque une perte d'efficacité par rapport à la performance du système avec prix de détail uniforme et pas d'effacement.

Il n'y a pas d'effacement excessif (= de consommation insuffisante) si les consommateurs doivent acheter au prix  $\bar{p}$  la totalité de leur profil de consommation  $\bar{q}_t$ , en pointe comme hors pointe, donc non seulement la quantité consommée mais aussi la quantité qui sera effacée.<sup>7</sup> Lorsqu'il en est ainsi, à la période  $t$  le problème s'écrit

$$\max_{q_t} U(q_t) + p_t(\bar{q}_t - q_t) - \bar{p}\bar{q}_t$$

dont la solution est

$$U'(q_t) = p_t.$$

La demande d'électricité reflète alors fidèlement son utilité marginale comme l'exige la décentralisation de l'optimum collectif, et l'équilibre du marché est bien atteint pour le volume optimal  $q_t^*$ .

<sup>7</sup> C'est la solution préconisée par la Commission de Régulation de l'Énergie dans sa "Délibération du 9 juillet 2009 portant communication sur l'intégration des effacements diffus au sein du mécanisme d'ajustement".

En fait, ceci n'est vrai que pour  $t=1$ . Aux périodes hors pointe où  $\bar{p} > p_2^*$ , les consommateurs ne vont pas exercer leurs droits d'effacement puisque, en plus de la perte d'utilité nette due à une consommation inférieure, ils vendraient leurs droits moins cher que ce qu'ils les payent.<sup>8</sup> Bien au contraire, il serait efficient qu'ils disposent de "droits à dépassement", c'est-à-dire qu'ils puissent acheter et consommer plus d'électricité, idéalement au prix de gros  $p_2^*$  qui permettrait d'atteindre le volume optimal  $q_2^*$ .

L'obligation de payer pour acquérir des droits d'effacement résout donc le problème d'inefficience à profil donné quand la consommation au prix de détail est supérieure à la consommation optimale. Mais comment se comportent les consommateurs s'ils internalisent le fait que, en choisissant  $\bar{q}_1$  et  $\bar{q}_2$ , ils acquièrent le droit de s'effacer contre rémunération? Nous discutons ce problème dans la section 4.

Dans le modèle de dispatching avec droits d'effacement acquis au prix de détail et rémunérés au prix de gros, le règlement financier des opérations est facile à établir pour  $t = 1$ :

\* tous les consommateurs retenus dans le dispatching correspondant à la quantité  $\bar{q}_1$  paient  $\bar{p}$  pour chaque unité du profil de consommation  $\bar{q}_1$ ;

\* toutes les entreprises retenues dans le dispatching correspondant à la quantité  $\bar{q}_1$  perçoivent  $\bar{p}$  pour chaque unité du profil de production  $\bar{q}_1$ ;

\* les producteurs situés entre  $q_1^*$  et  $\bar{q}_1$  dans l'ordre de préséance versent  $p_1^*$  par unité pour racheter leur obligation de production;

\* les consommateurs situés entre  $q_1^*$  et  $\bar{q}_1$  dans l'ordre de préséance perçoivent  $p_1^*$  par unité effacée pour abandonner leur droit de soutirage.

Aux prix  $p_1^*$  et  $\bar{p}$ , l'opération d'effacement est à la fois efficiente et acceptable par les deux parties parce que, comme on le voit bien sur la figure 2,

$$\int_{q_1^*}^{\bar{q}_1} C'(q) dq > p_1^* (\bar{q}_1 - q_1^*) > \int_{q_1^*}^{\bar{q}_1} U'(q) dq$$

ou, en valeur nette

---

<sup>8</sup> Alors que dans le cas de droits distribués gratuitement nous avons vu que, puisque  $p_2^* > 0$ , les porteurs de droits ont intérêt à réduire leur consommation également hors pointe.

$$-\left[ \bar{p}(\bar{q}_1 - q_1^*) - \int_{q_1^*}^{\bar{q}_1} C'(q) dq \right] > (p_1^* - \bar{p})(\bar{q}_1 - q_1^*) > \int_{q_1^*}^{\bar{q}_1} U'(q) dq - \bar{p}(\bar{q}_1 - q_1^*)$$

La première inégalité dit que la perte financière que les producteurs d'électricité subiraient s'ils devaient servir le segment de clientèle  $\bar{q}_1 - q_1^*$  au prix  $\bar{p}$  est supérieure à leur dépense nette quand ils rétribuent les ménages pour qu'ils s'effacent; la seconde dit que le revenu net des ménages effacés est supérieur à l'utilité nette qu'ils obtiendraient en consommant la quantité  $\bar{q}_1 - q_1^*$  au prix  $\bar{p}$ .

Enfin il n'y a pas de règlement financier aux périodes creuses puisqu'il n'y a pas d'effacement en deçà de  $\bar{q}_2$ , ce qui est bien en ligne avec l'allocation efficiente de la consommation.

### 3. Rémunération des effacements en vue de résoudre un déséquilibre imprévu

Nous avons vu dans la section précédente que pour équilibrer le marché aux périodes où le prix spot dépasse le prix de détail, les producteurs et les consommateurs sont des partenaires commerciaux, les premiers comme demandeurs et les seconds comme offreurs d'effacement. Mais ils deviennent des concurrents quand il s'agit d'offrir ses services dans une opération de redispatching rendue nécessaire pour rééquilibrer le système après une défection.

Oublions l'aspect cyclique du bouclage de l'équilibre tel qu'analysé par Chao pour nous concentrer sur le rôle des effacements dans un redispatching destiné à corriger la défaillance d'un producteur figurant dans l'ordre de mérite arrêté initialement<sup>9</sup>.

Nous nous plaçons dans la situation où la demande n'est pas saisonnière et abandonnons donc les indices de période 1 et 2. Le gestionnaire du système électrique arrête le dispatch optimal au niveau  $q^*$ . Mais postérieurement à cette décision, il apparait que les producteurs qui devaient fournir la tranche  $[q, q + D]$  avec  $q + D < q^*$  sont défaillants. Comment redispatcher ?

#### 3.1 Redispatching optimal

Si le déficit de production est le seul élément nouveau à prendre en compte, le redispatching est la solution de

$$\max_{q^c, q^g} \int_0^{q^c} U'(q) dq - \left[ \int_0^q C'(q) dq + \int_{q+D}^{q^g} C'(q) dq \right]$$

sous la contrainte  $\int_0^{q^c} dq = \int_0^q dq + \int_{q+D}^{q^g} dq$

c'est-à-dire  $q^c = q^g - D$ .

En utilisant  $q^c$  comme variable de décision, on cherche donc

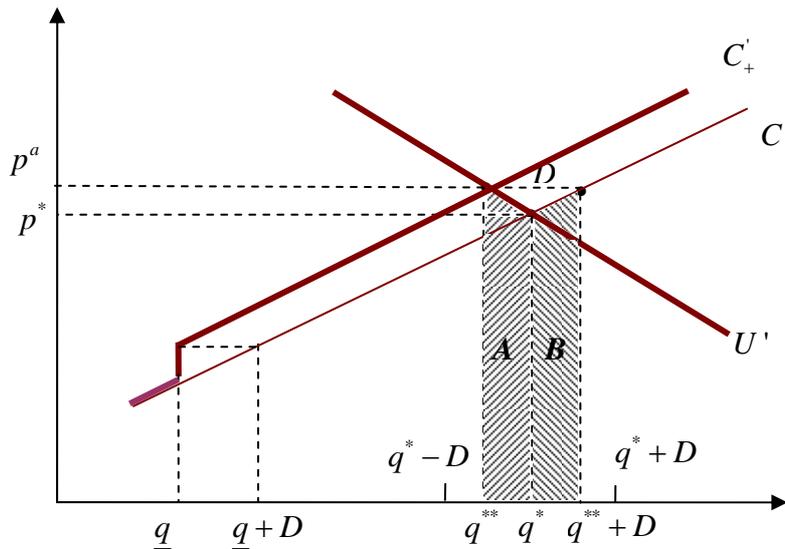
$$\max_{q^c} \int_0^{q^c} U'(q) dq - \int_0^q C'(q) dq - \int_{q+D}^{q^c+D} C'(q) dq$$

<sup>9</sup> Le cas dans lequel le redispatching s'impose à cause d'un excès de demande est traité dans l'Annexe 3.

dont la solution est la quantité  $q^{**}$  déterminée par

$$U'(q^{**}) = C'(q^{**} + D)$$

La figure 3 illustre ce résultat.



**Figure 3 : Redispaching optimal à la suite de la défaillance d'un producteur**

La production manquante  $D$  place le gestionnaire du système face à un ordre de préséance des producteurs "décalé vers la gauche", donc un coût marginal du système "décalé vers le haut", de  $C'(q)$  à  $C'_+(q)$  à partir de la quantité  $\underline{q}$ .

Par rapport à  $q^*$ , le redispaching provoque un double ajustement :

- la consommation est réduite de  $q^*$  à  $q^{**}$
- la production est accrue de  $q^*$  à  $q^{**} + D$

On remarquera la parfaite symétrie des deux ajustements : la production est accrue dans l'ordre de préséance en appelant les centrales qui ont le coût relatif le plus faible et la consommation est réduite dans l'ordre de préséance en ne servant pas les usages dont l'utilité relative est la plus faible.

En termes de surplus, on observe

- une perte d'utilité  $\int_{q^{**}}^{q^*} U'(q) dq$  (surface  $A$ )
- un surcoût  $\int_{q^*}^{q^{**}+D} C'(q) dq$  (surface  $B$ )
- une économie de coût  $\int_{\underline{q}}^{q^{**}+D} C'(q) dq$

Puisque le gestionnaire du système est obligé de se passer d'unités de production qui étaient placées en bon rang dans l'ordre de préséance pour produire  $D$ , au total on a bien sûr une perte collective d'efficacité représentée par la variation du surplus collectif

$$L^{**} \stackrel{def}{=} W^* - W^{**} > 0.$$

### 3.2 Redispatching contraint

Il peut arriver que le redispatching doive se faire en prenant en compte de contraintes supplémentaires. Nous considérons successivement le cas d'une consommation impossible à diminuer et le cas d'une production impossible à augmenter.

- Si la consommation à servir est obligatoirement  $q^*$ , le dispatcher n'a d'autre choix que de faire appel à des centrales "mal classées" dans le dispatch initial jusqu'à atteindre le niveau  $q^* + D$ . La perte sociale est plus importante que dans le cas précédent puisque le redispatching se fait sous une contrainte supplémentaire. Géométriquement, dans la figure 3 la surface  $A$  est réduite à 0 et la surface  $B$  est agrandie jusqu'à l'abscisse  $q^* + D$ . Comme le coût marginal est croissant et l'utilité marginale décroissante, ce surcoût  $\int_{q^{**}+D}^{q^*+D} C'(q) dq$  est plus élevé que le gain d'utilité  $\int_{q^{**}}^{q^*} U'(q) dq$  représenté par la surface  $A^{10}$ .
- Si la production ne peut pas être augmentée après l'annonce de la défection  $D$ , on ne peut que réduire la consommation de  $q^*$  à  $q^* - D$ . La perte collective d'efficacité est alors

---

<sup>10</sup> Notons que l'économie de coût due à l'arrêt des centrales qui étaient initialement classées entre  $\underline{q}$  et  $\underline{q} + D$  apparaît dans toutes les solutions. On doit donc la négliger quand on fait des comparaisons de performance.

exclusivement représentée par l'utilité non créée  $\int_{q^*-D}^{q^*} U'(q) dq$  représentée par la surface  $A$  étendue vers la gauche jusqu'à l'abscisse  $q^* - D$ .

La solution consistant à combiner réduction de consommation et accroissement de production est génériquement meilleure que celle qui consisterait à ne recourir qu'à l'une des deux possibilités. Cependant on voit sur le graphique 3 que la bonne dose des deux ajustements dépend des pentes relatives des courbes  $U'$  et  $C'$ . Ainsi, si au voisinage de  $q^*$ , la courbe  $U'$  est très pentue et/ou si la courbe  $C'$  est quasi horizontale, il est optimal de ne pas réduire la consommation et de s'en remettre exclusivement à une production de remplacement. Réciproquement, si au voisinage de  $q^*$  le coût marginal est très fortement croissant et/ou la courbe  $U'$  quasi horizontale, la solution optimale passe essentiellement par une réduction de consommation.

### **3.3 Ordre de préséance dans le dispatching et dans le redispatching**

Dans le modèle utilisé ci-dessus, l'ordre de préséance de l'offre et l'ordre de préséance de la demande sont identiques sur le marché du lendemain et sur le marché d'ajustement. En réalité, il existe une différence importante entre les deux marchés : les délais de réaction des agents. Alors que sur le marché du lendemain tous les agents sont potentiellement candidats, seuls peuvent intervenir pour les opérations d'ajustement (qui souvent se décident avec un délai inférieur à 60 minutes) les agents qui maîtrisent des technologies flexibles. Pour les consommateurs, ce sont évidemment ceux qui sont prêts à s'effacer face à un prix d'achat du négawatt-heure attractif, soit directement parce qu'ils sont équipés bi-énergie et surveillent l'évolution du marché, soit indirectement parce qu'ils ont confié les clefs de leur installation de consommation à un fournisseur d'effacements. Côté producteurs, ce sont les hydro-électriciens mis en réserve et les centrales thermiques déjà opérationnelles mais non dispatchées car trop coûteuses dans l'ordre initial.

Cela ne change pas fondamentalement les résultats précédents. Il faut cependant faire attention aux tentatives de manipulation du prix d'ajustement puisque le nombre de

participants est réduit par cette contrainte de disponibilité sur le marché d'ajustement. Il faut en particulier surveiller le fournisseur d'effacement qui, en quelque sorte, organise et contrôle une entente entre un grand nombre de producteurs de NWh. On est cependant encore loin d'une capacité d'effacement susceptible de donner une position dominante collective.

### 3.4 Mise en œuvre du redispatching par des mécanismes de marché

La décentralisation par le marché du mécanisme optimal décrit ci-dessus obéit évidemment aux mêmes principes que ceux que nous avons vus dans la section 2. Nous n'en reprenons donc pas la démonstration.

Cependant, la façon dont les comptes financiers des différents agents sont affectés par cet ajustement est un peu plus complexe que dans le cas où les effacements font partie du dispatch initial. Pour mettre en lumière ce processus, nous supposons que les flux financiers transitent par le compte du gestionnaire du système, qui ne doit évidemment retirer aucun gain *in fine* de cette opération de redispatching.

Auparavant, il est important d'insister sur le fait qu'il s'agit ici d'un redispatching, c'est-à-dire d'un ajustement réalisé après que le dispatch initial  $q^*$  a été arrêté. Si la défaillance  $D$  est connue *ex ante*, l'équilibre du marché de l'électricité est atteint au prix qui est payé par tous les consommateurs et reçu par tous les producteurs appelés. Quant aux producteurs défaillants, ils sont simplement retirés de l'ordre de préséance sans autre conséquence.

En revanche, quand la défaillance  $D$  se produit après le dispatching de  $q^*$ , il faut prendre en compte les engagements des uns et des autres pour régler les recettes et les dépenses du redispatching. Les transactions arrêtées initialement se règlent au prix  $p^* = U'(q^*) = C'(q^*)$  et seul le volume  $D$  se règle au prix du marché de l'ajustement  $p^a = U'(q^{**}) = C'(q^{**} + D)$  (voir la Figure 3).

**Producteurs dispatchés non défaillants**

Dépense	Gain
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_0^{q^*} C'(q) dq</math></li> <li><math>\int_{q^*+D}^{q^*} C'(q) dq</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p^*(q^* - D)</math></li> </ul>

**Producteurs dispatchés défaillants**

Dépense	Gain
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p^a D</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p^* D</math></li> </ul>

**Producteurs appelés pour l'ajustement**

Dépense	Gain
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_{q^*}^{q^{**}+D} C'(q) dq</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p^a (q^{**} + D - q^*)</math></li> </ul>

**Consommateurs dispatchés**

Dépense	Gain
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p^* q^{**}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\int_0^{q^{**}} U'(q) dq</math></li> </ul>

**Consommations effacées**

Dépense	Gain
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p^*(q^* - q^{**})</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p^a (q^* - q^{**})</math></li> </ul>

**Gestionnaire du système**

Dépense	Gain
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p^*(q^* - D)</math></li> <li><math>p^a (q^{**} + D - q^*)</math></li> <li><math>p^a (q^* - q^{**})</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p^a D</math></li> <li><math>p^* q^{**}</math></li> <li><math>p^*(q^* - q^{**})</math></li> </ul>
$p^* D$	

Le compte des producteurs dispatchés non défaillants se comprend aisément : ils produisent ce qu'ils s'étaient engagés à vendre au prix du dispatch initial  $p^*$ . Les consommateurs dispatchés sont en capacité de consommer  $q^*$  qu'ils payent au prix unitaire  $p^*$ , mais ils ne consomment que  $q^{**}$ . Les producteurs classés initialement entre  $q^*$  et  $q^* + D$

sont appelés pour remplacer (partiellement) les producteurs défaillants qui étaient classés entre  $\underline{q}$  et  $\underline{q} + D$ . Ils sont rémunérés au prix d'ajustement  $p^a$ .

Les consommateurs s'effacent à hauteur de  $(q^* - q^{**})$ , ce qui leur donne droit à encaisser  $p^a(q^* - q^{**})$ . Les coûts supportés pour obtenir ce gain peuvent être présentés de deux façons. Globalement les consommateurs effacés perdent l'utilité qu'ils auraient pu retirer de leur consommation,  $\int_{q^{**}}^{q^*} U'(q) dq$  (la surface A du graphique 3). De façon analytique on peut préférer décomposer ce coût en deux parties : d'une part la perte d'utilité nette  $\int_{q^{**}}^{q^*} U'(q) dq - p^*(q^* - q^{**})$  qui est ce dont les consommateurs auraient bénéficié s'ils ne s'effaçaient pas et, d'autre part, le règlement de la facture  $p^*(q^* - q^{**})$  nécessaire pour acquérir la possibilité de dégager cette utilité nette.

En dehors de l'importance d'un signal de prix reflétant la valeur de l'énergie pour guider les choix des consommateurs que nous avons explicitée dans la section 2, la rationalité économique du paiement  $p^*(q^* - q^{**})$  est celle de toute opération marchande : on ne peut vendre que ce l'on possède ou que l'on peut produire. Les installations de production appelées à hauteur de  $(q^{**} + D - q^*)$  sont légitimes à demander le règlement de  $p^a(q^{**} + D - q^*)$  parce qu'elles possèdent la technologie permettant de produire ce volume et supportent le coût afférent. Comme les consommateurs n'ont pas d'installations de production, ils ne peuvent prétendre à l'encaissement de  $p^a(q^* - q^{**})$  que s'ils ont un droit de propriété sur le volume  $(q^* - q^{**})$ , soit qu'ils acquittent la facture  $p^*(q^* - q^{**})$  au moment de la « commande » (au moment du dispatching initial), soit qu'ils s'engagent « à terme » (ils règlent la facture au moment du redispatching).

Cette interprétation en termes de droit de la propriété est mise en avant par Chao (2010). On arrive à la même conclusion si on raisonne en termes d'engagements pris lors du dispatching initial :

- les producteurs retenus sont liés par un engagement à fournir (et à recevoir le gain correspondant)
- les consommateurs retenus sont liés par un engagement à soutirer (et à payer le coût correspondant, au comptant ou à terme).

Les entreprises qui se sont engagées à fournir  $q^*$  le font soit en produisant, soit en payant le prix  $p^a$  pour acquérir l'énergie  $D$  qui leur manque.

Les consommateurs qui sont engagés à soutirer  $q^*$  le font en consommant  $q^{**}$  et rachètent leur engagement  $q^* - q^{**}$  aux prix  $p^*$  et en le monnayant au prix  $p^a$ .

Compte tenu des différents flux financiers entrant et sortant du compte pivot du gestionnaire du système, on voit apparaître un solde positif égal à  $p^*D$ . Pour équilibrer le compte du gestionnaire du système, cette somme doit être versée aux producteurs défaillants.<sup>11</sup> En effet, ils se sont engagés à produire  $D$  dans le dispatch initial, donc ils ont droit à encaisser  $p^*D$ . La différence avec les autres producteurs est qu'ils remplissent leur obligation non avec leur propre énergie produite mais avec de l'énergie produite par d'autres ( $q^{**} + D - q^*$ ) et de l'énergie non consommée ( $q^* - q^{**}$ ) réglée dans les deux cas au prix  $p^a$ . Ils sont dans la même situation qu'un fournisseur sans actif de production contraint de s'approvisionner sur le marché d'ajustement.

En agréant les deux comptes des consommateurs, on trouve que leur utilité nette est

$$\left[ U(q^*) - p^* q^* \right] + \left[ p^a (q^* - q^{**}) - (U(q^*) - U(q^{**})) \right] = U(q^{**}) + p^a (q^* - q^{**}) - p^* q^* .$$

Et en agréant les trois comptes des entreprises, leur profit net est

$$\left[ p^* (q^* - D) - \int_0^q C'(q) dq - \int_{q+D}^{q^*} C'(q) dq \right] + \left[ p^* D - p^a D \right] + \left[ p^a (q^{**} + D - q^*) - \int_{q^*}^{q^{**}+D} C'(q) dq \right] \\ = p^* q^* - p^a (q^* - q^{**}) - \left[ C(q) + C(q^{**} + D) - C(q + D) \right] .$$

On fait apparaître ainsi de façon compacte le règlement de la facture d'électricité souscrite  $p^* q^*$  et le règlement de la facture d'effacement  $p^a (q^* - q^{**})$ .

Pour conclure cette section, il n'est pas inutile de revenir sur le rôle pivot du prix d'acquisition des droits d'effacement. Si ce prix servait uniquement à partager la rente entre consommateurs et producteurs, sa valeur importerait peu. Mais comme tout prix d'usage, il influe sur les décisions des agents. C'est à cause de cette distorsion potentielle qu'il faut faire payer l'acquisition des options d'effacement.

<sup>11</sup> Comme le montre l'Annexe 3, ce crédit n'apparaît pas lors d'un redispatching pour absorber une demande supplémentaire. C'est l'utilité qu'ils retirent de leur consommation qui rémunère les agents à l'origine du redispatching.

## 4. Le calcul économique des candidats à l'effacement

Chaque consommateur doit décider de la quantité d'électricité à acheter  $q$  et de la fraction de celle-ci qui sera consommée  $q^c$ . Il est deux façons de considérer la résolution de problème. L'une, naïve, consiste à supposer que le consommateur n'a pas de comportement stratégique et se contente de choisir sa consommation sur la base du prix d'offre, puis de l'adapter si l'occasion se présente. L'autre prend en compte la capacité du consommateur à rationaliser l'usage qu'il fera des droits acquis.

- Si le consommateur est myope, son calcul est le suivant :

*i)* il choisit le niveau de consommation étant donné le prix facturé de l'électricité:

$$\max_q U(q) - pq \text{ qui détermine la demande } q(p);$$

*ii)* observant le prix  $p^a$  proposé pour s'effacer, il répartit son achat  $q(p)$  entre consommation et effacement en résolvant  $\max_{q^c} U(q^c) + p^a (q(p) - q^c)$

Si tel est le cas, l'effacement va bien dans le sens de la décentralisation du dispatching optimal en *i)* puis du redispatching en *ii)*.

Mais si les consommateurs sont stratégiques, ou plus simplement rationnels, ils vont résoudre le problème de façon séquentielle.

- Considérons un consommateur stratégique et commençons par supposer que le prix  $p^a$  peut être exactement prévu dès le départ. Alors, il faut résoudre

$$\max_{q, q^c} U(q^c) + p^a (q - q^c) - pq \quad \text{s.c.} \quad q^c \leq q,$$

problème qui se traite séquentiellement en commençant par le choix de  $q^c$ , puis en arrêtant le choix de  $q$ .

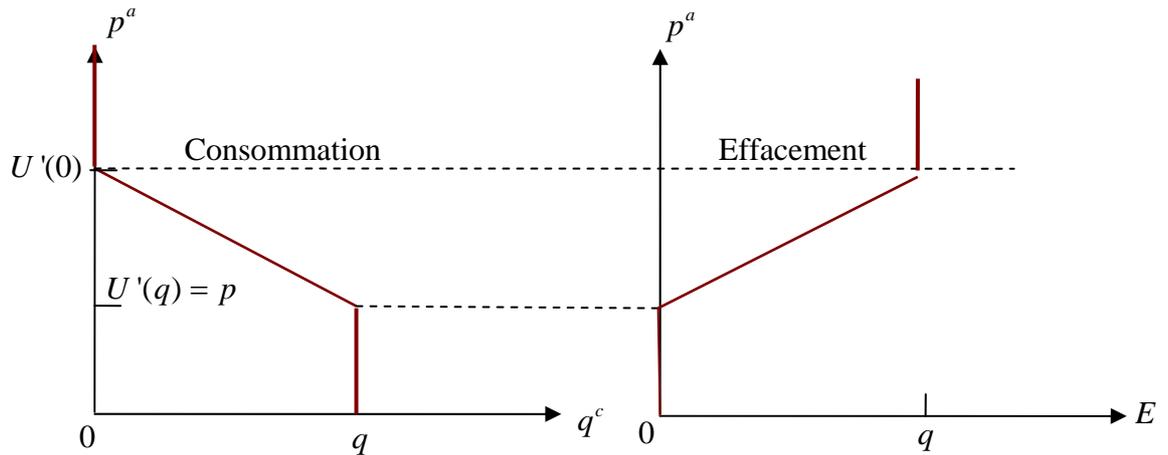
*i)* Pour toute valeur  $q$  déterminée au moment de la souscription, la quantité consommée est la solution de

$$\max_{q^c} U(q^c) + p^a (q - q^c) \quad \text{s.c.} \quad q^c \leq q$$

La consommation est donc  $q^c(p^a, q)$  telle que

$$\begin{aligned}
q^c(p^a, q) &= 0 && \text{si } p^a > U'(0) \\
q^c(p^a, q) &= U'^{-1}(p^a) && \text{si } U'(0) > p^a > U'(q) \\
q^c(p^a, q) &= q && \text{si } U'(q) > p^a.
\end{aligned}$$

Cette fonction est représentée dans la partie gauche de la figure 4. La partie droite donne, par différence, l'offre de NWh.



**Figure 4 : Demande de consommation et offre d'effacement**

On notera que cette fonction d'offre d'effacement conduit bien au redispatching optimal si  $p^a = C'(q^{**} + D)$  comme nous l'avons vu précédemment.

ii) Plaçons-nous maintenant *ex ante*, au moment où le consommateur place son ordre de commande d'énergie  $q$ . Il faut résoudre :

$$\max_q U(q^c(p^a, q)) + p^a(q - q^c(p^a, q)) - pq$$

Puisque par le théorème de l'enveloppe on a  $(U'(q^c) - p^a) \frac{dq^c}{dq} \equiv 0$ , la dérivée de la fonction d'objectif du consommateur par rapport à  $q$  est égale à  $(p^a - p) \geq 0$ . Cela signifie que le consommateur, placé face à une possibilité d'arbitrage entre le marché de la consommation et le marché d'ajustement, est incité à présenter une demande d'énergie très élevée, destinée en réalité à être proposée ultérieurement sous forme de NWh.

Plusieurs freins vont limiter cette demande excessive d'énergie, notamment les équipements de consommation qui rendent non crédibles des demandes trop élevées, mais aussi l'incertitude affectant le prix auquel se bouclera le marché d'ajustement. C'est cette seconde option que nous examinons maintenant.

● Plaçons nous dans la situation où le consommateur doit choisir  $q$  alors que le prix  $p^a$  est aléatoire, mais pourra fixer sa consommation en connaissant la vraie valeur du prix. En supposant la neutralité au risque du consommateur, son problème est

$$\max_q -pq + \int_0^\infty \left\{ \max_{q^c} U(q^c) + p^a(q - q^c) \quad s.c. \quad q^c \leq q \right\} dF(p^a)$$

où  $F(p^a)$  est la distribution de probabilité du prix d'ajustement.

Puisque  $p^a$  est connu du consommateur au moment où il choisit combien offrir de NWh, la demande de consommation reste la fonction  $q^c(p^a, q)$  construite précédemment

Donc le problème *ex ante* est

$$\begin{aligned} \max_q -pq + \int_0^{U'(q)} U(q) dF(p^a) + \int_{U'(q)}^{U'(0)} [U(q^c(p^a, q)) + p^a(q - q^c(p^a, q))] dF(p^a) \\ + \int_{U'(0)}^\infty [U(0) + p^a q] dF(p^a) \end{aligned}$$

La solution  $\tilde{q}$  de ce problème est déterminée par la condition de premier ordre<sup>12</sup>

$$U'(\tilde{q})F(U'(\tilde{q})) + \int_{U'(\tilde{q})}^\infty p^a dF(p^a) = p$$

En effet, la dernière unité achetée est payée  $p$  et elle servira soit à la consommation (si le prix  $p^a$  est trop faible), soit à la « revente » ce qui rapportera  $p^a$  dans les états du monde où l'option d'effacement est exercée.

Dès lors qu'il existe une probabilité que l'option ne soit pas profitable, l'aléa limite les achats en vue d'effacement. Cependant les achats restent plus importants que sans

<sup>12</sup> La condition de deuxième ordre  $U'' < 0$  est toujours satisfaite.

comportement stratégique puisque au lieu d'être simplement déterminés par  $U'(\cdot)$  et  $p$ , la quantité souscrite  $\tilde{q}$  est déterminé également par la distribution de probabilité de  $p^a$ .

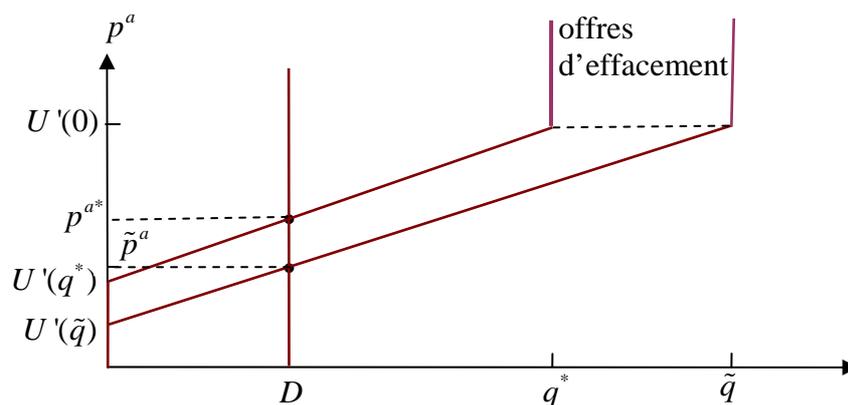
On peut montrer que la souscription est excessive de la façon suivante.

Réécrivons la condition de premier ordre précédente

$$U'(\tilde{q}) + \int_{U'(\tilde{q})}^{\infty} [p^a - U'(\tilde{q})] dF(p^a) - p = 0$$

Donc  $U'(\tilde{q}) - p < 0$ . Or, nous savons que  $U'(q^*) = p$ . Donc  $U'(\tilde{q}) < U'(q^*)$  et, puisque  $U'' < 0$ , on a bien  $\tilde{q} > q^*$ .

Donc, pour chaque niveau possible du prix de l'énergie, notamment le prix  $p^*$  qui décentralise l'optimum, les consommateurs souhaitent acquérir plus que ce qu'ils souhaitent consommer. Cette incitation à se porter acquéreur d'une quantité excessive d'électricité crée *ex post* un effet dépressif sur le prix du marché d'ajustement comme on peut le voir sur le graphique 5 où on a supposé que l'excédent de demande et/ou le manque de capacité  $D$  est entièrement absorbé par un effacement de consommation, sans appel de réserve de production.



**Figure 5 : Offre optimale et offre stratégique d'effacement**

En prenant la partie droite du graphique 4 et en traçant l'offre optimale (paramétrée par  $q^*$  et  $U'(q^*)$ ) et l'offre stratégique (paramétrée par  $\tilde{q}$  et  $U'(\tilde{q})$ ) d'effacement, on observe que

l'offre stratégique est décalée vers la droite, reflet de l'internalisation du potentiel d'arbitrage à venir.

Il y a donc à la fois perturbation de l'ordre de préséance puisque certains candidats à l'effacement viendront s'insérer dans la file d'attente avant des unités de production dont le coût est plus faible que l'utilité sacrifiée et bouclage de l'équilibre à un prix trop bas, ce qui distord les incitations à investir.

Pour éviter ce biais opportuniste, il faut inscrire les choix des agents dans la durée, avec engagements par un système d'options de consommation à prix variable et garantie de livraison variables.

## Conclusion

Accroître la flexibilité de la demande doit être une priorité dans l'industrie électrique. En effet, le renchérissement des énergies fossiles et l'importance prise par les externalités environnementales interdisent de simplement continuer à développer les installations de production pour répondre à une demande insensible aux prix.

Les Technologies de l'Information et de la Communication appliquées aux réseaux électriques permettent d'envisager de profonds changements dans la gestion de la demande. Avec des consommateurs plus attentifs à leur facture ou déléguant à des fournisseurs de service le contrôle de leur consommation, on doit pouvoir progressivement atteindre un état de l'industrie où la demande d'énergie jouera enfin un rôle totalement actif dans la gestion du système. Il faut donc encourager la recherche, le développement et l'installation des outils électroniques permettant de contrôler la demande de façon efficiente. Mais la solution n'est pas que technique. Elle nécessite aussi un environnement réglementaire qui respecte les principes de l'allocation efficiente des ressources, ce qui veut dire, dans le cadre de l'économie de marché, un système de droits et de rémunérations qui permettent de décentraliser le dispatching et le redispatching optimaux. Il faut donc en particulier que les droits de propriété monnayables sur les kWh soient obtenus dans le cadre d'un calcul économique reproduisant les choix optimaux et détenus sans contestation possible, ce qui veut dire qu'ils ont été acquis contre paiement du prix auquel l'électricité se consomme. Il faut par ailleurs que les droits à l'effacement soient alloués de façon à limiter les comportements stratégiques des consommateurs quand ils prennent en compte leurs gains potentiels lors des opérations d'effacement.

Pour les industriels qui se lancent dans la production, l'installation et la gestion des équipements de contrôle de la consommation, il faut envisager un système de soutien financier permettant d'atteindre la taille critique rendant ces services efficients et rentables. Une autre voie à explorer est celle des rémunérations de capacité (en plus de l'énergie) qui devrait être ouverte dans le cadre de la loi NOME.

## Annexe 1: Equilibre et optimum

- On rappelle ici comment se construit le **dispatch optimal** pour  $L$  consommateurs et  $M$  producteurs
  - Soit  $U_i(q_i^c)$  avec  $U_i' > 0$ ,  $U_i'' \leq 0$  l'utilité obtenue par la consommation de la quantité  $q_i^c$  par le consommateur  $i = 1, \dots, L$
  - Soit  $C_j(q_j^s)$  avec  $C_j' > 0$ ,  $C_j'' \geq 0$  le coût engendré par la production de la quantité  $q_j^s$  par le producteur  $j = 1, \dots, M$

Le dispatch optimal est  $\{q_i^{c*}\}_{i=1}^L$ ,  $\{q_j^{s*}\}_{j=1}^M$  solution de

$$\max_{\{q_i^c\}_1^L, \{q_j^s\}_1^M} \sum_{i=1}^L U_i(q_i^c) - \sum_{j=1}^M C_j(q_j^s)$$

$$s.c. \quad \sum_{i=1}^L q_i^c \leq \sum_{j=1}^M q_j^s, \quad q_i^c \geq 0 \quad \forall i, \quad q_j^s \geq 0 \quad \forall j$$

En omettant les contraintes de positivité explicites et en notant  $\lambda$  le multiplicateur de la contrainte de rareté, le Lagrangien du problème est

$$\mathcal{L} = \sum_i U_i(q_i^c) - \sum_j C_j(q_j^s) + \lambda \left[ \sum_j q_j^s - \sum_i q_i^c \right]$$

Les conditions de Kuhn et Tucker sont

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^c} = U_i'(q_i^c) - \lambda \leq 0 \quad \text{et} \quad U_i'(q_i^c) = \lambda \quad \text{si} \quad q_i^c > 0 \quad \forall i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j^s} = -C_j'(q_j^s) + \lambda \leq 0 \quad \text{et} \quad C_j'(q_j^s) = \lambda \quad \text{si} \quad q_j^s > 0 \quad \forall j$$

Réindiquons les consommateurs de sorte que

$$U_1'(0) > U_2'(0) > U_3'(0) > \dots$$

et les producteurs de façon à avoir

$$C_1'(0) < C_2'(0) < C_3'(0) < \dots$$

Le dispatch optimal est donc  $\{q_i^{c*}\}_{i=1}^L$ ,  $\{q_j^{g*}\}_{j=1}^M$  tel que

- $\lambda^* \stackrel{def}{=} U_i'(q_i^{c*}) = C_j'(q_j^{g*})$   
 pour tous les consommateurs servis ( $q_i^{c*} > 0$  pour  $i = 1, \dots, l$ )  
 et tous les producteurs appelés ( $q_j^{g*} > 0$  pour  $j = 1, \dots, m$ )
- $C_j'(0) > \lambda^* > U_i'(0)$   
 pour tous les consommateurs servis  
 $(q_i^{c*} = 0$  pour  $i = l+1, \dots, L)$   
 et pour tous les producteurs non appelés  
 $(q_j^{g*} = 0$  pour  $j = m+1, \dots, M)$
- $\sum_{i=1}^l q_i^{c*} = \sum_{j=1}^m q_j^{g*}$

● **Résolution en deux étapes :**

- On construit d'abord une fonction d'utilité collective et une fonction de coût collectif.
- On cherche ensuite le niveau agrégé d'activité qui maximise le surplus collectif.

- **Consommateurs :**

$$\max_{\{q_i^c\}_1^L} \sum_{i=1}^L U_i(q_i^c) \quad s.c. \quad \sum_{i=1}^L q_i^c \leq q, \quad q_i^c \geq 0 \quad \forall i.$$

La solution est le vecteur  $q_i^c(q)$   $i = 1, \dots, L$  tel que

- $\gamma(q) \stackrel{def}{=} U_i'(q_i^c(q))$  et  $q_i^c(q) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, l(q)$
- $U_i'(0) < \gamma(q)$  et  $q_i^c(q) = 0 \quad \forall i = l(q) + 1, \dots, L$
- $\sum_{i=1}^{l(q)} q_i^c(q) = q$

On appelle  $U(q) = \sum_{i=1}^L U_i(q_i^c(q))$  la **fonction d'utilité collective** de la consommation  $q$ .

- **Producteurs :**

$$\min_{\{q_j^g\}_1^M} \sum_{j=1}^M C_j(q_j^g) \quad \text{s.c.} \quad \sum_{j=1}^M q_j^g \geq q, \quad q_j^g \geq 0 \quad \forall j$$

La solution est le vecteur  $q_j^g(q)$ ,  $j = 1, \dots, M$  tel que

- $\mu(q) = C'_j(q_j^g(q))$  et  $q_j^g(q) > 0 \quad \forall j = 1, \dots, m(q)$
- $C'_j(0) > \mu(q)$  et  $q_j^g(q) = 0 \quad \forall j = m(q) + 1, \dots, M$
- $\sum_{j=1}^{m(q)} q_j^g(q) = q$

On appelle  $C(q) = \sum_{j=1}^M C_j(q_j^g(q))$  la fonction de coût collectif de la production  $q$ .

- **Activité optimale :**

C'est la valeur  $q^*$  donnée par

$$\max_q U(q) - C(q) \quad \text{avec} \quad q \geq 0$$

Donc, en supposant que  $U'(0) > C'(0)$ , c'est la solution de  $U'(q^*) = C'(q^*)$ .

$$\text{Or,} \quad C'(q) = \sum_j C'_j \frac{dq_j^g(q)}{dq} = \sum_j \mu(q) \frac{dq_j^g(q)}{dq} = \mu(q)$$

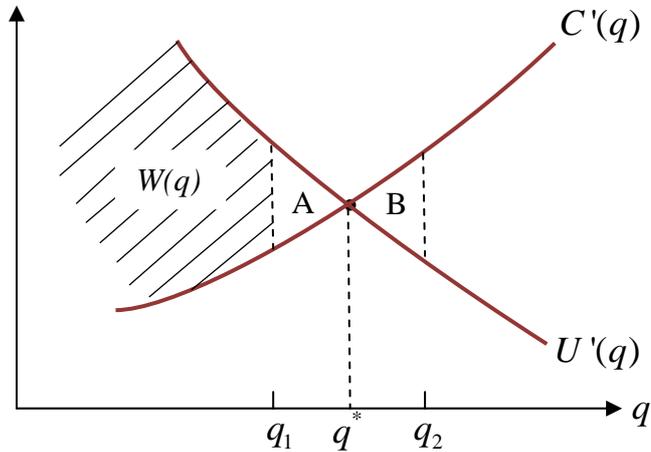
$$\text{et} \quad U'(q) = \sum_i U'_i \frac{dq_i^c(q)}{dq} = \sum_i \gamma(q) \frac{dq_i^c(q)}{dq} = \gamma(q)$$

$$\text{Donc} \quad U'(q^*) = C'(q^*) \Rightarrow \gamma(q) = \mu(q)$$

On en déduit que  $U'_i(q_i^c(q^*)) = C'_j(q_j^g(q^*))$  pour tous les consommateurs servis et tous les producteurs appelés.

Le surplus collectif pour le niveau d'activité  $q_1$  est la surface hachurée du graphique

de la Figure A1 :  $W(q_1) \stackrel{def}{=} U(q_1) - C(q_1) = \int_0^{q_1} U'(q) dq - \int_0^{q_1} C'(q) dq$ .



**Figure A1 : Dispatching optimal et surplus collectif**

Le surplus collectif est rendu maximum en produisant  $q^*$  grâce aux producteurs  $j = 1, \dots, m(q^*)$  et en servant les consommateurs  $i = 1, \dots, l(q^*)$ .

Si l'activité s'arrête en  $q_1$ , il y a un manque à gagner représenté par la surface  $A$  puisque des unités dont l'utilité est supérieure au coût ne sont pas produites ;

Si l'activité va jusqu'en  $q_2$ , il y a perte d'efficacité représentée par la surface  $B$  puisque des unités dont le coût est supérieur à l'utilité sont produites.

## Annexe 2: Marché, dispatching et redispatching

L'appel des unités de production par ordre de coût d'exploitation croissant (ordre de préséance) est bien maîtrisé par les gestionnaires de système électrique même si deux écueils peuvent l'empêcher d'être totalement efficient : *i*) des manipulations des annonces de coût et/ou de disponibilités pour extraire des rentes monopolistiques et *ii*) des contraintes de réseau. Plus délicat est l'appel des unités de consommation par ordre de valeur d'usage décroissante. De fait, à l'exception des gros clients il est difficile d'obtenir que la consommation soit flexible, c'est-à-dire s'adapte d'elle-même à des signaux économiques. De plus les réseaux de distribution ne permettent pas de traiter de façon différenciée des consommateurs situés en aval des nœuds de contrôle. Cependant, le développement des TIC laisse présager un meilleur contrôle des consommations individuelles d'électricité par des "energy boxes" participant à des réseaux intelligents.

En supposant que l'offre et la demande (grâce aux boîtiers) d'électricité sont parfaitement flexibles et incapables de manipuler le prix, montrons comment la décentralisation des décisions permet de réaliser le dispatch optimal.

Le mécanisme de base est le suivant:

- **les consommateurs** résolvent<sup>13</sup>

$$\max_q U(q) - pq$$

De la condition de premier ordre  $U'(q) = p$  on tire la demande totale  $q^d = q^d(p)$ , qui est décroissante puisque  $U'' \leq 0$ .

- **les producteurs** résolvent<sup>14</sup>

$$\max_q pq - C(q)$$

De la condition de premier ordre  $p = C'(q)$  on tire la fonction d'offre totale  $q^0 = q^0(p)$  qui est croissante puisque  $C'' \geq 0$ .

- **l'équilibre du marché** permet de déterminer le prix  $p^e$  par

$$q^d(p^e) = q^0(p^e)$$

---

<sup>13</sup> Nous ne reproduisons pas ici le calcul détaillé pour chaque consommateur  $i$  qui conduit à la construction des fonctions de demande individuelle puis, par agrégation, à la demande collective. La logique est la même que celle développée dans l'Annexe 1.

<sup>14</sup> Même remarque que pour les consommateurs.

Il est facile de vérifier analytiquement et géométriquement que  $q^d(p^e) = q^0(p^e) = q^*$ , donc que la concurrence conduit au dispatch optimal.

En pratique, ce résultat est obtenu sur les marchés de gros de l'électricité (EPEX, Omel, PJM, ERCOT, etc.) en suivant le protocole suivant :

- 1) chaque producteur annonce au gestionnaire du marché quelle(s) quantité(s) il souhaite vendre à quel(s) prix,
- 2) chaque consommateur annonce au gestionnaire du marché quelle(s) quantité(s) il souhaite acheter à quel(s) prix,
- 3) le gestionnaire du marché agrège les offres par ordre de prix croissant et les demandes par ordre de prix décroissant ; la fonction d'offre totale reflète ainsi l'ordre de préséance de la production et la fonction de demande totale reflète l'ordre de préséance de la consommation,
- 4) en croisant l'offre globale et de la demande globale le gestionnaire du marché détermine le prix d'équilibre et le volume d'équilibre,
- 5) le prix est annoncé aux participants au marché, ce qui les répartit en quatre catégories:
  - les producteurs qui avaient demandé un prix inférieur ou égal au prix d'équilibre doivent fournir la quantité annoncée;
  - les producteurs qui avaient demandé un prix plus élevé ne sont pas dispatchés;
  - les consommateurs qui avaient demandé un prix supérieur ou égal au prix d'équilibre doivent soutirer la quantité annoncée;
  - les consommateurs qui avaient demandé un prix plus faible ne sont pas dispatchés.

Un gestionnaire du système électrique qui contrôle parfaitement (directement ou indirectement) les équipements de consommation, peut dispatcher de l'effacement au même titre que de la production de façon efficiente. Pour que les mécanismes de marché puissent réaliser la même performance il faut que *i*) les consommateurs possèdent explicitement des droits de propriété sur les quantités qu'ils proposent d'effacer et *ii*) les prix ne soient pas manipulables individuellement ou collectivement. Sous ces conditions, il est possible d'organiser un marché de l'effacement sur lequel les consommateurs sont offreurs et les

producteurs sont demandeurs. Le prix d'équilibre donne la valeur marginale de l'énergie consommée et produite, donc aussi la valeur marginale de l'énergie effacée.

Formellement:

- les producteurs qui devraient livrer  $\bar{q}$  sans possibilité d'effacement sont prêts à acheter au prix  $p$  le volume  $q^E$  qui résout

$$\min_{q^E} pq^E + C(\bar{q} - q^E)$$

puisqu'ils devront produire la différence  $(\bar{q} - q^E)$ . Leur demande d'effacement est alors donnée par la fonction  $p = C'(\bar{q} - q^E)$ , relation décroissante entre  $p$  et  $q^E$ .

- les consommateurs qui devraient soutirer  $\bar{q}$  sans possibilité d'effacement sont prêts à vendre au prix  $p$  le volume  $q^E$  qui résout

$$\max_{q^E} pq^E + U(\bar{q} - q^E)$$

puisqu'ils consommeront la différence  $(\bar{q} - q^E)$ . Leur offre d'effacement est alors donnée par la fonction  $p = U'(\bar{q} - q^E)$ , relation croissante entre  $p$  et  $q^E$ .

- à l'équilibre du marché des effacements, on aura bien

$$p^* = U'(\bar{q} - q^{E*}) = C'(\bar{q} - q^{E*})$$

comme le veut la maximisation du surplus collectif.

De la même façon, il est possible de faire participer les consommateurs effaçables aux marchés d'ajustement, sur lesquels ils entrent en concurrence avec les producteurs pour résorber des déséquilibres non planifiés, tels que la défaillance d'un producteur dispatché, un gonflement de demande non dispatché, un incident sur le réseau, etc. Ici encore, sous les conditions habituelles de concurrence, les droits à effacement acquis au prix du marché du lendemain et rémunérés au prix d'équilibre du marché d'ajustement joints à la production des centrales de réserve équilibrent les besoins supplémentaires au niveau qui est optimal pour la collectivité.

### Annexe 3 : Redispatching optimal et marché d'ajustement pour équilibrer une demande excessive

Le gestionnaire du système électrique arrête le dispatch optimal au niveau  $q^*$ . Postérieurement à cette décision il apparaît que les demandeurs qui s'étaient engagés à acquérir la quantité  $\underline{q}$  dans l'ordre de préséance souhaitent en fait acheter la quantité  $\underline{q} + D$ . Toutes les unités entre  $\underline{q}$  et  $\underline{q} + D$  sont évaluées à  $U'(\underline{q})$ . Comment redispatcher ? S'il n'y a pas d'autre contrainte à respecter, le redispatching est la solution de

$$\max_{q^c, q^s} \int_0^{\underline{q}} U'(q) dq + D.U'(\underline{q}) + \int_{\underline{q}}^{q^c} U'(q) dq - \int_0^{q^s} C'(q) dq$$

sous la contrainte  $\int_0^{\underline{q}} dq + D + \int_{\underline{q}}^{q^c} dq = \int_0^{q^s} dq,$

c'est-à-dire  $q^c + D = q^s.$

En utilisant la variable  $q^c$  comme variable de décision, on cherche donc

$$\max_{q^c} \int_0^{\underline{q}} U'(q) dq + \int_{\underline{q}}^{q^c} U'(q) dq - \int_0^{q^c+D} C'(q) dq$$

dont la solution  $q^{**}$  est déterminée par

$$U'(q^{**}) = C'(q^{**} + D)$$

La figure A2 illustre ce résultat qui est identique à ce que l'on obtient dans le cas où il faut redispatcher pour équilibrer la défaillance de producteurs.

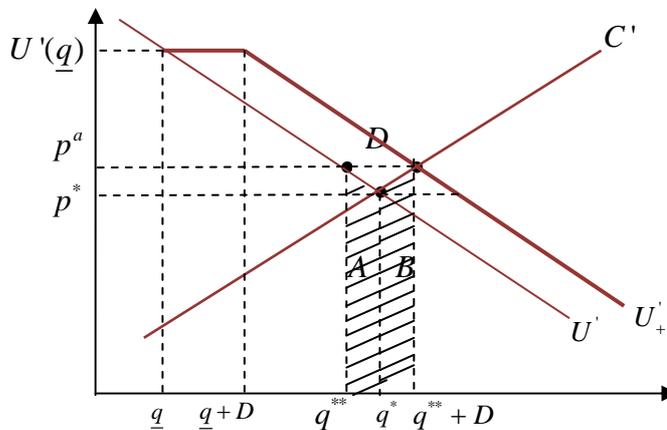


Figure A2 : Redispatching optimal à la suite d'une demande supplémentaire

Par rapport au dispatch initial  $q^*$  il faut donc

- augmenter la production de  $q^*$  à  $q^{**} + D$  en utilisant les centrales en réserve les moins coûteuse,
- effacer une demande  $q^* - q^{**}$ .

En termes de surplus, ce double ajustement provoque

- un gain d'utilité  $D \cdot U'(q)$
- une perte d'utilité  $\int_{q^{**}}^{q^*} U'(q) dq$  (surface A)
- un surcoût  $\int_{q^*}^{q^{**}+D} C'(q) dq$  (surface B)

Au total, puisqu'une nouvelle demande valorisant fortement l'électricité peut être servie, il y a un gain social net.

$$G^{**} = W^{**} - W^* > 0$$

Les mêmes observations que celles présentées dans le cas d'un déficit de production s'appliquent si le redispatching est surcontraint par l'inflexibilité de certains équipements de production dont le coût d'exploitation est faible ou l'inertie de certains consommateurs dont l'utilité est faible.

En concurrence parfaite, l'ajustement par offres de MWh et de NWh suit la même logique que dans le cas d'un déficit de production.

Ci-après, nous construisons les comptes des agents décrivant les transferts de revenus.

### Producteurs dispatchés

Dépense	Gain
• $\int_0^{q^*} C'(q) dq$	• $p^* q^*$

### Producteurs appelés pour l'ajustement

Dépense	Gain
• $\int_{q^*}^{q^{**}+D} C'(q) dq$	• $p^a (q^{**} + D - q^*)$

### Consommateurs dispatchés non effacés

Dépense	Gain
• $p^* q^{**}$	• $\int_0^{q^{**}} U'(q) dq$

### Consommateurs initialement non dispatchés

Dépense	Gain
• $p^a D$	• $U'(q) D$

### Consommateurs effacés

Dépense	Gain
• $p^* (q^* - q^{**})$	• $p^a (q^* - q^{**})$

### Gestionnaire du système

Dépense	Gain
• $p^* q^*$	• $p^* q^{**}$
• $p^a (q^{**} + D - q^*)$	• $p^a D$
• $p^a (q^* - q^{**})$	• $p^* (q^* - q^{**})$

La seule différence avec le cas de production manquante est qu'ici les "fauteurs de trouble" (à savoir les consommateurs consommant  $D$  en plus de leur demande initiale) se rémunèrent par la valeur de l'électricité qu'ils consomment. C'est eux qui doivent évidemment payer le coût du rééquilibrage  $p^a D$ . Le compte du gestionnaire du système et donc les comptes des autres agents sont automatiquement équilibrés.