

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE II
FACULTÉ DES SCIENCES ÉCONOMIQUES
Centre d'Économie et de Finances Internationales

THÉORIE DE LA STRUCTURE PAR TERME DES TAUX D'INTÉRÊT

Une analyse de l'effet richesse et de l'effet
information en économie d'échange et de production.

Christophe BISIÈRE

Thèse de Doctorat ès Sciences Économiques
présentée et soutenue publiquement le 14 mars 1994

Directeur de recherche

Monsieur Jean-Louis REIFFERS
Doyen Honoraire,
Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II

Jury

Monsieur Patrick ARTUS
Directeur des Études Économiques,
Caisse des Dépôts et Consignations

Monsieur André CARTAPANIS
Doyen de la Faculté des Sciences Économiques,
Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II

Monsieur André ICARD
Directeur Général des Études,
Banque de France

Monsieur Didier LAUSSEL
Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II

Monsieur William MAROIS
Recteur de l'Académie Nancy-Metz

Monsieur Jean-Louis REIFFERS
Doyen Honoraire,
Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II

La Faculté n'entend donner aucune approbation ni improbation
aux opinions exprimées dans les thèses : ces opinions doivent
être considérées comme propres à leurs auteurs.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier le professeur Jean-Louis Reiffers, mon directeur de thèse. Son appui, ses conseils et ses encouragements permanents, ont été précieux. Je lui suis également reconnaissant de m'avoir fourni les moyens techniques et financiers nécessaires à l'achèvement de cette thèse.

Je remercie également le professeur Didier Laussel, pour ses remarques et suggestions, qui ont permis d'améliorer le dernier chapitre de ce document.

Je demeure, bien entendu, seul responsable des erreurs et imperfections qui subsistent.

Finalement, je tiens à remercier du fond du cœur Élisabeth, ma compagne, qui a contribué à créer un environnement favorable, sans lequel ce travail n'aurait pu être mené à son terme.

Introduction générale

L'existence d'une multiplicité de taux d'intérêt est un fait patent de la réalité économique et financière. Taux du marché monétaire, interbancaire, obligataire, taux débiteurs, ... des centaines de taux révèlent les relations complexes liant prêteurs et emprunteurs de capitaux.

Face à ce foisonnement du réel, la théorie économique met en avant un certain nombre de critères permettant de classer les taux d'intérêt. Les critères les plus souvent évoqués sont : la durée du prêt correspondant, son statut fiscal, la plus ou moins grande liquidité du titre support, le risque de défaillance de l'emprunteur, et enfin les clauses de remboursement.

Chacun d'eux représente un facteur explicatif des taux d'intérêt, et a, en tant que tel, donné lieu à une littérature spécifique. Toutefois, le critère de la durée a été largement privilégié, tout simplement parce qu'il fait référence à ce qui fait « l'essence » du phénomène de l'intérêt : *le temps*.

L'étude de l'influence du facteur temps doit être menée sur la base de taux d'intérêt uniquement différenciés par la durée du titre support. L'actif idéal en la matière est un bon sans coupon, sans risque de défaut, et à valeur faciale normée à l'unité, c'est-à-dire un titre conférant à son détenteur le droit de recevoir une unité monétaire au moment de son échéance. Ordonnant alors les taux d'intérêt portés par ces titres en fonction de leur échéance, on obtient une *structure par terme des taux d'intérêt*.¹ Bien entendu, « l'actif idéal » n'existe pas, et la structure des taux doit donc être estimée à partir des prix de marché des actifs réellement disponibles, et, en particulier, des actifs obligataires.²

Expliquer la forme courante de la structure des taux, ainsi que ses déformations au cours du temps, constitue un problème crucial pour bon nombre d'acteurs économiques. Pour un État (et/ou une autorité monétaire), il conditionne sa capacité à infléchir la hiérarchie des taux, au service d'une politique économique donnée.³ Pour une banque commerciale, il définit les conditions de l'activité de *transformation de terme*. D'une manière générale, il intéresse tous les acteurs qui détiennent des actifs, et doivent gérer un risque de taux d'intérêt.

¹L'expression « structure à terme des taux d'intérêt » est parfois utilisée. Toutefois, les taux dont il est question sont des taux au comptant et non des taux à terme. Cette appellation peut donc prêter à confusion.

²Les principales procédures d'estimation de « *yield curves* » ont été proposées par Carleton et Cooper [1976], McCulloch [1971, 1975], Schaefer [1973] et Vasicek et Fong [1982]. Pour des études sur données françaises, voir par exemple Bonneville [1981], Bouvier, Brugiere, Coulibaly, Gudin de Vallerin et Phelouzat [1989], ou Artus, Belhomme, Elalouf et Minczeles [1992].

³La plus célèbre tentative de torsion des taux a été menée en 1961 aux États-Unis. Cette politique, baptisée « *operation twist* », avait pour objectif d'améliorer à la fois la balance des paiements (en augmentant les taux courts) et l'investissement interne privé (en diminuant les taux longs).

Le problème de la détermination de la structure par terme des taux d'intérêt constitue l'objet de cette thèse.

Dans la littérature, on distingue trois approches de ce problème : une approche purement empirique, une approche macroéconomique, et une approche microéconomique.

La première de ces approches met en œuvre des techniques de traitement de données (comme l'analyse factorielle) pour dégager « mécaniquement » les principaux facteurs explicatifs des déformations de la courbe des taux, ou encore procède à une analyse économétrique systématique des corrélations et causalités entre la structure des taux et un grand nombre de variables, sans présupposé théorique fort.⁴ Les résultats ainsi obtenus peuvent être utilisés afin d'améliorer l'efficacité des politiques de gestion du risque de taux. Toutefois, une interprétation économique des facteurs mis en lumière reste nécessaire.

La seconde approche tente de replacer le problème des taux dans un cadre macroéconomique complet, type IS-LM, prenant en compte, notamment, le comportement spécifique de l'état (politique monétaire, politique de financement des déficits budgétaires et de gestion de l'encours de dette publique, ...).⁵ Cette approche procède d'une *dissociation fonctionnelle* entre les taux d'intérêt aux diverses échéances, souvent exprimée sous la forme d'une opposition entre deux taux : le taux « court » et le taux « long ». Le taux court est assimilé à un taux monétaire, contrôlé par les autorités dans une perspective d'équilibre externe ; le taux long est, quant à lui, assimilé à un taux « économique », représentatif du coût de l'investissement productif, et, à ce titre, déterminant pour l'équilibre interne.

La troisième approche, largement dominante dans la littérature, est celle de *l'évaluation*. Dans l'optique de l'évaluation, tous les actifs partagent une fonction commune : procurer à leurs détenteurs une protection contre les risques économiques. Le prix d'équilibre d'un actif est alors fixé, *via* les comportements individuels en incertitude, au vu des caractéristiques de l'assurance qu'il représente. Le prix d'un actif est, en conséquence, lié au prix d'un autre, dans la mesure où ils offrent des protections comparables. Ceci est valable pour tous les actifs financiers, et, en particulier, pour les bons sans coupon. L'approche microéconomique considère que la structure des taux résulte de l'action d'agents (rationnels) désireux de gérer au mieux l'incertitude à laquelle ils sont

⁴Voir Bouvier et alii [1989], Artus, Kaabi, Lefournier [1990], Artus, Belhomme, Elalouf et Minczeles [1992].

⁵Blanchard [1981], Dantas et Dornbush [1984], Blanchard et Summers [1986], McCafferty [1986], Artus [1989] et Artus et Ducos [1989] invoquent une telle démarche.

confrontés.

La perspective générale de cette thèse étant avant tout théorique, nous ne considérons ici que ces deux dernières approches. Mais il n'est pas non plus de notre propos d'évaluer les mérites respectifs des deux démarches sous-jacentes, parce que cette évaluation renvoie *in fine* au débat (épistémologique ?) entre macro et microéconomie. Simplement, nous nous bornerons à faire deux remarques.

En premier lieu, la définition même de la structure des taux est plus conforme à la perspective microéconomique. Cette définition place en effet *la dimension temporelle* au centre du problème de la formation de l'intérêt, et conduit naturellement à s'interroger sur l'attitude des acteurs économiques vis-à-vis du temps. L'approche macroéconomique, quant à elle, affecte aux divers taux un rôle qui n'est pas *directement* lié à cette dimension.

En second lieu, l'évolution récente des marchés financiers favorise l'expression des comportements microéconomiques. La « règle des trois D » (Décloisonnement, Déréglementation, Désintermédiation) qui gouverne l'organisation financière, tant nationale, qu'internationale, conduit à mettre à la disposition de chaque agent économique un ensemble d'actifs financiers de plus en plus vaste.⁶ En particulier, sont disponibles des titres de créance couvrant une grande partie du spectre des maturités. Un agent étant susceptible d'incorporer dans son portefeuille un plus grand nombre de titres supports des taux d'intérêt, son choix contribue à créer des liaisons d'autant plus fortes entre les différents termes de la structure des taux. Ainsi, le processus d'intégration financière tend à mettre en cause le principe d'une dissociation préalable des divers taux d'intérêt, et prêche au contraire pour une analyse approfondie de l'influence des comportements individuels sur la hiérarchie des taux.

La perspective générale de cette thèse est celle de l'analyse des déterminants microéconomiques de la structure des taux, dans l'optique de la théorie des choix rationnels en incertitude.

Les premières tentatives en la matière (Roll [1970, 1971]) ont consisté à appliquer le modèle d'équilibre de choix de portefeuille de Sharpe, Lintner, Mossin et Treynor (le CAPM) au problème de la structure des taux. Dans ce type de modèle, un investisseur maximise l'espérance de l'utilité de sa richesse à une date future donnée, appelée son « horizon ». La théorie restant muette sur

⁶Voir Bourguinat [1992].

le choix de cet horizon, on est souvent conduit à le poser égal à une période.⁷ Le modèle de portefeuille montre que la structure des taux dépend notamment des prévisions, de l'attitude des agents vis-à-vis du risque, et de l'offre (exogène) de titres aux diverses échéances. La hiérarchie des taux est bien explicitement conditionnée par les comportements individuels en incertitude. Toutefois, deux défauts majeurs viennent limiter l'intérêt théorique de cette analyse.

En premier lieu, dans le cadre du modèle de portefeuille, un agent ne se préoccupe pas de sa situation antérieure et postérieure à son horizon, et fait donc preuve d'une singulière myopie. Lorsque, par exemple, son horizon est d'une période, l'agent agit comme s'il allait tout simplement mourir sur l'instant suivant. Ceci est particulièrement gênant pour une théorie, qui entend traiter de taux d'intérêt différenciés selon un critère *temporel*. Privilégier un horizon revient à accorder une place particulière au taux dont l'échéance correspond à cet horizon : il devient, en effet, un taux *sans risque*. Pour mettre tous les taux sur un pied d'égalité, il est indispensable de développer une analyse *intertemporelle*, dans laquelle les individus sont supposés être concernés par le risque, à tout moment de l'avenir.

En second lieu, le modèle de portefeuille propose une vision purement « financière » de la structure des taux, coupée de l'économie réelle. En particulier, la consommation et la production n'interviennent pas explicitement dans l'analyse. L'exclusion de la consommation est clairement liée à la notion d'horizon, qui rend exogène le partage consommation-investissement : il est admis que l'agent ne souhaite consommer qu'à l'échéance précise de son horizon, et qu'il consommera donc toute sa richesse à ce moment là. Seule la richesse est nécessaire à l'analyse. L'exclusion de la production dérive du caractère exogène de l'offre de titres, qui rejette en dehors du champ d'investigation les motivations de l'investissement productif. Pourtant, il est difficile d'admettre que les perspectives de rendement sur le capital physique, ne constituent pas un facteur explicatif pertinent de la structure des taux, dans la mesure où celle-ci est reliée au phénomène de l'intérêt.

Ces critiques tendent à montrer que l'analyse microéconomique de la structure des taux requiert un cadre théorique général, prenant en compte à la fois la production et la consommation, dans un contexte intertemporel.

L'objectif de cette thèse est d'examiner l'influence du comportement rationnel en incertitude sur la structure des taux, dans un cadre d'équilibre général intertemporel.

⁷ Voir de la Bruslerie [1987]. Pour des formulations modernes de l'application du CAPM au problème de la structure des taux, on peut consulter Shiller et McCulloch [1987] ou Artus [1987].

Le modèle pertinent en la matière est le modèle d'équilibre économique général de Cox, Ingersoll et Ross. Ce modèle, créé à la fin des années soixante-dix, n'a fait l'objet d'une publication qu'au milieu des années quatre-vingts. Il occupe depuis, une position privilégiée au sein du champ théorique de l'évaluation des actifs financiers. La raison essentielle du succès des travaux de Cox, Ingersoll et Ross tient au fait qu'ils parviennent à exhiber une équation d'évaluation pouvant être appliquée à quasiment tous les actifs financiers, dans le cadre d'un modèle parfaitement compatible avec les hypothèses de la théorie standard. En fait, le modèle d'équilibre intertemporel s'affirme comme une version *opérationnelle* du modèle central de la théorie financière moderne : le modèle d'actifs contingents de Arrow et Debreu. En particulier, l'équation d'évaluation peut être appliquée aux bons sans coupon, et, ce faisant, Cox, Ingersoll et Ross créent le premier *modèle d'équilibre général de la structure par terme des taux d'intérêt*. Pour la première fois, est proposé un cadre formel, permettant de relier explicitement la structure des taux aux préférences individuelles, à la consommation et à la production.

Ce cadre formel est intéressant à plus d'un titre. Premièrement, il offre un schéma théorique d'interprétation de la structure des taux particulièrement riche. Deuxièmement, il est susceptible d'être instancié sous la forme de modèles *explicites* de structure par terme, c'est-à-dire de modèles dans lesquels la hiérarchie des taux est donnée sous forme d'une équation, permettant de calculer directement la valeur d'équilibre des taux d'intérêt, en fonction du terme et de paramètres exogènes à l'économie. Ces paramètres exogènes concernent, d'une part, la structure de l'incertitude qui affecte l'économie, et, d'autre part, les préférences individuelles. Dans le cadre de ce modèle, la structure de l'incertitude désigne la nature des processus dynamiques qui gouvernent l'incertitude sur la production, et sur la technologie. Les préférences sont, quant à elles, étroitement associées à la forme de la fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern des individus. De telles « solutions fermées » permettent d'émettre des propositions testables, relatives à la forme et la dynamique de la courbe des taux. Troisièmement, ce cadre formel permet, dans une certaine mesure, de réexaminer les théories « traditionnelles » de la structure des taux, apparues entre la fin des années trente et la fin des années soixante. De ce fait, le modèle d'équilibre général a été à l'origine d'un profond bouleversement au sein des théories de la structure des taux.

Pour toutes ces raisons, nous consacrons une part importante de cette thèse à l'examen du modèle d'équilibre général de Cox, Ingersoll et Ross et de ses diverses implications.

Toutefois, dans l'optique d'une discussion concrète des effets du comportement rationnel en incertitude, un point nous laisse notablement insatisfait : dans le cadre du modèle de Cox, Ingersoll

et Ross (construit dans l'optique de l'évaluation), cette discussion est soumise à l'obtention de solutions fermées. Or, de telles solutions ne peuvent être obtenues qu'au prix d'une spécialisation du modèle général, *qui touche à la fois à la structure de l'incertitude et aux préférences individuelles*. Les résultats obtenus sont difficiles à interpréter, parce qu'ils résultent de la combinaison d'hypothèses structurelles et comportementales.

Il serait bien plus instructif d'étudier séparément l'influence de ces deux facteurs. L'étude du facteur « préférences » consisterait à conserver des spécifications très générales pour l'environnement économique, et à spécialiser les préférences de diverses façons (fonction d'utilité isoélastique, logarithmique, exponentielle, ...). Toutefois, cette perspective reste assez technique, et peu susceptible de fournir des résultats significatifs du point de vue de l'analyse de la structure des taux. Bien plus intéressante est l'étude du facteur « incertitude ». Il s'agit ici d'adopter des préférences très générales (par exemple, supposer uniquement que les agents ont de l'aversion pour le risque), et d'examiner la structure des taux, en fonction de la nature de l'incertitude qui affecte l'économie, et, corrélativement, des instruments mis à la disposition des individus afin qu'ils puissent gérer au mieux cette incertitude. Discutant de l'incertitude, on peut comparer utilement les résultats obtenus dans une économie d'échange et dans une économie de production. Dans une économie d'échange, l'incertitude porte sur les dotations exogènes, et on peut relier la forme générale de la structure des taux, aux propriétés de la distribution aléatoire de ces dotations au cours du temps. Dans une économie de production, les aléas portent sur *l'efficacité des processus productifs*, et on peut alors évaluer, par comparaison, l'influence spécifique de l'incertitude technologique sur la structure des taux.

Dans cette thèse, notre objectif ultime est d'analyser l'influence de l'aversion pour le risque sur la hiérarchie des taux, en fonction de la structure de l'incertitude qui génère ce risque.

Ce faisant, nous nous référons à une littérature spécifique, notamment représentée par Woodward (pour une analyse en économie d'échange) et Benninga et Protopapadakis (pour une analyse en économie de production). Ces auteurs se placent dans le cadre d'une économie à trois dates (deux périodes), peuplée d'agent ayant de l'aversion pour le risque, et étudient les conséquences sur la structure des taux, *à la date initiale*, de l'incertitude qui plane sur la réalisation de l'état de l'économie à la date intermédiaire. Il apparaît que ces conséquences sont très différentes selon que la réalisation de cet état est susceptible, ou non, d'apporter une information supplémentaire sur la réalisation de l'état à la date terminale, c'est-à-dire susceptible de conduire les agents à *réviser leurs anticipations* sur l'avenir de l'économie. Ces modèles permettent d'associer à une économie,

une forme particulière de structure des taux, en fonction de la nature des informations qui sont susceptibles d'arriver sur les marchés. Les propositions issues de cette approche ont l'avantage d'être particulièrement intuitives et concrètes.

Nous nous proposons, dans la cadre de cette thèse, d'analyser, et, dans une certaine mesure, de compléter ces propositions. Pour ce faire, nous utilisons principalement deux notions : « l'effet richesse » et « l'effet information ». Chacun de ces effets provient de la possible survenance d'un type bien particulier de message sur les marchés : l'effet richesse résulte d'un message précisant la situation économique présente, mais ne donnant aucune information sur l'avenir ; l'effet information résulte, quant à lui, de la révélation d'un indicateur avancé de la situation économique future. Notre objectif est d'étudier ces deux effets, dans le cadre d'économies différenciées par l'incertitude qui y règne, et par les instruments qui permettent de la gérer. Certains cas ont été examinés de façon détaillée par Woodward ou Benninga et Protopapadakis, d'autres ont été juste évoqués, enfin, d'autres encore n'ont pas été envisagés. Notre apport consistera (i) à exprimer les résultats disponibles dans un cadre unifié, (ii) à vérifier formellement certaines propositions non-démonstrées, et à examiner de nouveaux cas, (iii) à mettre en rapport ces résultats avec les théories traditionnelles de la structure des taux. Nous prenons le parti d'étudier systématiquement, *et de manière isolée*, l'effet richesse et l'effet information, bien que ces deux effets agissent conjointement dans la réalité. Cette démarche analytique permet d'obtenir des résultats assez précis. Nous tenterons d'associer, dans chaque type d'économie envisagé, chacun de ces deux effets à une forme particulière de structure des taux (une courbe des taux « structurellement croissante » ou « structurellement décroissante »).

D'un point de vue théorique, les limites de cette approche sont en grande partie celles de la théorie standard. Les résultats obtenus sont tout simplement conditionnés par les hypothèses du modèle d'équilibre général. En particulier, les marchés sont supposés parfaits (il n'y a donc pas d'asymétrie d'information), et complets (tous les risques sont individuellement assurables). De plus, les individus sont supposés totalement rationnels, et parfaitement identiques. Ce dernier point renvoie à la fiction de l'individu représentatif, tant décriée. Bien entendu, ces contraintes seront évoquées, mais une critique approfondie de ces hypothèses constitue un travail en soi, et ne rentre pas dans la cadre de cette thèse. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'abondante littérature sur le sujet.

Cette thèse est organisée de la façon suivante.

Le premier chapitre traite des théories traditionnelles de la structure des taux. Nous étudions la célèbre théorie des anticipations, la théorie de la prime de liquidité, de la segmentation et de l'habitat préféré. Ces théories sont les premières à avoir considéré la hiérarchie des taux comme un objet d'analyse à part entière. Elles développent un certain nombre d'intuitions, relatives au rôle des anticipations et des préférences individuelles, qu'on retrouve dans les approches dites « modernes ».

Les deux chapitres suivants sont consacrés à l'étude de deux modèles d'équilibre intertemporel de la structure des taux. Ils se différencient par le concept d'équilibre employé : alors que le premier invoque un équilibre défini par l'absence d'opportunité d'arbitrage (« l'équilibre d'arbitrage »), le second exige l'égalité entre offres et demandes sur les marchés de biens et de titres (« l'équilibre général »). Si les concepts d'équilibre utilisés sont forts différents, ces deux modèles n'en sont pas moins parfaitement compatibles. Ils partagent les mêmes hypothèses de base (marchés parfaits, anticipations rationnelles, ...), décrivent l'incertitude de la même façon (à l'aide de *variables d'état* dont l'évolution dynamique est décrite par des processus aléatoires), et sont exprimés dans un formalisme identique (le calcul stochastique). En réalité, le modèle d'équilibre économique général *recouvre* totalement le modèle d'arbitrage, dans le sens où tous les résultats du dernier, se retrouvent dans le premier. La présentation du modèle d'arbitrage est motivée par des considérations d'ordre pédagogique, mais, avant tout, par le souci de ne pas attribuer au modèle d'équilibre général des résultats qui ne lui sont pas propres. Nous nous attachons, donc, à bien séparer ces deux modèles, tout en adaptant les notations et la présentation des équations, de façon à faciliter les comparaisons. Ce faisant, il devient alors possible d'évaluer l'apport spécifique d'une approche « économique » de la structure des taux, relativement à une approche purement « financière ». Cette présentation *en miroir* du modèle d'arbitrage et du modèle d'équilibre est originale. En ce sens, nous nous démarquons des présentations classiques, comme celle de Choe [1986], et espérons contribuer à faciliter la compréhension d'une littérature qui reste assez complexe, au moins dans sa forme.

L'étude du modèle d'équilibre général intertemporel nous permet d'examiner des propositions très générales, relatives à l'influence du comportement rationnel en incertitude sur les taux d'intérêt. Pour obtenir des propositions plus concrètes, nous étudions dans un quatrième chapitre, un modèle discret bipériodique, dans lequel la structure des taux dépend du contenu des messages susceptibles de parvenir sur les marchés. Comment mesurer le risque lorsque les individus souhaitent consommer à toutes les périodes futures ? Dans une économie d'échange, l'attente de la révéla-

tion d'un indicateur avancé de la richesse future peut-elle conduire les agents ayant de l'aversion pour le risque, à préférer certains bons ? Que ce passe-t-il, si, au contraire, aucun indicateur n'est susceptible de dissiper l'incertitude qui plane sur le futur ? Les réponses à ces questions sont-elles perturbées par l'introduction de l'investissement productif ? Qu'apporte le remplacement des aléas de dotation par des aléas technologiques ? Comment interpréter ces résultats, du point de vue des théories traditionnelles de la structure des taux ? Le quatrième chapitre aborde toutes ces questions.

Enfin, une conclusion générale dresse le bilan de cette recherche, et propose de possibles prolongements.

Chapitre 1

Les théories traditionnelles de la structure des taux

Section 1 Introduction

La structure par terme des taux d'intérêt acquiert le statut d'objet d'analyse à part entière vers la fin des années trente, sous l'impulsion notable de Hicks [1939] et Lutz [1940]. La littérature consacrée à ce sujet a ensuite crû de manière spectaculaire pendant plus de trois décennies, jusqu'à élever la hiérarchie des taux au rang des problèmes majeurs de la théorie financière. Ces trente années constituent « l'âge d'or » des théories traditionnelles de la structure des taux. Cette période s'achève au début des années soixante-dix, sous l'effet de la généralisation progressive de l'hypothèse des anticipations rationnelles. Cette hypothèse a notablement contribué à dissoudre les théories traditionnelles dans un corpus théorique plus large, centré autour de la question de l'efficience des marchés.

L'étude des théories traditionnelles permet de mieux comprendre un certain nombre d'intuitions qui sous-tendent encore les approches « modernes » de la structure des taux. Deux facteurs fondamentaux sont avancés par ces théories. Le premier facteur, lié aux anticipations des investisseurs, procède du simple raisonnement suivant : pour constituer un portefeuille obligataire, un investisseur s'intéresse aux rendements qu'il peut espérer obtenir dans l'avenir. Parce que ces rendements dépendent de la valeur future des taux d'intérêt, il doit composer son portefeuille en fonction de l'idée qu'il se fait de ces taux. Ce faisant, il contribue à la formation de la structure par terme courante, et cette structure dépend donc des anticipations. Le deuxième facteur relève des préférences individuelles. Si cet investisseur a de l'aversion pour le risque, il va se préoccuper de la période de temps pendant laquelle ses fonds sont disponibles. De même, un emprunteur potentiel va s'inquiéter de la durée du financement qu'il souhaite obtenir.

Ce chapitre, consacré à la présentation des théories traditionnelles, est organisé de la façon suivante. Suite à cette introduction, une section 2 présente un modèle très simple de structure des taux en univers certain. L'intérêt de ce modèle tient au fait qu'il a fortement conditionné la méthodologie des théories traditionnelles. Dans une section 3, nous présentons ces approches. Dans une section 4, nous examinons la confrontation de la théorie dominante avec l'hypothèse des anticipations rationnelles. Enfin, une section 5 clôt ce chapitre.

Section 2 La structure des taux en univers certain

2.1 Introduction

Un univers peuplé d'agents est qualifié « d'univers certain » lorsque ceux-ci ont une parfaite connaissance du futur. Dans le cadre d'un modèle formalisé, cette hypothèse signifie que les agents connaissent exactement les valeurs futures de toutes les variables prises en compte.

L'irréalisme de cette condition ôte quasiment toute pertinence aux résultats dérivés de ces modèles, si bien que leur exposé même peut apparaître comme superflu. Sur ce point, et à propos de la structure des taux en monde certain, Leroy [1982a, p.196] souligne que « Parce qu'en certitude, les taux de rendement sur les bons (et sur tout autre actif) sont égaux sur des intervalles comparables même lorsque les taux d'intérêt varient au cours du temps, les individus sont indifférents vis-à-vis de la maturité des bons qu'ils émettent ou détiennent. En conséquence, il n'y a rien d'intéressant à dire à propos de la relation entre des bons de maturité différente. »

Pourtant, dans le domaine de la structure des taux en particulier, les théories traditionnelles ont été construites sur la base de résultats obtenus en univers certain. Chacune d'elles s'est, en fait, positionnée par rapport au processus consistant à introduire l'incertitude dans le modèle certain : certaines ont affirmé qu'une telle transformation conservait l'essentiel des résultats, d'autres qu'elle conduisait à les altérer significativement. Le modèle de structure par terme en univers certain constitue un véritable « point de mire » pour les théories traditionnelles. En ce sens, son examen permet de mieux comprendre leur démarche générale.

Nous présentons ci-après les hypothèses de base du modèle, examinons son principe de fonctionnement, puis construisons un système d'équations exprimant directement la proposition centrale de la théorie des taux en univers certain. Nous étudions ensuite un système équivalent, liant de façon simple taux courts et taux longs. Enfin, nous analysons l'originalité du positionnement théorique de ce modèle.

2.2 Cadre d'analyse et principe de fonctionnement

Le modèle de structure des taux en univers certain, exposé par Lutz [1940, pp.36–41], analyse les conséquences du comportement d'agents rationnels opérant sur un marché de titres simplifiés.

Une première hypothèse fixe les caractéristiques des actifs échangés. Ces actifs sont des obligations sans coupon, supports naturels des taux d'intérêt.

Hypothèse 1 *Les titres échangés sont des obligations sans coupon, remboursées in fine, de valeur faciale unitaire, et de maturité $1, 2, \dots, N$ périodes. Ces titres ne se différencient que par leur durée de vie respective et leur taux de rendement.*¹

Les flux financiers générés par ces obligations sont on ne peut plus simples : une obligation de maturité n en t (on dira aussi *d'échéance $t + n$*) procure à son détenteur une unité monétaire en $t + n$.

Le *taux de rendement* à l'instant t d'un titre de maturité n , noté $R_t^{(n)}$, représente le *taux d'intérêt à n périodes en t* .² Le terme $R_t^{(n)}$ est défini comme le taux d'actualisation qui permet d'égaliser la valeur actuelle du flux financier généré (une unité en $t + n$) au cours du titre, noté $P_t^{(n)}$:

$$P_t^{(n)} \equiv \frac{1}{\left(1 + R_t^{(n)}\right)^n} \quad (2.1)$$

Plus intuitivement, $R_t^{(n)}$ s'interprète comme le taux d'une opération d'investissement renouvelé (un « *roll over* ») sur n périodes. Considérant qu'une unité monétaire permet d'acquérir $1/P_t^{(n)}$ bons de maturité n à l'instant t , l'équation (2.1) montre que cet investissement rapportera $\left(1 + R_t^{(n)}\right)^n$ unités en $t + n$, soit l'équivalent d'un investissement renouvelé à chaque période, au taux $R_t^{(n)}$. Pour $n = 1$, le taux de rendement est appelé « *taux court* », et est noté indifféremment $R_t^{(1)}$ ou r_t .

L'ensemble $\{R_t^{(n)}, n = 1, 2, \dots, N\}$ définit la *structure par terme des taux d'intérêt* à l'instant t . La structure des taux à un instant t donné peut être représentée à l'aide d'un graphique comme celui du schéma n°1. En abscisse de ce graphique, on porte la maturité n des bons sans coupon. En ordonnée, on lit leur taux de rendement $R_t^{(n)}$. Pour une maturité unitaire, ce taux est le *taux court* r_t .

Une deuxième hypothèse caractérise le marché sur lequel sont négociés ces titres.

¹Afin de se concentrer sur les problèmes théoriques, nous ne prendrons pas en compte la présence d'éventuels coupons. Ces paiements intermédiaires, versés avant échéance, compliquent singulièrement l'analyse (voir, par exemple, Shiller [1979], Shiller, Campbell et Schoenholtz [1983], ou Artus [1987]).

Traitant d'obligations sans coupon, on parlera indifféremment de *durée* (au sens de Macaulay [1938]) ou de *maturité*.

²Le « *taux de rendement* » constitue la traduction la plus simple du terme anglo-saxon *yield to maturity*. Dans la littérature, on trouvera également « *taux de rendement jusqu'à maturité* », « *taux de rendement interne* », ou encore « *taux de rendement actuel (ou actuariel)* ».

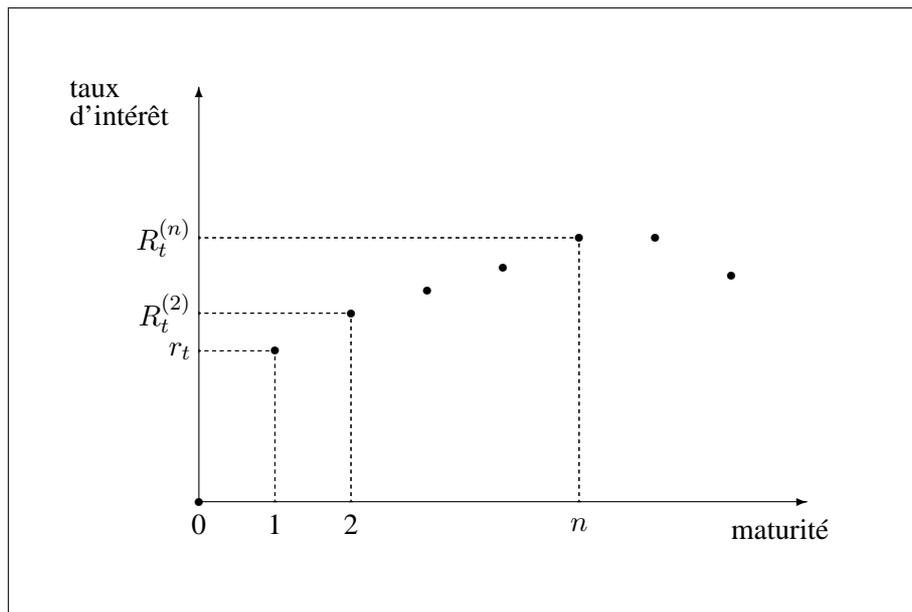


Schéma n°1 : Une structure par terme des taux d'intérêt en temps discret.

Hypothèse 2 *Le marché considéré est de type walrassien. Il n'existe aucune taxe ni coût de transaction. Le risque de non-remboursement (ou risque de défaut) est supposé nul, et le marché n'impose aucune restriction sur les ventes à découvert.*

Sur ce marché sans friction, l'investissement financier est donc parfaitement mobile entre les titres de durée de vie différente. Une troisième hypothèse explicite le comportement des acteurs.

Hypothèse 3 *Les acteurs de ce marché sont des prêteurs et des emprunteurs, rationnels et insatiables. Chaque prêteur (emprunteur) est caractérisé par l'intervalle de temps pendant lequel il souhaite prêter (emprunter), et le montant qu'il souhaite prêter (emprunter).*

Ces trois premières hypothèses constituent une base commune aux théories traditionnelles de la structure des taux.

Une dernière hypothèse, spécifique au modèle en univers certain, confère aux agents des qualités proprement surnaturelles.

Hypothèse 4 *Les agents ont une connaissance parfaite des taux passés, présents et futurs, c'est-à-dire des $R_t^{(n)}$, $\forall n = 1, \dots, N$, et $\forall t$.*³

³Contrairement aux apparences, cette hypothèse n'est pas de nature comportementale. En effet, dans le cadre d'un

Les agents évoluent donc dans un univers totalement dénué d'incertitude. À l'instant t , ils vont examiner les cours $P_t^{(1)}, \dots, P_t^{(N)}$ affichés par le marché. Compte tenu de leur parfaite connaissance du futur, ils peuvent réagir à cette structure des prix en vendant ou achetant des titres, provoquant ainsi en retour une modification des cours.

Ce processus converge vers un équilibre, caractérisé par l'égalité du rendement de toutes les stratégies d'investissement sur un intervalle de temps donné.⁴ Cela signifie qu'à l'équilibre, un prêteur disposant en t de fonds pour n périodes, obtiendra un rendement donné, quelle que soit la maturité des bons qui constituent son portefeuille entre les instants t et $t + n$.

Un exemple élémentaire permet de comprendre l'origine de ce résultat. Imaginons que les prix affichés par le marché à l'instant t sont tels que

$$\left(1 + R_t^{(2)}\right)^2 < \left(1 + R_t^{(1)}\right) \left(1 + R_{t+1}^{(1)}\right), \quad (2.2)$$

où $R_{t+1}^{(1)}$ est par hypothèse connu en t . Cette relation indique qu'il est moins intéressant de placer une somme donnée dans l'achat de bons à deux périodes détenus jusqu'à maturité, que d'investir cette même somme en bons à une période, puis de renouveler son investissement en achetant de nouveau des bons de maturité unitaire. Une telle situation révèle l'existence d'une opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire d'une stratégie conduisant de façon certaine à un gain net strictement positif.

Pour profiter de cette opportunité, il faut vendre des bons à deux périodes et acheter des bons à une période. Ainsi, à l'instant t , la vente d'un bon à deux périodes permet d'obtenir $P_t^{(2)}$ unités monétaires, somme qui permet d'acquérir immédiatement $P_t^{(2)}/P_t^{(1)}$ bons à une période. En $t + 1$, lorsque ces bons seront remboursés, les $P_t^{(2)}/P_t^{(1)}$ unités obtenues pourront être réinvesties dans $P_t^{(2)}/\left(P_t^{(1)}P_{t+1}^{(1)}\right)$ bons à une période, qui, eux-mêmes, rendront $P_t^{(2)}/\left(P_t^{(1)}P_{t+1}^{(1)}\right)$ unités au moment de leur échéance. Compte tenu des prix affichés, cette somme est strictement supérieure à l'unité, c'est-à-dire supérieure au montant du principal qu'il faudra rembourser au même moment sur le titre initialement vendu. On note que cette stratégie ne nécessite aucun apport personnel, si

modèle stochastique non-dégénéré, les valeurs futures des grandeurs aléatoires qui le caractérisent ne peuvent être connues avec une probabilité unitaire. Ainsi, la « connaissance exacte des taux futurs » implique la dégénérescence de leur loi de distribution, et, par là même, impose le caractère non-aléatoire du monde décrit.

Cette ambiguïté est très présente chez Lutz [1940, 1951], qui identifie « connaissance exacte du futur » et « prévisions parfaites ». Cette dernière notion fait explicitement référence aux capacités cognitives des agents.

⁴D'après la relation de définition (2.1), cet équilibre peut être exprimé indifféremment en terme de prix ou en terme de taux.

bien qu'elle représente une source de profits potentiellement infinie.

Mais, parce que « l'arbitrage tue l'arbitrage », cette source doit se tarir d'elle-même : la croissance de l'offre de titres à deux périodes provoque une diminution de $P_t^{(2)}$, et donc une augmentation de $R_t^{(2)}$. De même, la croissance de la demande de titres à une période induit une diminution de $R_t^{(1)}$.

Ce mouvement se poursuivra jusqu'à complète disparition de l'opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire jusqu'à ce que le marché affiche des taux $R_t^{(1)}$ et $R_t^{(2)}$ tels que

$$\left(1 + R_t^{(2)}\right)^2 = \left(1 + R_t^{(1)}\right) \left(1 + R_{t+1}^{(1)}\right). \quad (2.3)$$

Cet exemple illustre le processus qui conduit à l'égalisation du rendement de deux stratégies particulières, sur un intervalle de temps de longueur 2. Un raisonnement identique, reproduit pour toutes les stratégies possibles et pour tout $n = 1, \dots, N$, conduit à admettre l'identité du rendement de ces stratégies sur un intervalle de temps donné.

2.3 Équations d'équilibre

Cette dernière proposition définit de la manière la plus générale qui soit les conditions d'équilibre du modèle en univers certain. Ces conditions, exprimées sous forme d'équations, permettent d'exhiber des contraintes sur $R_t^{(1)}, \dots, R_t^{(N)}$, qui conditionnent la forme et la dynamique de la structure des taux. Pour obtenir ces équations, il faut examiner l'éventail des stratégies d'investissement possibles sur un intervalle de temps fixé.

D'une manière générale, la stratégie globale d'un investisseur disposant en t de fonds pour n périodes se construit à partir des trois stratégies de base suivantes (voir schéma n°2) :

1. acheter en t des titres de maturité $m_1 = n$, dont la date d'échéance correspond exactement à la fin de la période de disponibilité de ses fonds ($t + n$) ;
2. acheter en t des titres de maturité $m_2 < n$, attendre l'échéance ($t + m_2$) puis renouveler son investissement sur la période restante, c'est-à-dire entre $t + m_2$ et $t + n$;
3. acheter en t des titres de maturité $m_3 < n$, et les revendre en $t + d$, avant qu'ils n'arrivent à échéance, puis renouveler l'investissement entre $t + d$ et $t + n$ si les fonds sont encore disponibles (c'est-à-dire si $d \neq n$).

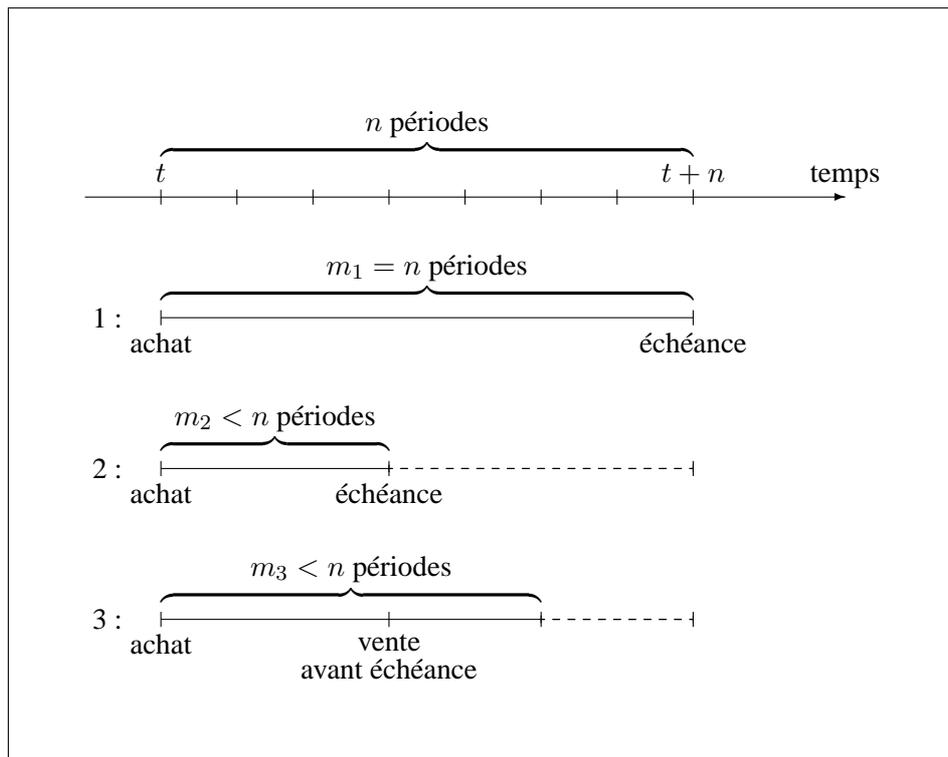


Schéma n°2 : Les stratégies de base d'investissement sur une période de longueur n .

À l'évidence, les stratégies de base 2 et 3 introduisent une récurrence qui fait croître rapidement le nombre total de possibilités lorsque la période de disponibilité s'allonge.

Pour construire les équations correspondant à ces stratégies, il suffit de raisonner à partir des seules possibilités offertes à un investisseur détenant un bon : celui-ci peut soit détenir le titre jusqu'à échéance, soit le revendre avant son terme. Appelons « opération de base » cette opération qui consiste à détenir un bon pendant un certain laps de temps. Une stratégie d'investissement sur un intervalle de temps $[t, t+n]$ peut s'analyser comme une succession de K opérations de base, indicées par $0, \dots, K-1$, avec $1 \leq K \leq n$.

Soit t_i la date de mise en œuvre de l'opération i . Cette opération se termine en $t_{i+1} > t_i$. Elle consiste à détenir pendant d_i périodes un bon de maturité T_i , où $d_i \equiv t_{i+1} - t_i$ et $T_i \geq d_i$ (voir schéma n°3). De plus, la première opération débute à l'instant $t_0 = t$, et la dernière se termine à l'instant $t_K = t+n$.

Il est possible d'exprimer très simplement le rendement de l'opération de base indicée par i , en

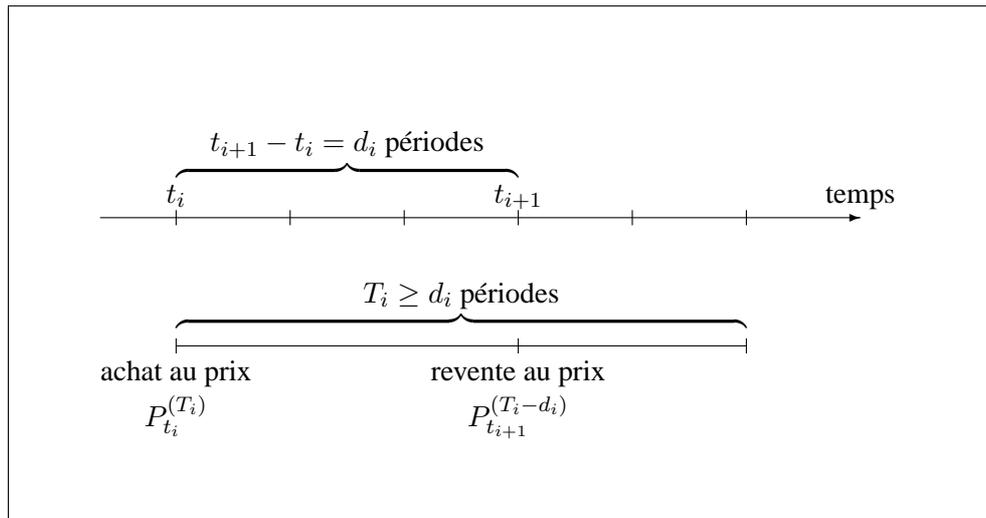


Schéma n°3 : Détail d'une opération de base dans une stratégie d'investissement

utilisant la notion de *taux de rendement sur n périodes*.⁵ Le taux de rendement en t , sur n périodes, d'une obligation de maturité m (avec $m > n$), est noté $\tilde{H}_{t,t+n}^{(m)}$. Il est défini comme le taux de rendement interne d'une opération qui consiste à acheter en t un bon de maturité m (donc au prix $P_t^{(m)}$), puis à la revendre n périodes plus tard. À cet instant, la maturité du bon initialement acheté s'est réduite à $m - n$, si bien que son prix de marché sera $P_{t+n}^{(m-n)}$.

Dans le cas d'obligations sans coupon, le taux de rendement sur n périodes est tel que :

$$\left(1 + \tilde{H}_{t,t+n}^{(m)}\right)^n \equiv \frac{\left(1 + R_t^{(m)}\right)^m}{\left(1 + \tilde{R}_{t+n}^{(m-n)}\right)^{m-n}}. \quad (2.4)$$

L'équation (2.4) permet d'exprimer le rendement des opérations de base qui forment une stratégie complexe d'investissement sur n périodes. Ayant engagé une unité monétaire dans l'opération de base indiquée par i , l'investisseur obtiendra un rendement égal à

$$\left(1 + \tilde{H}_{t_i,t_{i+1}}^{(T_i)}\right)^{d_i} = \frac{P_{t_{i+1}}^{(T_i-d_i)}}{P_{t_i}^{(T_i)}}. \quad (2.5)$$

Puisque le rendement d'une opération de base est toujours réinvesti, la somme obtenue au terme de la stratégie composée des K opérations de base s'exprime finalement comme le produit de leur

⁵Dans la littérature anglo-saxonne, l'expression correspondante est « *n-period holding yield* ».

rendement. La formule donnant toutes les équations d'équilibre du modèle en univers certain peut donc s'écrire, à l'instant t :

$$\frac{P_{t_1}^{(T_0-d_0)}}{P_{t_0}^{(T_0)}} \times \frac{P_{t_2}^{(T_1-d_1)}}{P_{t_1}^{(T_1)}} \times \dots \times \frac{P_{t_K}^{(T_{K-1}-d_{K-1})}}{P_{t_{K-1}}^{(T_{K-1})}} = \Pi_{t_0}^{(t_K-t_0)} \quad \forall t_0, t_K. \quad (2.6)$$

Dans cette équation, $\Pi_{t_0}^{(t_K-t_0)}$ représente un terme indépendant du nombre K d'opérations de base, des périodes de réinvestissement, t_1, \dots, t_{K-1} , et de la maturité des bons sélectionnés, T_0, \dots, T_{K-1} .

Le système d'équations (2.6) constitue une traduction littérale de la proposition centrale du modèle de structure par terme des taux d'intérêt en univers certain : le rendement d'un investissement sur n périodes ne dépend pas de la stratégie sélectionnée.⁶

Du point de vue de l'investisseur, les conséquences de (2.6) sont immédiates : disposant en t de fonds pour n périodes, il ne peut s'attendre à obtenir un rendement différent de $\Pi_t^{(n)}$, quelle que soit la composition de son portefeuille sur cet intervalle de temps. Ainsi, il ne peut être que totalement indifférent vis-à-vis de la maturité des titres qui s'offrent à lui. Dans ces conditions, les prêteurs et emprunteurs de fonds doivent considérer que les bons de maturité différentes sont de parfaits substituts.

2.4 Contraintes sur la structure des taux

Les contraintes qui pèsent sur la hiérarchie des taux peuvent être extraites du modèle précédent, à partir d'une formulation alternative des conditions d'équilibre.

Considérons à nouveau un investisseur disposant en t de fonds pour n périodes. À l'équilibre, toutes les stratégies qui s'offrent à lui doivent nécessairement lui procurer le même rendement. C'est le cas, en particulier, des deux stratégies « limites » suivantes :

1. placer à l'instant t tous ses fonds dans des obligations de maturité n . Par unité engagée, cet investissement en bons « longs » rapporte $\left(1 + R_t^{(n)}\right)^n$.

⁶Le rendement peut bien entendu varier avec la longueur de la période considérée. Le système (2.6) n'implique pas $\Pi_t^{(n)} = \Pi_t^{(m)}$ pour $n \neq m$.

2. placer à l'instant t tous ses fonds dans des obligations de maturité unitaire, au taux r_t . Réinvestir la somme obtenue en $t + 1$ dans des obligations de même maturité, au taux r_{t+1} , et ainsi de suite jusqu'à la fin de la période de disponibilité. Par unité engagée, cet investissement renouvelé en bons « courts » rapporte $(1 + r_t)(1 + r_{t+1}) \dots (1 + r_{t+n-1})$.

L'égalité du rendement de ces deux stratégies s'écrit donc :

$$\left(1 + R_t^{(n)}\right)^n = (1 + r_t)(1 + r_{t+1}) \dots (1 + r_{t+n-1}), \quad \forall t, \forall n \quad (2.7)$$

Ainsi, à l'équilibre, un taux long est une moyenne géométrique du taux court présent et des taux courts futurs.⁷

En fait, c'est autour de cette proposition — et de sa formulation en univers incertain — que s'organise principalement les analyses des théories traditionnelles de la structure des taux.

2.5 Un positionnement théorique original

L'aspect le plus frappant de ce modèle de structure des taux réside dans le fait qu'il semble être totalement autonome par rapport aux théories traditionnelles de l'intérêt. Pour démontrer ses propositions, Lutz n'a eu, à aucun moment, besoin de faire appel aux arguments couramment utilisés par ces théories, comme la préférence pour le présent, la préférence pour la liquidité, ou le taux de rendement du capital productif. Pourtant, la structure des taux comporte au moins un taux d'intérêt, et ne peut donc être absolument sans rapport avec les théories de l'intérêt.

En réalité, l'originalité du positionnement théorique du modèle de Lutz tient en ce qu'il présente le problème de la structure des taux comme étant parfaitement indépendant du problème d'un taux unique.

L'équation d'équilibre (2.7) peut être utilisée afin d'explicitier cette position. Elle permet, en particulier, d'écrire

$$\left(1 + R_t^{(n)}\right)^n = \left(1 + R_t^{(n-1)}\right)^{n-1} (1 + r_{t+n-1}), \quad (2.8)$$

⁷On montre facilement que cette dernière équation, pourtant beaucoup plus simple que l'équation générale (2.6), est en fait strictement équivalente.

soit encore

$$\frac{(1 + R_t^{(n)})^n}{(1 + R_t^{(n-1)})^{n-1}} = (1 + r_{t+n-1}). \quad (2.9)$$

Le membre gauche de (2.9) peut s'interpréter comme une mesure du *niveau relatif* de deux taux adjacents de la structure par terme. Ceci permet de présenter les conditions d'équilibre du modèle en univers certain sous la forme du système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + R_t^{(2)})^2 / (1 + R_t^{(1)}) = (1 + r_{t+1}) \\ (1 + R_t^{(3)})^3 / (1 + R_t^{(2)})^2 = (1 + r_{t+2}) \\ \vdots \\ (1 + R_t^{(N)})^N / (1 + R_t^{(N-1)})^{N-1} = (1 + r_{t+N-1}) \end{array} \right. \quad (2.10)$$

où les membres de gauche regroupent les N taux de la structure à l'instant t — exprimés en taux relatifs — et les membres de droite les $N - 1$ taux courts futurs, *supposés connus en t* . Il s'agit d'un système de $N - 1$ équations à N inconnues.

L'écriture (2.10) montre clairement que la théorie en univers certain est purement une théorie de la hiérarchie des taux d'intérêt : la donnée des taux courts futurs (membres de droite) permet de déterminer les niveaux relatifs des taux de la structure courante (membres de gauche), mais ne donne aucune information sur le niveau absolu auquel se situe cette structure.

Pour obtenir cette information, il est nécessaire et suffisant de connaître le niveau absolu *de l'un quelconque des taux courants*. Connaissant par exemple $R_t^{(n)}$, le n -ième taux de la structure, il suffit d'appliquer de façon récursive deux équations de récurrence tirées de (2.8). La première,

$$1 + R_t^{(n+1)} = \left[(1 + R_t^{(n)})^n (1 + r_{t+n}) \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad (2.11)$$

permet de déterminer les taux « à droite » : $R_t^{(n+1)}, \dots, R_t^{(N)}$. La seconde,

$$1 + R_t^{(n-1)} = \left[\frac{(1 + R_t^{(n)})^n}{(1 + r_{t+n-1})} \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad (2.12)$$

permet de déterminer les taux « à gauche » : $R_t^{(n-1)}, R_t^{(n-2)}, \dots, R_t^{(1)}$.

Le modèle en univers certain est ainsi fondé sur l'affirmation d'une indépendance totale entre *niveau* et *structure* des taux.

2.6 Conclusion

Le modèle de structure des taux présenté dans cette section est parfaitement cohérent, mais n'est évidemment pas réaliste. Sa fonction est de fournir un cadre méthodologique propice au développement d'une théorie originale de la structure des taux en univers incertain.

Utilisant un simple principe d'arbitrage, la théorie en univers certain énonce que la structure des taux doit être telle que le rendement obtenu au terme d'un investissement en obligations, sur une période de temps donnée, soit indépendant de la composition du portefeuille détenu. Dans ces conditions, un taux long est simplement égal à une moyenne géométrique du taux court présent et des taux courts futurs. Comme nous l'avons vu, cette contrainte détermine parfaitement le niveau relatif des taux entre eux, mais ne dit rien sur leur niveau absolu. De ce fait, ce modèle promeut implicitement une « division du travail » au sein des théories traitant du phénomène de l'intérêt. Les théories de l'intérêt sont, en quelque sorte, chargées d'expliquer le niveau d'un unique taux (par exemple, le taux court), et les théories de la structure des taux s'occupent des relations hiérarchiques entre une multiplicité de taux. Ce faisant, le modèle en univers certain consacre la naissance d'un champ théorique à part entière.

Section 3 Les premières théories de la structure des taux en univers incertain

3.1 Introduction

Suite aux travaux de Hicks et de Lutz à la fin des années trente, une littérature spécifiquement consacrée au problème de la hiérarchie des taux va progressivement se développer, jusqu'à devenir presque pléthore dans les années soixante. Cet âge d'or des théories de la structure des taux coïncide avec l'autonomie de son champ d'analyse, consacrée par le modèle en univers certain. Ceci explique la méthodologie générale adoptée (plus ou moins implicitement) par ces approches, consistant à *introduire* de l'incertitude dans ce modèle, et à se prononcer quant aux perturbations induites sur les résultats originaux.

Nous étudions dans cette section les principaux courants théoriques qui ont marqué la littérature de ces années.

3.2 La théorie des anticipations

La théorie des anticipations propose purement et simplement de « transposer » les résultats du modèle précédent en univers incertain, sans en modifier fondamentalement le contenu. Nous analysons une approche « naïve », consistant simplement à remplacer, dans les équations du modèle en univers certain, chaque taux futur par une prévision. Ce faisant, la théorie des anticipations affirme que les anticipations formées par les opérateurs du marché des obligations constituent l'unique facteur déterminant de la hiérarchie des taux d'intérêt.⁸

3.2.1 Une formulation « naïve »

Pour Lutz [1940], Meiselman [1962] et Malkiel [1966], la théorie des anticipations est obtenue en remplaçant l'hypothèse 4 du modèle en univers certain par

Hypothèse 4' *Les agents sont neutres vis-à-vis du risque.*

⁸En toute rigueur, la proposition selon laquelle les prévisions des investisseurs conditionnent la physionomie courante de la structure des taux ne peut être attribuée aux fondateurs « officiels » de la théorie des anticipations. On trouve une intuition identique dans Fisher [1896, pp.23–29, 88–92, et 1930, p.70].

et en ajoutant

Hypothèse 5 *Les agents ont des anticipations homogènes.*

Appelons ${}_eR_{t,t+n}^{(m)}$ une anticipation, formée en t , à propos de la valeur de $\tilde{R}_{t+n}^{(m)}$ (c'est-à-dire du taux à m périodes dans n périodes), et ${}_e r_{t,t+n}$ une anticipation en t de \tilde{r}_{t+n} .

Les équations d'équilibre sont obtenues selon le principe suivant. Imaginons que les taux $R_t^{(1)}$, $R_t^{(2)}$ affichés par le marché, ainsi que l'anticipation ${}_eR_{t,t+1}^{(1)}$ d'un agent quant au taux court de la période suivante, soient tels que

$$\left(1 + R_t^{(2)}\right)^2 < \left(1 + R_t^{(1)}\right) \left(1 + {}_eR_{t,t+1}^{(1)}\right). \quad (3.1)$$

D'après l'hypothèse 4', cet agent ne se préoccupe pas du caractère risqué de l'opération d'investissement renouvelé. La relation (3.1) l'incite donc à vendre des titres à deux périodes pour se porter acquéreur de titres courts. L'hypothèse 5 indique que tous les agents agiront dans le même sens, ce qui conduit sans ambiguïté à une baisse du taux court et une hausse du taux à deux périodes, jusqu'à égalisation du taux de rendement des deux stratégies d'investissement.

Cet exemple montre bien que ce modèle fonctionne de la même façon que sa version en univers certain, c'est-à-dire sur la base de mécanismes d'arbitrage. Le résultat principal est donc tout à fait similaire : sur un intervalle de temps donné, le rendement *espéré* de toute stratégie d'investissement est identique, et ceci pour tout intervalle de temps.

Les équations d'équilibre du modèle sont obtenues en remplaçant simplement dans les équations du modèle précédent chaque taux futur par son anticipation. Deux formulations particulièrement intéressantes ont été proposées dans la littérature.

En premier lieu, l'équation (2.7) se transforme en

$$\left(1 + R_t^{(n)}\right)^n = (1 + r_t) (1 + {}_e r_{t,t+1}) \cdots (1 + {}_e r_{t,t+n-1}). \quad (3.2)$$

Elle indique qu'un taux long est une moyenne géométrique du taux court actuel et des taux courts anticipés.

En second lieu, on peut exprimer la théorie des anticipations à l'aide de la notion de *taux à terme implicite*. Cette notion est basée sur l'idée qu'il est possible de construire, à un instant donné, un portefeuille d'obligations qui permet de déterminer, à l'avance, le taux de rendement interne d'un prêt sur une période quelconque future. Pour fixer à l'instant t le taux d'un prêt de durée m en $t+n$, on procède de la façon suivante : on achète un bon d'échéance $t+n+m$, de prix $P_t^{(n+m)}$, et on vend au même moment $P_t^{(n+m)}/P_t^{(n)}$ bons d'échéance $t+n$, de prix unitaire $P_t^{(n)}$. Le produit de cette vente compense exactement la dépense liée à l'achat du bon de maturité $n+m$. Les flux engendrés par ce portefeuille seront les suivants : en $t+n$, il faudra rembourser $P_t^{(n+m)}/P_t^{(n)}$ francs sur les bons vendus, et on recevra en $t+n+m$ francs du bon acheté. Au total, on a construit à l'instant t un bon fictif, de maturité m en $t+n$, et de prix $P_t^{(n+m)}/P_t^{(n)}$. Si $F_{t,t+n}^{(m)}$ désigne le taux de rendement interne de cette obligation fictive, on a donc

$$\left(1 + F_{t,t+n}^{(m)}\right)^m \equiv \frac{\left(1 + R_t^{(n+m)}\right)^{n+m}}{\left(1 + R_t^{(n)}\right)^n}. \quad (3.3)$$

Pour $m = 1$, on notera $F_{t,t+n} \equiv F_{t,t+n}^{(1)}$. Pour tout n et m , les taux à terme implicites $F_{t,t+n}^{(m)}$ sont simplement *calculés* à partir de la structure des taux à l'instant t .⁹

En comparant cette équation avec (3.2) écrite sous la forme

$$\left(1 + {}_eR_{t,t+n}^{(m)}\right)^m = \frac{\left(1 + R_t^{(n+m)}\right)^{n+m}}{\left(1 + R_t^{(n)}\right)^n}, \quad (3.4)$$

on voit que la théorie des anticipations affirme que

$${}_eR_{t,t+n}^{(m)} = F_{t,t+n}^{(m)}, \quad (3.5)$$

c'est-à-dire qu'il existe une parfaite identité entre les anticipations des investisseurs concernant les taux futurs, et les taux à terme implicites correspondants.

La formule (3.2) permet d'associer à un ensemble d'anticipations une forme particulière de structure des taux. On retiendra notamment les cas typiques suivants :

⁹La formule (3.3) est de Keynes [1936, chapitre 13].

- si les agents n'anticipent aucune variation du taux court dans l'avenir, la structure des taux est plate et se situe au niveau du taux court actuel ;
- si les agents anticipent une hausse (baisse) entretenue du taux court, la courbe des taux est ascendante (descendante) ;
- si les agents anticipent une hausse puis une baisse du taux court, on obtient une courbe « en cloche ».

De plus, on remarque qu'une simple procédure récursive permet de faire le chemin inverse : constatant une structure des taux à un instant donné, on peut déduire un ensemble unique d'anticipations de taux courts. La formule (3.4) permet de calculer les anticipations du marché quant à l'évolution future de la structure des taux, à partir de la structure courante $\{R_t^{(1)}, \dots, R_t^{(N)}\}$. On voit qu'une courbe plate témoigne d'anticipations de maintien du taux court à son niveau actuel, une courbe ascendante (descendante) révèle des anticipations haussières (baissières), *etc.*

La théorie des anticipations propose donc un schéma d'interprétation très simple, fondé exclusivement sur les prévisions des investisseurs.

3.2.2 Théorie des anticipations et arbitrage

À l'aide des hypothèses 4' et 5, la théorie des anticipations réussit, semble-t-il, à transposer en univers aléatoire le modèle en univers certain, tout en conservant, presque à l'identique, l'ensemble de ses résultats. Toutefois, on peut légitimement s'interroger sur la place qui est faite à l'incertitude dans ce modèle.

Formellement, la transposition du modèle en univers incertain conduit à remplacer toutes les variables futures par des variables aléatoires.¹⁰ L'incertitude est alors liée au caractère stochastique de ces variables, qui, même si leur loi de probabilité est parfaitement connue, impose une probabilité d'erreur de prévision ponctuelle non-nulle.

Pour réaliser cette transposition, il est nécessaire de se poser les deux questions suivantes :

1. De quelle façon les agents perçoivent-ils l'incertitude ?

¹⁰On élimine bien sûr le cas des variables aléatoires certaines, qui prennent une seule valeur, avec une probabilité unitaire.

2. Comment les agents réagissent-ils à cette incertitude ?

La première question fait référence à la connaissance qu'ont les agents du monde stochastique qui les entoure, c'est-à-dire des densités de probabilité (conditionnelles ou non) des variables aléatoires qui le caractérise. La seconde question concerne l'évaluation, éventuellement monétaire, de l'incertitude par les agents, comme guide de leurs actions.

La théorie des anticipations évite la critique directe liée à l'utilisation de l'hypothèse de prévisions parfaites, en reconnaissant la possibilité d'erreurs de prévision. Elle répond en fait aux deux questions ci-dessus de la façon suivante :

1. les agents sont conscients de l'incertitude, et la perçoivent d'une manière quelconque ;
2. quelle que soit l'incertitude perçue, les agents ne réagissent pas. En d'autres termes, la possibilité d'erreurs de prévision ne modifie pas leur comportement.

Dans le cadre de ce modèle, il est donc indifférent pour un agent d'effectuer une opération risquée (une série d'achats de titres courts) et une opération non-risquée (l'achat d'un titre de maturité exactement égale à la période de disponibilité de ses fonds).

Mais supposer que l'incertitude est négligée par les agents, dans le cadre de modèles qui traitent essentiellement de comportements individuels, peut être considéré comme une acrobatie intellectuelle. Introduire l'incertitude (par 1 ci-dessus) pour neutraliser immédiatement ses conséquences théoriques fondamentales (par 2) revient à faire un pas en avant suivi d'un pas en arrière. Ceci laisse à penser que l'hypothèse de neutralité vis-à-vis du risque ne peut en aucun cas être considérée comme utile pour la réinterprétation des modèles certains en univers stochastique.

En fait, il semble que la théorie des anticipations ait simplement cherché à affirmer son autonomie vis-à-vis des théories de l'intérêt. Pour ce faire, il lui a fallu « importer » du modèle en univers certain le mécanisme essentiel qui avait permis de fonder cette autonomie, à savoir *l'arbitrage*. Dans cette optique, l'hypothèse de neutralité ainsi que l'hypothèse d'homogénéité des anticipations sont perçues comme des vecteurs de cette importation.

Parce que l'axiome de non-satiété suffit à justifier son utilisation, le mécanisme d'arbitrage permet de rejeter en dehors du champ d'analyse les racines véritablement économiques des com-

portements individuels : l'appât du gain est la seule caractéristique comportementale individuelle nécessaire à l'obtention des résultats énoncés par la théorie des anticipations.

À première vue, cette conclusion semble entrer en contradiction avec la troisième hypothèse du modèle (voir page 18), qui confère à chacun des acteurs une motivation économique précise : prêteurs ou emprunteurs, les agents se présentent sur le marché pour investir ou lever une certaine somme, pour une période de temps donnée. Chacun d'eux se comporte donc comme un consommateur, soucieux de gérer sa consommation prévisionnelle, ou comme un producteur, désireux de financer un processus productif, ou encore comme tout autre acteur jouant un rôle économique bien identifié.

Toutefois, ces caractéristiques ne contribuent en aucune manière au processus de convergence vers l'équilibre, et, par voie de conséquence, l'équilibre défini par (3.2) ne dépend absolument pas d'elles.¹¹ En fait, les motivations des acteurs sont uniquement utilisées pour *interpréter* la situation obtenue : *étant donné* le système d'équations (3.2), un prêteur (un emprunteur), désireux de prêter (emprunter) des fonds sur n périodes, recevra (paiera) un rendement égal à $\Pi_t^{(n)}$, indépendamment de la stratégie qu'il mettra en œuvre. L'équilibre défini par la théorie des anticipations résulte donc de l'activité d'arbitragistes, *anonymes et totalement indifférenciés*.

Mais, si l'arbitrage permet à la théorie des anticipations d'asseoir son autonomie, il n'en reste pas moins qu'elle tente d'appliquer à des variables aléatoires un principe de raisonnement construit pour être uniquement appliqué à des variables déterministes. Pour cette raison, on peut douter de sa pertinence.

Ces réflexions appellent une théorie capable de prendre en compte les conséquences spécifiques de l'incertitude.

3.3 La théorie de la prime de liquidité

Hicks [1939] a été le premier à proposer une théorie achevée de la structure des taux dans un monde peuplé d'agents non-indifférents vis-à-vis du risque. Son analyse est, fondamentalement,

¹¹L'égalisation du rendement des stratégies de « longueur » n a parfois été présentée comme le résultat d'un processus de réallocation de portefeuille, opéré par des investisseurs disposant de fonds pour n périodes. Pourtant, rien ne permet de justifier que ces investisseurs soient plus concernés que d'autres par des opportunités d'arbitrage sur n périodes. En conséquence, cette intrusion artificielle des périodes de disponibilité dans le processus de convergence vers l'équilibre s'évanouit d'elle-même dès l'écriture de la solution du modèle.

une application de la théorie du déport normal keynésien au problème de la structure des taux. Après avoir exposé la théorie du déport normal, nous examinons les concepts de « risque en capital » et de « risque en revenu ». Sur ces bases, nous présentons alors le modèle de Hicks.

3.3.1 La théorie du déport normal

Le *déport normal* est un concept issu de la théorie keynésienne (voir, en particulier, Keynes [1930, pp.142–144]). Il représente la différence, constatée à un moment donné, entre le prix au comptant et le prix à terme d'une marchandise, lorsque les agents économiques s'attendent à ce que les conditions de l'offre et de la demande restent inchangées. Cette différence est considérée comme normalement positive : en l'absence de prévisions haussières ou baissières, le prix à terme sera toujours inférieur au prix au comptant.

Le montant de ce déport s'explique par le comportement de deux catégories d'agents :

- les entrepreneurs, qui sont davantage préoccupés par l'incertitude des ventes que par l'incertitude de leurs approvisionnements. D'après la théorie, ce comportement est lié au caractère difficilement réversible des investissements industriels : « Les conditions techniques laissent à l'entrepreneur une bien plus grande liberté d'action, en ce qui concerne l'acquisition de facteurs de production, destinés principalement à lancer de nouvelles fabrications, que lorsqu'il s'agit de terminer une production, quand le processus de production (au sens industriel) est déjà engagé. » (Hicks [1939]). Ceux-ci sont donc plus enclins à se couvrir par des ventes à terme que par des achats à terme.

Le marché à terme de marchandises est donc caractérisé par une « faiblesse constitutionnelle » de la demande, qui place potentiellement son prix d'équilibre en dessous du prix au comptant ;

- les spéculateurs, qui peuvent profiter de cet écart de prix en achetant à terme et en revendant ensuite au comptant (on suppose qu'ils n'anticipent aucun changement sur le marché au comptant). Ces opérations tendent à faire remonter le prix à terme, jusqu'au point où le profit escompté ne justifie plus le risque qu'ils prennent, lié aux variations possibles des prix au comptant.

Au total, la différence entre le prix au comptant et le prix à terme représente donc, en situation

« normale », le montant que les entrepreneurs (qui souhaitent se couvrir) doivent verser aux spéculateurs afin qu'ils acceptent de s'exposer au risque de fluctuation des prix. Ce montant est appelé le déport normal.

3.3.2 La prime de liquidité

Pour Hicks, cette analyse peut être transposée au marché à terme du crédit (voir essentiellement Hicks [1939, chapitre 11]). Des comportements analogues expliqueraient une situation identique, caractérisée par une faiblesse relative de la demande de titres longs.

La théorie de Hicks est fondée sur une distinction entre deux types de risque. L'incertitude sur les taux futurs crée, en effet, pour les prêteurs :

- un « risque en capital », pris en compte par ceux qui envisagent la possibilité de revendre des obligations avant leur remboursement final. Le prix auquel pourra se réaliser cette transaction étant inconnu aujourd'hui, ces prêteurs s'exposent à un risque de perte sur les sommes initialement investies. On remarque que la détention d'une obligation dont la maturité correspond exactement à la période de disponibilité des fonds, est sans risque de ce point de vue ;
- un « risque en revenu », lié à la possibilité d'achat d'obligations dans le futur, qui serviront un taux encore inconnu aujourd'hui.

Compte tenu de ceci, la situation d'un prêteur potentiel, disposant en t de fonds pour n périodes, peut être présentée ainsi :

- il peut investir ses fonds dans l'achat d'obligations à une période, puis renouveler cette opération à la période suivante, et ainsi de suite jusqu'à la période $t + n - 1$. Cette stratégie permet d'éliminer totalement le risque en capital (la somme récupérée sur les obligations acquises est toujours connue au moment de l'achat), mais comporte un risque en revenu (les taux courts futurs sont inconnus en t) ;
- il peut investir ses fonds dans l'achat d'obligations de maturité supérieure à n . Le risque en revenu est alors nul (le taux porté par cette opération est parfaitement connu en t), mais le risque en capital ne l'est pas (le prix de marché de ces obligations en $t + n$ est aléatoire) ;

- il peut choisir d'acheter des obligations dont la durée correspond exactement à la période de disponibilité de ses fonds. Cette stratégie élimine à la fois le risque en capital et en revenu ;
- il peut mettre en œuvre une stratégie mixte, comportant à la fois un risque en capital et un risque en revenu.

Le raisonnement est bien sûr dual pour les emprunteurs.

La théorie de Hicks s'exprime alors sur la base des deux propositions suivantes :

1. les emprunteurs ont tendance à offrir des obligations à durée de vie longue, de façon à limiter l'incertitude liée aux émissions successives nécessitées par le financement à court terme d'un investissement à long terme ;
2. les prêteurs sont particulièrement soucieux du risque de perte en capital, et donc marquent une nette préférence pour l'achat d'obligations de courte durée, théoriquement moins sensibles aux variations de taux d'intérêt. En d'autres termes, les prêteurs témoignent d'une certaine préférence pour la liquidité, qui les conduit à se préoccuper des conditions dans lesquelles pourrait se réaliser à court terme une conversion de leurs actifs en monnaie.

On peut alors conclure que les emprunteurs doivent nécessairement offrir une prime de risque en capital, ou « prime de liquidité », aux prêteurs, de façon à les inciter à opérer sur le marché des titres longs.¹²

La deuxième proposition appelle une justification : elle suppose, en effet, l'existence d'une relation positive entre le risque en capital et la durée de vie d'une obligation. Cette relation est explicitement acceptée par Hicks [1939] : « Toutes choses égales par ailleurs, un individu qui s'engage sur un emprunt à long terme, s'expose à des risques plus grands que s'il s'en était abstenu. » Comment justifier ceci ?

En première analyse, on peut utiliser la notion de *sensibilité* d'une obligation comme une mesure du risque en capital. La sensibilité en t d'un bon sans coupon et de maturité n , notée $S_t^{(n)}$, est

¹²La théorie de la prime de liquidité est implicite dans l'œuvre de Keynes. Dans le chapitre 13 de la Théorie Générale, il considère l'achat d'une créance de maturité n : « Si donc il n'est pas exclu qu'un besoin d'argent liquide puisse apparaître avant l'expiration des n années, on s'expose à un risque de perte quand au lieu de garder de l'argent liquide on achète une créance à long terme, qu'on pourra être obligé plus tard de convertir en argent liquide. Le profit actuariel, ou l'espérance mathématique de gain, calculée sur la base des probabilités existantes — si ce calcul est possible, ce qui est douteux — doit suffire à compenser le risque de perte. »

définie comme le pourcentage de variation du cours du bon, associé à une augmentation de un point de son taux de rendement interne. Elle est donnée par :

$$S_t^{(n)} = -\frac{n}{(1 + R_t^{(n)})} \quad (3.6)$$

et montre bien que le cours d'un bon est d'autant plus sensible aux variations de son taux de rendement que sa maturité est grande. On peut donc *a priori* considérer que le risque de perte en capital, dû aux variations du cours d'une obligation, est relié positivement à sa durée pour une augmentation donnée du taux d'intérêt correspondant. Hicks admet une telle relation. Il considère un investisseur prêtant à court terme en achetant une obligation à long terme, et conclut que « s'il se produit une hausse importante du taux d'intérêt à long terme, le rendement effectif peut être entièrement anéanti. »

En définitive, l'important est que les agents perçoivent une telle relation, et qu'ils considèrent donc effectivement la détention d'obligations longues comme une opération très risquée.

3.3.3 Prime de liquidité et structure des taux

Quelles sont les conséquences de cette analyse en ce qui concerne la structure par terme des taux d'intérêt ?

Fondamentalement, Hicks est en accord avec l'enseignement de la théorie des anticipations, à savoir qu'un taux d'intérêt à n périodes est fonction d'anticipations de taux d'échéance plus courte, et, en particulier, de taux courts. Dans l'analyse de Hicks, ce résultat n'est que marginalement perturbé par la présence de primes de risque.

Son raisonnement, conduit principalement à partir des taux à terme, est sensiblement différent de celui de Lutz. Hicks considère, en effet, un marché de bons sans coupon, affichant à l'instant t deux types de taux :

- les taux au comptant $\{R_t^{(1)}, \dots, R_t^{(N)}\}$ pour des emprunts payables en t , et remboursables en $t + 1, t + 2, \dots, t + N + 1$. Ces taux forment, par définition, la structure des taux à l'instant t .
- les taux à terme $\{F_{t,t+1}, \dots, F_{t,t+N-1}\}$ pour des emprunts sur une période, payables en

$t + 1, t + 2, \dots, t + N - 1$, et donc remboursables en $t + 2, t + 3, \dots, t + N$.

Considérons maintenant un investisseur disposant d'un certain capital sur deux périodes. Il peut effectuer (entre autres) les deux opérations suivantes :

- prêter son capital au taux comptant $R_t^{(2)}$, et ainsi toucher $(1 + R_t^{(2)})^2$ francs, par franc investi ;
- prêter son capital sur une période au taux r_t , et s'engager en même temps à prêter pour une période le produit de ce prêt (qui sera égal à $1 + r_t$), à la période suivante, c'est-à-dire nouer un contrat à terme au taux $F_{t,t+1}$. Cette opération lui rapporte donc $(1 + r_t)(1 + F_{t,t+1})$ francs par franc investi.

Si on exclut la possibilité de non-remboursement, ces deux opérations sont sans risque. Des opérations d'arbitrage doivent donc conduire à l'égalité du rendement des deux stratégies :

$$(1 + R_t^{(2)})^2 = (1 + r_t)(1 + F_{t,t+1}). \quad (3.7)$$

De façon générale, le marché doit satisfaire, pour tout n , l'égalité :

$$(1 + R_t^{(n)})^n = (1 + r_t)(1 + F_{t,t+1}) \cdots (1 + F_{t,t+n-1}). \quad (3.8)$$

La théorie du déport normal est alors appliquée aux taux à terme $\{F_{t+1}, \dots, F_{t,t+n-1}\}$: un taux à terme pour une période $t + n$ doit nécessairement être supérieur au taux prévu par les prêteurs en t pour la période $t + n$, de façon à rémunérer le risque que ces derniers supportent en pariant sur la valeur future d'un taux au comptant. Cette différence est exactement égale au déport normal défini plus haut, exprimé en terme de taux. Si on note $L_t^{(n)}$ la prime de risque (positive) exigée en t par les prêteurs sur le n -ième taux à terme, on peut écrire :

$$F_{t,t+n} = e r_{t,t+n} + L_t^{(n)}. \quad (3.9)$$

Ainsi, lorsque les opérateurs anticipent une stabilité du taux court, les taux courts à terme sont normalement plus élevés.

Les équations d'équilibre pour les taux d'intérêt s'écrivent alors :

$$\left(1 + R_t^{(n)}\right)^n = (1 + r_t) \left(1 + e r_{t,t+1} + L_t^{(1)}\right) \cdots \left(1 + e r_{t,t+n-1} + L_t^{(n-1)}\right). \quad (3.10)$$

Dans l'optique de Hicks, ces primes en t doivent être nécessairement croissantes avec leur indice n , parce qu'elles correspondent, pour les prêteurs, à la détention d'obligations de durée de vie d'autant plus grande, comportant donc un risque en capital plus important. Si on accepte que

$$0 < L_t^{(1)} < L_t^{(2)} < \cdots < L_t^{(n-1)}, \quad (3.11)$$

alors la structure des taux hicksienne est toujours au-dessus de la structure lutzienne. En particulier, l'allure « normale » de la courbe des taux (c'est-à-dire en période de stabilité des anticipations) est croissante.

Le modèle de Hicks a soulevé un nombre considérable de critiques dans les années cinquante et soixante. Considérant que les hypothèses de comportement qui permettent de conclure à l'existence d'une prime de liquidité ne sont pas justifiées, certains auteurs vont développer des théories concurrentes.

Parmi celles-ci, trois sont particulièrement remarquables. Les deux premières sont intéressantes parce qu'elles montrent que la prise en compte de l'incertitude peut conduire à des modèles de structure par terme complètement contradictoires : alors que le modèle de Culbertson infirme totalement la théorie des anticipations, Meiselman tente de la réhabiliter dans sa version la plus pure. La troisième approche, développée par Modigliani et Sutch, se singularise en proposant un modèle synthétique de résultats apparemment inconciliables.

3.4 La théorie de la segmentation

Dans la théorie des anticipations, les liaisons entre les divers compartiments du marché des actifs (du plus court au plus long) sont assurées par des comportements individuels, motivés par des prévisions. Remettre en cause la prééminence de ce type de comportement conduit à s'interroger sur l'existence même d'une structure par terme des taux d'intérêt.

Pour Culbertson [1957, 1965], les décisions des acteurs du marché des titres ne peuvent être considérées comme fondamentalement liées à des prévisions. Refusant l'universalité de ce postulat de

la théorie des anticipations, Culbertson développe une analyse plus empirique des comportements.

Cette analyse, qualifiée par son auteur de « réaliste », tend à montrer que le comportement spéculatif (basé sur des anticipations de taux) n'est qu'un phénomène marginal sur le marché des titres. Considérant qu'une opération spéculative est, avant tout, un pari sur le futur, comportant un risque de perte comme un risque de gain, un acteur cherchant à éviter ce « jeu de hasard » ne peut être considéré comme irrationnel. Cette motivation tend à limiter la substituabilité des titres entre les marchés, en spécialisant l'offre et la demande sur des segments particuliers :

- l'investisseur, cherchant à assurer la sécurité de son financement, aura tendance à aligner la maturité de sa dette sur la période de temps pendant laquelle ces fonds lui sont nécessaires. Cette opération lui permet d'éviter tout risque lié à l'émission de titres plus courts, qu'il serait obligé de renouveler à des conditions incertaines ;
- le prêteur, contraint par des besoins futurs de liquidité, peut sélectionner un portefeuille dont la structure de maturité lui assure une disponibilité correspondante. Ainsi, si le prêteur de fonds a correctement prévu ses besoins de liquidité, il n'aura pas à prendre de nouvelle position sur le marché.

Ces comportements sont similaires, dans le sens où ils conduisent les prêteurs comme les emprunteurs à équilibrer la maturité de l'actif et du passif de leur bilan. Pour Culbertson, cette attitude est celle de la majorité des institutions financières présentes sur le marché.

Cette approche n'exclut donc pas le comportement spéculatif, mais elle en limite l'étendue, si bien que « ... les marchés de la dette ne sont pas dominés par des comportements orientés par des anticipations, d'une telle manière que de larges changements dans la structure par terme des taux d'intérêt puissent généralement être interprétés comme reflétant des changements dans les prévisions de marché. » (Culbertson [1957, pp.501–502]). En définitive, l'activité spéculative ne constituerait qu'un effet net de très court terme, quasi-marginal dans la détermination des taux.

Il serait injuste de limiter l'analyse de Culbertson à cette étude des comportements. Les « facteurs institutionnels », qui tendent à limiter la substituabilité des actifs, font partie intégrante de son raisonnement. Toutefois, notre objectif est avant tout de comparer les diverses théories du point de vue du traitement de l'incertitude, concrétisé par des hypothèses relatives à l'attitude des opérateurs vis-à-vis du risque.

Dans cette optique, l'hypothèse principale de l'analyse de Culbertson est la suivante : les opérateurs, tant prêteurs qu'emprunteurs, sont aussi sensibles au risque en capital qu'au risque en revenu. Cette attitude conduit à une spécialisation relativement rigide des offres et des demandes sur des termes particuliers.

Si on supprime dans cette dernière phrase le terme « relativement » (ce qui est, par ailleurs, tout à fait contraire à la méthodologie de Culbertson), on obtient une « théorie de la segmentation » : le marché des titres est alors constitué d'une série de segments (ou de « compartiments »), chacun correspondant à un terme différent. Chaque segment fixe un prix de marché pour les titres ayant une certaine durée de vie, par confrontation des offres et demandes primaires, indépendamment des autres segments. Cette théorie remet donc en cause l'existence même d'une *structure* des taux d'intérêt, puisque l'évolution des taux d'échéance différente est totalement indépendante.

3.5 Une tentative de réhabilitation de la théorie des anticipations

Selon la théorie de la segmentation, la prise en compte simultanée du risque en capital et en revenu, par les prêteurs et emprunteurs, conduit à la négation du principe selon lequel la structure des taux est déterminée par les anticipations du marché.

Pour Meiselman [1962] ou Wood [1963], cette vision est erronée, parce qu'elle sous-estime le rôle des spéculateurs. Si on admet, en effet, qu'il existe effectivement un grand nombre d'institutions marquant une nette préférence pour certaines maturités, on peut également considérer que la présence de quelques spéculateurs peut conduire à restaurer une dépendance des taux entre eux. Pour que cet effet soit significatif, il suffit qu'ils soient relativement nombreux, ou bien encore qu'ils disposent de fonds relativement importants. Ces spéculateurs, lorsqu'ils constateront une différence assez grande entre les taux offerts par le marché et les taux apportés par des stratégies basées sur leurs anticipations, vont effectuer des achats et des ventes de titres d'échéance différente, provoquant ainsi une variation conjointe de leurs taux.

Ces arguments pourraient constituer une défense de l'analyse hicksienne. Mais Meiselman rejette également la théorie de la prime de liquidité, en soulignant que certaines institutions pourvoyeuses de fonds sont davantage préoccupées par la stabilité de leurs revenus que par la stabilité de leur capital. On peut citer, par exemple, le cas des compagnies d'assurance, qui marquent une nette préférence pour l'achat de titres longs. En conséquence, la demande pour ces titres n'a aucune

raison d'être considérée comme « normalement plus faible » que l'offre. Dans ces conditions, un demandeur de titres ayant une préférence pour le court terme ne peut exiger une prime de risque pour acheter des titres longs, parce qu'un autre demandeur, sensible au risque en revenu, n'en exigera aucune. Le même raisonnement est applicable à une éventuelle prime de risque en revenu, si bien qu'on doit conclure à la disparition totale de toute prime de risque.

Meiselman défend donc la théorie des anticipations de Lutz, en affirmant que l'abandon de l'hypothèse de neutralité n'affecte pas ses résultats.

3.6 La théorie synthétique de l'habitat préféré

Deux thèses extrêmes s'affrontent donc. L'une affirme que la segmentation du marché est totale, l'autre soutient qu'elle est nulle. Mais n'est-il pas possible de définir une position intermédiaire, qui puisse prendre en compte un « degré de segmentation », qui ne soit ni nul, ni infini ?

Modigliani et Sutch [1966, 1967 et 1969] sont les premiers à tenter cette synthèse, au sein d'une théorie baptisée « théorie de l'habitat préféré ».

Elle est présentée ainsi par ses auteurs : « La théorie de l'habitat est à la base une adaptation de la théorie des anticipations de la structure des taux d'intérêt en incertitude, dans un monde où (1) les taux futurs sont en fait incertains ; (2) les échangistes, tant détenteurs finals de richesse qu'emprunteurs finals, ont des préférences définies par rapport à la longueur de la période de temps pour laquelle ils veulent garder leurs fonds investis, ou pour laquelle ils ont besoin d'un financement (c'est-à-dire qu'ils ont un habitat de maturité préférée) ; et (3) les deux types d'échangistes font preuve généralement d'une aversion pour le risque, et, par conséquent, toutes choses égales par ailleurs, préféreront faire coïncider les maturités de leur portefeuille avec leur habitat, de façon à être certains des rendements ou des coûts. En plus de ces échangistes finals, le modèle reconnaît également l'existence d'arbitragistes, ou d'intermédiaires, préparés simultanément à prêter et emprunter dans des maturités différentes, quand la différence entre les rendements anticipés est assez attrayante pour compenser le risque encouru dans l'opération. » (Modigliani et Sutch [1967, p.569]).

Ainsi, lorsque les agents ont de l'aversion pour le risque, la présence conjointe du risque en capital et du risque en revenu justifie l'existence d'habitats. Mais, contrairement à la théorie de la segmentation, cette aversion n'est pas telle qu'aucun agent n'accepte de s'engager dans une opération

risquée, quel que soit le rendement anticipé de cette opération. Le rendement supplémentaire minimum nécessaire pour qu'un agent réalise une telle opération risquée peut être analysé comme une prime de risque, exigée par lui pour accepter de « quitter » momentanément son habitat. Cette opération est, en effet, considérée comme risquée par cet agent, à partir du moment où elle implique l'achat ou la vente de titres dont la maturité ne correspond pas à sa maturité préférée. Dans ce modèle, un taux d'intérêt à n périodes peut donc être différent du taux impliqué par la théorie pure des anticipations. Cette différence est une prime de risque (positive ou négative), représentative de l'écart entre l'offre primaire de titres à n périodes et la demande qui se serait manifestée si le taux avait été celui prédit par la théorie des anticipations. Cette prime permet de combler cet écart, en incitant les demandeurs ayant un habitat différent, à opérer sur le marché des titres à n périodes.

Dans cette optique, les taux d'équilibre sont bien influencés par les prévisions des agents (conformément à la théorie des anticipations), mais également par la distribution des habitats au niveau du marché. Sur ce dernier point, Modigliani et Sutch s'opposent clairement à la théorie de la prime de liquidité. Ils refusent, en effet, d'émettre une hypothèse *a priori* sur la forme de cette distribution (Hicks suppose que les prêteurs ont un habitat plutôt court, les emprunteurs un habitat plutôt long), et donc de contraindre la structure des primes (forcément positives et croissantes avec le terme, selon Hicks).

Sur ce point, Modigliani et Sutch se contentent d'avancer l'idée selon laquelle la prime serait une fonction relativement lisse du terme, du fait que le risque assumé par un opérateur est faible lorsqu'il s'éloigne peu de son habitat. Mathématiquement, la différence de sensibilité du prix de deux bons aux variations de taux d'intérêt est, en effet, d'autant plus faible que ces bons ont des durées plus proches. On peut donc supposer que deux bons, relativement adjacents sur le spectre des durées, seront considérés comme relativement substituables, et donc que leur prix variera de façon à peu près similaire. On peut ajouter que ceci est d'autant plus vrai que ces bons sont de durée longue, parce que les variations potentielles de prix relatif entre deux bons adjacents sont d'autant plus faibles que ces bons sont longs. Ainsi, toutes choses égales par ailleurs, il est plus risqué de quitter son habitat pour un habitat adjacent lorsque celui-ci est court.

Le modèle proposé par Modigliani et Sutch est original. Toutefois, il ne constitue qu'une formalisation particulière d'une approche plus globale de l'incertitude. L'analyse du risque menée par Modigliani et Sutch préfigure les travaux modernes dans ce domaine, qui utilisent des modèles de portefeuille pour donner un contenu précis aux primes de risque. En insistant sur le caractère

variable de ces primes, sur l'importance des facteurs d'offre et du degré d'aversion pour le risque, ces deux auteurs ont apporté une contribution théorique significative.

3.7 Conclusion

Dans cette section ont été présentés les quatre théories traditionnelles de la structure par terme des taux d'intérêt. Chacune d'elles répond à la question suivante : comment les résultats obtenus en univers certain se modifient-ils, lorsqu'on prend en compte l'incertitude sur les taux futurs ? De ce point de vue, il se dégage deux positions extrêmes et une position médiane.

La théorie des anticipations occupe une position extrême, en affirmant que l'introduction de l'incertitude ne modifie pas substantiellement les résultats en monde certain. D'après cette théorie, le seul facteur déterminant de la structure des taux est l'anticipation du marché quant aux taux d'intérêt futurs.

La théorie de l'habitat préféré occupe une position médiane, en précisant que l'attitude des agents vis-à-vis du risque justifie l'existence de primes de risque. Plusieurs facteurs déterminent alors la structure des taux : les anticipations, mais aussi la distribution des habitats sur l'échelle des maturités, ainsi que l'aversion des individus pour le risque. La théorie de la prime de liquidité peut être vue comme une instance de cette théorie synthétique, affirmant que l'habitat des prêteurs est plutôt court et l'habitat des emprunteurs plutôt long.

Enfin, la théorie de la segmentation occupe l'autre extrême, dans le sens où elle soutient que les acteurs sont si adverses à la spéculation que les anticipations ne constituent plus un facteur déterminant. Chaque taux d'intérêt résulte de la confrontation d'une offre et d'une demande spécifique.

De par leur position, les théories extrêmes prêtent facilement le flanc à la critique. D'un côté, la théorie des anticipations considère que le marché est dominé par des spéculateurs neutres vis-à-vis du risque, et refuse de prendre en compte dans son analyse toutes les conséquences de l'incertitude. D'un autre côté, la théorie de la segmentation n'accorde aucune importance à l'activité spéculative.

Section 4 Théorie des anticipations et anticipations rationnelles

4.1 Introduction

Les théories traditionnelles, telles qu'elles ont été présentées, n'émettent aucune hypothèse sur le processus de formation des prévisions. Un nombre considérable de travaux ultérieurs a cherché à associer ces théories avec diverses spécifications de ce processus.

Ces travaux présentent un double intérêt. En premier lieu, ils permettent de tester empiriquement la théorie. Le caractère inobservable des anticipations rend en effet nécessaire de telles hypothèses, en l'absence de données d'enquête fiables.¹³ En second lieu, ces travaux introduisent une dynamique dans le fonctionnement de la structure des taux, et permettent donc d'interpréter ses déformations au cours du temps.

Toutefois, un inconvénient majeur tempère ces remarques : l'introduction d'une spécification du mode de formation des anticipations conduit à transformer les tests des théories traditionnelles en tests d'hypothèses jointes. Il devient alors impossible de déterminer si un échec provient d'une erreur de la théorie de la structure des taux et/ou d'une mauvaise modélisation des prévisions.

L'ensemble des travaux consacrés à l'association de ces deux hypothèses se scinde clairement en deux générations. La première tente d'appliquer les hypothèses traditionnelles de formation des prévisions (c'est-à-dire, principalement, les anticipations extrapolatives, adaptatives, ou régressives) aux théories de la structure des taux.¹⁴ Les plus illustres représentants de cette génération sont probablement Meiselman, Modigliani et Sutch.¹⁵ La seconde, initiée par Sargent [1972] et Modigliani et Shiller [1973], se préoccupe d'examiner les théories traditionnelles sous hypothèse d'anticipations rationnelles.

¹³Kane et Malkiel [1967], Kane [1983], et plus récemment Froot [1989], ont utilisé des données relatives aux prévisions de taux. Froot teste le modèle linéarisé de Shiller, Campbell et Schoenholtz, examiné dans cette section. Pour ce type d'étude en France, voir, par exemple, Colletaz [1986].

¹⁴Voir sur ce sujet l'article très complet de Dobson, Sutch et Vanderford [1976], ou encore Friedman et Roley [1979]. Pour une analyse sur données françaises, voir, par exemple, Colletaz [1980], Artus [1987], Avouyi-Dovi, Boutillier et Topol [1989], ou Prat [1992].

¹⁵Le modèle d'apprentissage par l'erreur (« *error-learning* ») de Meiselman [1962] a tenu le devant de la scène pendant une grande partie de la décennie soixante. Meiselman postule que les agents révisent leurs anticipations de taux en fonction de l'erreur constatée sur leurs précédentes prévisions. Dans l'optique de la théorie des anticipations, ces prévisions sont représentées par les taux à terme implicites. Voir par exemple Wood [1963], Kessel [1965], Van Horne [1965], ou Buse [1967, 1970].

Il est frappant de constater que la deuxième génération a provoqué l'abandon presque total des premiers travaux : la « révolution » des anticipations rationnelles a été d'une telle force qu'elle a quasiment balayé toute spécification alternative. Ceci s'explique sans doute par le poids indéniabie des arguments en faveur de l'hypothèse introduite par Muth au début des années soixante, mais également par l'extrême importance des conséquences de son introduction dans les théories de l'évaluation des actifs. Dotées de cette hypothèse, ces théories prennent en effet une nouvelle dimension : en concluant à l'égalité entre le prix d'un actif et sa valeur « fondamentale », elles affirment l'importance du concept d'efficience de marché pour le renouveau de la pensée néoclassique.¹⁶

L'hypothèse des anticipations rationnelles a contribué à unifier la théorie financière néoclassique autour de cette problématique de l'efficience. De ce fait, au cours des années soixante-dix, les théories de la hiérarchie des taux ont progressivement perdu de leur spécificité.

Nous étudions dans cette section la théorie des anticipations sous hypothèse de rationalité des anticipations. Après avoir défini cette hypothèse, nous montrons, suivant Cox, Ingersoll et Ross [1981], que la cohérence même de la théorie est mise en cause. Nous examinons enfin une tentative de réhabilitation.

4.2 L'hypothèse des anticipations rationnelles

Cette hypothèse, introduite par Muth [1961], postule que les agents forment, pour une variable, la meilleure prévision possible, compte tenu de l'information dont ils disposent. Formellement, si on note ${}_e X_{t,t+n}$ l'anticipation « psychologique » d'un agent, formée en t , à partir d'un ensemble d'informations I_t , pour la variable aléatoire \tilde{X} en $t+n$, celle-ci sera considérée comme rationnelle si

$${}_e X_{t,t+n} = E \left[\tilde{X}_{t+n} \mid I_t \right] \quad (4.1)$$

où E est l'opérateur d'espérance mathématique.¹⁷

¹⁶À propos de la théorie de l'efficience, voir les travaux de Fama [1970, et 1976a].

¹⁷Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur l'ensemble d'information, on écrit simplement ${}_e X_{t,t+n} = E_t[\tilde{X}_{t+n}]$.

Ainsi, l'hypothèse des anticipations rationnelles consiste à poser l'égalité entre les anticipations subjectives des individus, et le comportement stochastique objectif de la variable à prévoir. Ce comportement stochastique fait référence au processus qui détermine véritablement cette variable : l'agent, doué d'anticipations rationnelles, est donc supposé se référer au fonctionnement réel de l'économie, c'est-à-dire à une théorie économique pertinente.

L'hypothèse des anticipations rationnelles peut être considérée comme une hypothèse forte de la théorie économique contemporaine : malgré de nombreuses critiques, elle a progressivement imposé sa prééminence sur les formulations alternatives.

Il est intéressant de noter que le succès de l'hypothèse tient autant aux critiques qui peuvent être faites à toute formulation non-rationnelle, qu'à une justification autonome de sa pertinence. En effet, les hypothèses d'anticipations extrapolatives, adaptatives ou régressives, s'exposent à une critique destructrice : leur formulation est indépendante de la signification économique de la variable qui fait l'objet de la prévision. Ainsi, ces formulations supposent que les acteurs économiques cherchent à prévoir certaines variables, sans jamais tenter de comprendre le processus économique qui pourrait les déterminer.

Il n'est pas nécessaire d'être un fervent défenseur du postulat de rationalité individuelle pour refuser cette hypothèse de « myopie universelle ». En effet, outre son caractère intrinsèquement irréaliste, son utilisation est difficilement justifiable pour un économiste. Ceci tient au fait qu'un modèle, lorsqu'il comporte une telle spécification de formation des anticipations, suppose que les agents commettent des erreurs *systématiques*, alors que le modélisateur ne le fait pas (il crée un modèle pour capter la réalité du fonctionnement de l'économie). En agissant de la sorte, l'économiste se place volontairement dans une position de supériorité : il se rend coupable d'un « péché d'orgueil ». ¹⁸

Cette critique est puissante, parce qu'elle s'applique à toute spécification non-rationnelle des anticipations : un agent, s'il utilise un modèle de l'économie faux ou incomplet, est toujours susceptible de faire des erreurs systématiques dans ses prévisions. Ainsi, en invitant l'économiste à toujours améliorer l'intelligence supposée des agents, cette critique conduit à admettre que ceux-ci connaissent parfaitement le fonctionnement de l'économie, c'est-à-dire le « vrai » modèle.

¹⁸Cette expression est utilisée par Phelps [1987].

La force de cette argumentation a contribué à la généralisation rapide de l'utilisation de l'hypothèse des anticipations rationnelles.

4.3 La théorie des anticipations mise à l'épreuve

Introduire l'hypothèse des anticipations rationnelles dans un modèle, consiste donc à remplacer chaque variable anticipée par son espérance mathématique. Pour un agent donné, cette espérance doit être exprimée conditionnellement à l'information dont il dispose, au moment où il forme cette prévision.

Il semble qu'on peut raisonnablement s'attendre à obtenir un modèle dont les conclusions correspondent exactement aux résultats du modèle initial, mécaniquement réinterprétés sous hypothèse de rationalité des prévisions. Si cette approche était justifiée, l'introduction de la spécification d'anticipations rationnelles pourrait être considérée comme une opération anodine, consistant à mettre simplement « côte à côte » deux modèles indépendants : un modèle économique et un modèle de formation des prévisions. En fait, les conséquences de cette hypothèse sur le modèle initial sont bien plus importantes, et peuvent même remettre en cause la cohérence globale du modèle final. C'est le cas notamment pour la théorie des anticipations, qui, en quelque sorte, ne résiste pas à l'introduction de l'hypothèse de rationalité des anticipations. Ceci a été démontré par Cox, Ingersoll et Ross en 1977, dans un important article de l'université de Stanford diffusé plus largement en 1981.¹⁹

Cette démonstration, déconcertante de simplicité, consiste à montrer que la réinterprétation directe du résultat principal de la théorie pure des anticipations, sous hypothèse d'anticipations rationnelles, conduit à une proposition incorrecte. De plus, Cox, Ingersoll et Ross ont le mérite d'avoir répertorié les versions les plus courantes de la théorie des anticipations, en utilisant des notations unifiées. Ce travail a sans doute permis de clarifier significativement le domaine de recherche.

4.3.1 Premier résultat : la théorie des anticipations est fautive en général

Cox, Ingersoll et Ross considèrent un marché concurrentiel sans friction, sur lequel s'échangent des bons sans coupon, de valeur faciale unitaire, et sans risque de défaut. Les valeurs futures

¹⁹Il faut noter que ce résultat avait été évoqué précédemment par Stiglitz [1970].

des prix de ces bons sont inconnues. Les participants forment, sur ce marché, des prévisions rationnelles identiques. Dans la logique de la théorie des anticipations, on doit s'attendre à ce que l'équilibre soit caractérisé par une égalité entre les rendements anticipés de toutes les stratégies possibles d'investissement pour une même période de détention. Lorsque les anticipations sont rationnelles, cette proposition peut s'écrire formellement :

$$\mathbb{E}_t \left[\frac{\tilde{P}_{t+1}^{(m_1-1)}}{P_t^{(m_1)}} \times \frac{\tilde{P}_{t+2}^{(m_2-1)}}{\tilde{P}_{t+1}^{(m_2)}} \times \cdots \times \frac{\tilde{P}_{t+n}^{(m_n-1)}}{\tilde{P}_{t+n-1}^{(m_n)}} \right] = \Pi_t^{(n)}, \quad \forall t, n. \quad (4.2)$$

où $\Pi_t^{(n)}$ désigne donc le rendement anticipé en t pour une période de détention de longueur n . Ce rendement est indépendant des périodes de réinvestissement et de la maturité des bons sélectionnés m_1, \dots, m_n .²⁰

Cox, Ingersoll et Ross montrent que l'équation (4.2) est incorrecte lorsque les prix sont véritablement aléatoires. La contradiction est prouvée en exhibant une équation tirée de (4.2), qui impose à un prix futur d'être non-stochastique.

D'une part, pour une période de détention unitaire ($n = 1$), le système (4.2) s'écrit :

$$\frac{\mathbb{E}_t \left[\tilde{P}_{t+1}^{(m-1)} \right]}{P_t^{(m)}} = \Pi_t^{(1)}, \quad \forall m \geq 1, \quad (4.3)$$

car le prix d'un bon en t n'est pas aléatoire. En particulier, si on exprime (4.3) pour $m = 1$ et $m = 2$, on obtient :²¹

$$\frac{1}{P_t^{(1)}} = \frac{\mathbb{E}_t \left[\tilde{P}_{t+1}^{(1)} \right]}{P_t^{(2)}}. \quad (4.4)$$

L'équation (4.4) indique simplement que le rendement anticipé d'une opération consistant à détenir un bon à deux périodes, sur une période, doit être égal au rendement de l'actif court non-risqué.

²⁰L'équation (4.2) n'impose pas $n - 1$ opérations de réinvestissement. Si on pose par exemple $m_2 = m_1 - 1$, les deux premiers termes de l'expression entre crochets se simplifient en $\tilde{P}_{t+2}^{(m_1-2)} / P_t^{(m_1)}$, ce qui correspond au rendement apporté par la détention en t , pendant deux périodes, d'un bon de maturité m_1 .

²¹On utilise la condition limite $\tilde{P}_{t+1}^{(0)} = 1$.

D'autre part, pour une détention pendant deux périodes, l'équation (4.2) s'écrit :

$$E_t \left[\frac{\tilde{P}_{t+1}^{(m_1-1)}}{P_t^{(m_1)}} \times \frac{\tilde{P}_{t+2}^{(m_2-1)}}{\tilde{P}_{t+1}^{(m_2)}} \right] = \Pi_t^{(2)}. \quad (4.5)$$

Si on exprime (4.5) pour $m_1 = m_2 + 1 = 2$ (c'est-à-dire pour l'achat d'un bon de maturité 2 en t , détenu jusqu'à échéance), puis pour $m_1 = m_2 = 1$ (c'est-à-dire pour l'achat d'un bon court en t , puis réinvestissement de la somme obtenue dans l'achat de bons courts), on peut écrire :

$$\frac{1}{P_t^{(2)}} = \frac{1}{P_t^{(1)}} \times E_t \left[\frac{1}{\tilde{P}_{t+1}^{(1)}} \right]. \quad (4.6)$$

En réunissant (4.4) et (4.6), on obtient :

$$E_t \left[\frac{1}{\tilde{P}_{t+1}^{(1)}} \right] = \frac{1}{E_t[\tilde{P}_{t+1}^{(1)}]}. \quad (4.7)$$

Utilisant alors l'inégalité de Jensen (voir l'annexe mathématique, page 329), on remarque que cette dernière égalité n'est vérifiée que si $\tilde{P}_{t+1}^{(1)}$ n'est pas aléatoire, ce qui contredit de manière flagrante les hypothèses initiales. Ainsi, il est démontré que les rendements espérés sur une période de détention donnée, ne peuvent s'égaliser pour toutes les périodes possibles : « l'horizon » de détention est important.

En conclusion, la proposition la plus générale de la théorie des anticipations sous hypothèse d'anticipations rationnelles est, tout simplement, fausse.

On est donc naturellement conduit à s'intéresser à des propositions plus restreintes, mais susceptibles d'être valides. Dans leur article de 1981, Cox, Ingersoll et Ross recensent les propositions les plus utilisés dans la littérature.

4.3.2 Les primes de risque en temps discret : définitions

On peut exprimer très simplement les différentes versions de la théorie des anticipations à l'aide de divers concepts de prime de risque. Nous adaptons ici les définitions de Campbell et Shiller [1984].

La prime de détention

La prime de détention (« *holding period risk premium* ») est relative au taux de rendement interne d'une opération consistant à détenir un bon de maturité m pendant une période de longueur n inférieure à m . Le bon est donc revendu avant son échéance. On rappelle que ce taux $\tilde{H}_{t,t+n}^{(m)}$ est tel que

$$\left(1 + \tilde{H}_{t,t+n}^{(m)}\right)^n \equiv \frac{\left(1 + R_t^{(m)}\right)^m}{\left(1 + \tilde{R}_{t+n}^{(m-n)}\right)^{m-n}}. \quad (4.8)$$

La prime de détention $\Phi_{t,t+n}^{(m)}$ désigne le taux de rendement interne qu'on peut espérer sur cette opération, au-delà du taux sans risque sur la période de détention, à savoir $R_t^{(n)}$:

$$\Phi_{t,t+n}^{(m)} \equiv \mathbb{E}_t\left[\tilde{H}_{t,t+n}^{(m)}\right] - R_t^{(n)}, \quad (4.9)$$

avec $n \leq m$. Pour $n = 1$, cette prime est égale au rendement espéré, au-delà du taux sans risque, sur la détention d'un bon de maturité m pendant une période. On appelle cette prime la *prime de terme*, et on note

$$\Phi_t^{(m)} \equiv \mathbb{E}_t\left[\tilde{H}_t^{(m)}\right] - r_t, \quad (4.10)$$

La prime de renouvellement

La prime de renouvellement (« *rolling risk premium* ») est définie à partir du taux de rendement interne d'une opération consistant à réaliser un investissement renouvelé, en bons à m périodes, sur une période de longueur totale n . Cette opération comporte donc n/m achats renouvelés, et on suppose donc que n/m est un entier. Si on appelle $\tilde{G}_{t,t+n}^{(m)}$ le taux de rendement interne de cette opération, on a

$$\left(1 + \tilde{G}_{t,t+n}^{(m)}\right)^n \equiv \left[\left(1 + R_t^{(m)}\right) \left(1 + \tilde{R}_{t+m}^{(m)}\right) \left(1 + \tilde{R}_{t+2m}^{(m)}\right) \cdots \left(1 + \tilde{R}_{t+n-m}^{(m)}\right)\right]^m. \quad (4.11)$$

La prime de renouvellement s'exprime alors comme

$$\Sigma_{t,t+n}^{(m)} \equiv R_t^{(n)} - \mathbb{E}_t\left[\tilde{G}_{t,t+n}^{(m)}\right], \quad (4.12)$$

avec $n \geq m$ et n/m entier. Pour $m = 1$, l'opération consiste à investir n fois au taux court, et on note

$$\Sigma_t^{(m)} \equiv r_t - E_t[\tilde{G}_t^{(m)}]. \quad (4.13)$$

La prime de terme implicite

La prime de terme implicite (« *forward rate risk premium* ») est définie à l'aide du taux à terme implicite $F_{t,t+n}^{(m)}$, c'est-à-dire le taux de rendement interne, implicite à la structure des taux en t , pour un bon fictif de maturité m en $t + n$. On rappelle que

$$\left(1 + F_{t,t+n}^{(m)}\right)^m \equiv \frac{\left(1 + R_t^{(n+m)}\right)^{n+m}}{\left(1 + R_t^{(n)}\right)^n}. \quad (4.14)$$

La prime de terme implicite est

$$\Psi_{t,t+n}^{(m)} \equiv F_{t,t+n}^{(m)} - E_t[\tilde{R}_{t+n}^{(m)}], \quad (4.15)$$

c'est-à-dire « l'excès » du taux à terme, par rapport à l'espérance du taux futur correspondant. Pour $m = 1$, la prime est relative au taux court futur dans n périodes, et on note

$$\Psi_{t,t+n} \equiv F_{t,t+n} - E_t[\tilde{r}_{t+n}]. \quad (4.16)$$

4.3.3 Quatre formulations de la théorie pure des anticipations en temps discret

Cox, Ingersoll et Ross remarquent que quatre propositions différentes ont été utilisées, de façon privilégiée, dans la littérature sur la structure des taux. Ces propositions sont les suivantes.

L'hypothèse locale des anticipations

Cette hypothèse est une version de la proposition générale de la théorie, restreinte à une période de détention particulière. Cette période est de longueur unitaire. L'hypothèse locale des anticipations

affirme donc que le rendement d'un investissement, sur une période, doit être indépendant de la maturité des bons détenus. Formellement, on écrit

$$\Phi_t^{(m)} = 0. \quad (4.17)$$

Par évaluation récursive jusqu'à la condition terminale $P_{t+n}^{(0)} = 1$, on obtient :

$$P_t^{(n)} = E_t \left[[(1 + r_t) (1 + \tilde{r}_{t+1}) \cdots (1 + \tilde{r}_{t+n-1})]^{-1} \right]. \quad (4.18)$$

L'hypothèse des anticipations en rendement de détention

Cette hypothèse, dérivée du modèle de Lutz, affirme que le rendement certain, obtenu en détenant un bon jusqu'à maturité, est égal au rendement incertain obtenu sur un investissement instantané, renouvelé au taux court pendant cette même période. N'ayant pas défini de concept de prime de risque en terme de rendement, nous écrivons directement :

$$\frac{1}{P_t^{(n)}} = E_t [(1 + r_t) (1 + \tilde{r}_{t+1}) \cdots (1 + \tilde{r}_{t+n-1})]. \quad (4.19)$$

L'hypothèse des anticipations en taux de rendement interne

Cette hypothèse, due à Malkiel, est similaire à la précédente, mais s'applique au taux de rendement interne :

$$\Sigma_t^{(m)} = 0, \quad (4.20)$$

soit, en développant,

$$\left[\frac{1}{P_t^{(n)}} \right]^{1/n} = E_t \left[[(1 + r_t) (1 + \tilde{r}_{t+1}) \cdots (1 + \tilde{r}_{t+n-1})]^{1/n} \right]. \quad (4.21)$$

L'hypothèse des anticipations non-biaisées

Cette hypothèse postule l'égalité entre les taux courts à terme implicites, et les taux courts futurs anticipés :

$$\Psi_{t,t+n} = 0, \quad (4.22)$$

soit, après évaluation récursive,

$$\frac{1}{P_t^{(n)}} = (1 + r_t) \mathbf{E}_t[(1 + \tilde{r}_{t+1})] \cdots \mathbf{E}_t[(1 + \tilde{r}_{t+n-1})]. \quad (4.23)$$

4.3.4 Deuxième résultat : l'incompatibilité des quatre hypothèses

Cox, Ingersoll et Ross démontrent que les quatre propositions, recensées ci-dessus, sont, dans le cas général, incompatibles deux à deux. Pour cela, ils définissent dans un premier temps une variable aléatoire \tilde{X} par

$$\tilde{X} \equiv [(1 + r_t) (1 + \tilde{r}_{t+1}) \cdots (1 + \tilde{r}_{t+n-1})]^{-1}, \quad (4.24)$$

si bien que les trois premières propositions se réécrivent sous la forme :

$$P = \mathbf{E} [\tilde{X}], \quad (4.25)$$

$$P^{-1} = \mathbf{E} [\tilde{X}^{-1}], \quad (4.26)$$

$$P^{-1/n} = \mathbf{E} [\tilde{X}^{-1/n}]. \quad (4.27)$$

L'inégalité de Jensen assure qu'une seule de ces trois propositions peut être valide. Il reste à montrer que la quatrième proposition est incompatible avec les trois premières. On réécrit simplement cette dernière proposition sous la forme

$$P_t^{(2)} = [(1 + r_t) \mathbf{E}_t[(1 + \tilde{r}_{t+1})]]^{-1} < \mathbf{E}_t[[(1 + r_t) (1 + \tilde{r}_{t+1})]^{-1}], \quad (4.28)$$

et

$$\left[\frac{1}{P_t^{(2)}} \right]^{1/2} = [(1 + r_t) \mathbf{E}_t[(1 + \tilde{r}_{t+1})]]^{1/2} > \mathbf{E}_t[(1 + r_t)(1 + \tilde{r}_{t+1})]^{1/2}, \quad (4.29)$$

où les deux inégalités dérivent de la règle de Jensen. L'inégalité (4.28) est incompatible avec la première proposition, et (4.29) avec la troisième. Enfin, on remarque que la quatrième proposition est équivalente à la deuxième si les niveaux des taux d'intérêt futurs sont non-corrélés, ce qui n'est généralement pas le cas.

En définitive, ceci montre que la théorie des anticipations est, sous hypothèse d'anticipations rationnelles, constituée d'un ensemble de quatre propositions en général mutuellement exclusives.

En fait, l'inconsistance de la théorie des anticipations sous l'hypothèse des anticipations rationnelles est due à l'introduction d'un moment de la variable aléatoire anticipée. En remplaçant une anticipation par l'espérance mathématique de la variable à prévoir, on introduit une contrainte, liée à la manipulation de cet opérateur statistique (qui interdit notamment d'écrire $\mathbf{E}[\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2] = \mathbf{E}[\tilde{X}_1] \times \mathbf{E}[\tilde{X}_2]$ lorsque les variables aléatoires \tilde{X}_1 et \tilde{X}_2 ont des distributions dépendantes).

Ceci conduit à s'interroger sur le statut de la théorie des anticipations en monde incertain, même détachée de l'hypothèse des anticipations rationnelles : l'équivalence des diverses formulations de cette théorie n'est démontrable que si l'opérateur unaire « Anticipation de... » (implicite dans l'écriture ${}_e R_{t,t+n}^{(m)}$) est de nature purement arithmétique, et permet d'écrire notamment que l'anticipation d'un produit est égale au produit des anticipations. Finalement, ceci interdit toute définition de ${}_e R_{t,t+n}^{(m)}$ en terme des moments vrais de la variable aléatoire $\tilde{R}_{t+n}^{(m)}$, qui caractérisent véritablement le processus stochastique sous-jacent. Les agents ne peuvent donc utiliser, pour prévoir une variable, que des formulations purement empiriques (éventuellement à l'aide de techniques d'estimation économétriques). En d'autres termes, la connaissance du fonctionnement réel de l'économie leur est à jamais interdite.

Ces remarques conduisent à un résultat extrêmement frappant : il semble que le modèle traditionnel de la structure des taux s'auto-détruit dès qu'on permet aux agents de soulever un coin du voile qui le recouvre ! Cette métaphore en terme de « machine infernale », souligne la profondeur du gouffre qui sépare l'hypothèse des anticipations rationnelles des autres modes de formation des anticipations.

4.4 Une tentative de réhabilitation

Associée à l'hypothèse des anticipations rationnelles, la théorie pure des anticipations devient, dans son acception la plus générale, incorrecte. Loin de signer l'arrêt de mort de cette théorie, cette douloureuse sentence a conduit certains auteurs à en proposer une version modifiée, qui puisse conserver sa substance tout en restant cohérente.

La méthode employée est celle de la linéarisation. Elle consiste simplement à approximer une fonction par une droite, au voisinage d'un point donné. L'erreur commise est alors considérée comme négligeable, lorsque la fonction ainsi linéarisée est évaluée « relativement près » du point de linéarisation.

Ce procédé a été utilisé par beaucoup d'auteurs, afin de simplifier certains calculs complexes, liés aux formules d'intérêts composés. Shiller [1979, 1981] a été le premier à l'employer dans le but de réconcilier les différentes propositions de la théorie des anticipations. Ce modèle, systématisé par Shiller, Campbell et Schoenholtz [1983], introduit une difficulté supplémentaire en traitant d'obligations à coupons. Nous présentons ici une version plus simple, valable uniquement pour des bons sans coupon, mais permettant de comprendre plus facilement le processus qui conduit à restaurer partiellement la cohérence de la théorie des anticipations.

Shiller, Campbell et Schoenholtz expriment trois versions linéarisées de la théorie des anticipations, correspondant à la première, troisième et quatrième des hypothèses mises en évidence par Cox, Ingersoll et Ross.²² Toutefois, ces trois versions sont plus générales, puisque fondées directement sur les primes $\Phi_{t,t+n}^{(m)}$, $\Sigma_{t,t+n}^{(m)}$ et $\Psi_{t,t+n}^{(m)}$.

Chacune de ces trois versions affirme la nullité d'une de ces primes. Au total, on a donc

$$\begin{aligned}\Phi_{t,t+n}^{(m)} &= 0 \\ \Sigma_{t,t+n}^{(m)} &= 0 \\ \Psi_{t,t+n}^{(m)} &= 0.\end{aligned}\tag{4.30}$$

²²Les démonstrations qui suivent peuvent facilement être étendues à la deuxième proposition (la seule exprimée en rendements et non en taux de rendement interne). Voir, par exemple, Shiller [1979].

Les expressions linéarisées des indicateurs de rendement interne, sous-jacents à ces différentes primes, sont

$$\tilde{h}_{t,t+n}^{(m)} = \frac{mR_t^{(m)} - (m-n)\tilde{R}_{t+n}^{(m-n)}}{n}, \quad (4.31)$$

$$\tilde{g}_{t,t+n}^{(m)} = \frac{mR_t^{(m)} + m\tilde{R}_{t+m}^{(m)} + \dots + m\tilde{R}_{t+n-m}^{(m)}}{n}, \quad (4.32)$$

$$f_{t,t+n}^{(m)} = \frac{(m+n)R_t^{(m+n)} - nR_t^{(n)}}{m}, \quad (4.33)$$

où chaque membre gauche désigne la version linéarisée, autour d'un point \bar{R} proche de zéro, de la variable dénotée par la majuscule correspondante. En définitive, les trois propositions s'expriment par

$$R_t^{(n)} = \frac{mR_t^{(m)} - (m-n)\mathbb{E}_t[\tilde{R}_{t+n}^{(m-n)}]}{n}, \quad (4.34)$$

$$R_t^{(n)} = \frac{mR_t^{(m)} + m\mathbb{E}_t[\tilde{R}_{t+m}^{(m)} + \dots + \tilde{R}_{t+n-m}^{(m)}]}{n}, \quad (4.35)$$

$$\mathbb{E}_t[\tilde{R}_{t+n}^{(m)}] = \frac{(m+n)R_t^{(m+n)} - nR_t^{(n)}}{m}. \quad (4.36)$$

Par manipulation des indices m et n , et à l'aide de la règle des espérances imbriquées, on démontre facilement que ces trois dernières équations sont équivalentes. Shiller, Campbell et Schoenholtz montrent ainsi que les incompatibilités constatées par Cox, Ingersoll et Ross sont du « second ordre ». Le processus de linéarisation permet apparemment de réconcilier les versions de la théorie des anticipations. On peut donc ne retenir qu'une seule équation, par exemple (4.35). Pour $m = 1$, cette équation s'écrit

$$R_t^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}_t[\tilde{r}_{t+k}]. \quad (4.37)$$

Un taux long est, à l'équilibre, une moyenne arithmétique d'anticipations de taux courts.

Mais quel est le statut théorique de l'équation (4.37) ? La linéarisation a, en effet, introduit de fortes contraintes sur les taux présents et futurs, en imposant qu'ils soient tous relativement proches d'un

taux \bar{R} (qui se calcule en pratique comme un taux moyen). L'équation (4.37) ne peut être considérée comme une bonne approximation de la théorie des anticipations que lorsque la courbe des taux est presque horizontale.²³ Même si l'erreur induite par une déformation de la structure reste empiriquement faible, le modèle linéarisé semble être logiquement suspect, parce que la théorie des anticipations est justement une théorie explicative de la courbe des taux et de ses déformations. En ce sens, l'équation (4.37) ne répond pas un des deux objectifs qui lui était assigné, c'est-à-dire de conserver la substance de la théorie traditionnelle de la structure des taux.

Dans ces conditions, le modèle linéarisé ne peut être considéré comme un moyen de contourner de façon satisfaisante l'incohérence fondamentale de la théorie des anticipations, sous hypothèse de rationalité des anticipations.

4.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons examiné la confrontation de la théorie des anticipations et de l'hypothèse de rationalité des anticipations. Deux résultats principaux ont été analysés. Le premier résultat énonce que la formulation la plus générale de la théorie est tout simplement fausse. Le second résultat énonce que les formulations moins générales, utilisées dans la littérature, sont incompatibles deux à deux. Nous avons ensuite exposé un modèle susceptible de réhabiliter la théorie des anticipations. Ce modèle montre que les incompatibilités constatées par Cox, Ingersoll et Ross peuvent être résolues par linéarisation. Toutefois, nous avons mis en doute la pertinence de cette procédure, du point de vue de l'analyse théorique de la structure des taux.

En somme, cette section montre que la théorie des anticipations résiste mal à l'introduction de l'hypothèse des anticipations rationnelles.

²³La justesse empirique de cette approximation est évaluée par Shiller [1979] et Campbell [1986].

Section 5 Conclusion du chapitre 1

Ainsi s'achève ce chapitre, consacré aux théories traditionnelles de la structure des taux. Nous avons, dans un premier temps, exposé un modèle très simple de structure des taux en univers certain. Ce modèle nous a montré, que, sous les hypothèses qui sont les siennes, le niveau relatif des taux constitue un problème pouvant être traité indépendamment de la détermination du niveau absolu de l'un d'entre eux. Sur la base de ce résultat, des *théories de la structure des taux* se sont peu à peu organisées. Les théories « traditionnelles », constituées entre la fin des années trente et la fin des années soixante, partagent une méthodologie commune, consistant à examiner les perturbations induites par l'introduction d'aléas dans un modèle initialement certain.

La théorie des anticipations, pour qui ces perturbations sont négligeables, aboutit à la conclusion que les prévisions constituent l'unique facteur explicatif de la hiérarchie des taux. Pour obtenir ce résultat, cette théorie utilise l'hypothèse de neutralité vis-à-vis du risque, ce qui revient à refuser de prendre en compte les conséquences propres de l'incertitude. Pour la théorie de la segmentation, au contraire, ces perturbations sont si importantes que l'idée même d'une *structure* des taux est mise en doute. Entre ces deux approches extrêmes, on trouve notamment la théorie synthétique de l'habitat préféré, qui admet que les anticipations, les préférences et l'attitude des agents vis-à-vis du risque, influencent conjointement la courbe des taux.

Pour être testées, ces théories doivent généralement être associées à un processus de formation des anticipations. Jusqu'à la fin des années soixante, les spécifications *ad hoc* sont abondamment utilisées. Les années soixante-dix voient l'introduction progressive de l'hypothèse des anticipations rationnelles, qui, peu à peu, évince les hypothèses alternatives. Pour la théorie des anticipations, le choc est rude : sous hypothèse de rationalité des anticipations, elle se voit tout simplement réduite à un ensemble de propositions deux à deux incompatibles.

Pendant trois décennies, les théories traditionnelles ont abondamment débattu du rôle respectif des anticipations et des préférences individuelles, dans la détermination de la structure des taux. Les oppositions se sont souvent exprimées en terme de *primes de risque* : la théorie « pure » des anticipations affirme que ces primes sont nulles (ou, dans sa version « impure », constantes), la théorie de l'habitat qu'elles sont variables avec le temps, et de signe quelconque. Les tests économétriques en la matière sont innombrables et divers, mais il se dégage néanmoins une nette

tendance en faveur de la non-nullité et de la variabilité de ces primes.²⁴

Il est toutefois difficile de conclure en faveur d'une théorie, dans la mesure où aucune ne donne un contenu *explicite* aux primes de risque. En réalité, les approches traditionnelles, examinées dans ce chapitre, souffrent de deux défauts majeurs. En premier lieu, elles ne se préoccupent pas d'identifier précisément les facteurs de risque qui affectent l'économie. Les taux futurs sont bien supposés aléatoires, mais aucune précision n'est donnée sur les variables qui sont à la source de ces aléas. Ce défaut est issu de la méthode appliquée par ces théories, centrée autour d'un modèle en univers certain. En second lieu, elles ne sont pas fondées sur des comportements microéconomiques explicites. Les liens entre l'attitude des agents vis-à-vis du risque et les primes restent purement intuitifs, et non-quantifiés. En somme, le discours des théories traditionnelles est essentiellement qualitatif. Il manque de fondements précis quant à l'analyse de l'incertitude et des comportements microéconomiques en univers aléatoire.

Ces lacunes ont été comblées par les théories dites « modernes » de la structure des taux, examinées dans les chapitres suivants.

²⁴Il est impossible de citer toutes les études empiriques relatives aux primes dans la structure des taux. On peut se référer aux travaux de Fama [1976b, 1984a et b]. Pour des études sur la variabilité des primes, on peut consulter Mankiw [1986], Engle, Lilien et Robins [1987]. Sur données françaises, voir, par exemple, Gourlaouen [1988], Artus [1990], ou Belhomme [1992].

Chapitre 2

Structure des taux et équilibre d'arbitrage

Section 1 Introduction

Depuis la publication des importants travaux de Ross [1976, 1977], consacrant la naissance de l'*Asset Pricing Theory* (APT), il est devenu courant de distinguer deux concepts d'équilibre de marché.

Le premier est l'équilibre économique traditionnel, défini par l'égalité de l'offre et de la demande du bien ou de l'actif échangé. Le second est un équilibre caractérisé par l'absence d'opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire par l'impossibilité de mettre en œuvre une stratégie de vente et d'achat, conduisant de façon certaine à un gain strictement positif.

L'intuition première sous-jacente à l'APT peut être exprimée comme suit : partant du principe que la fonction des actifs financiers est d'assurer, à ceux qui les détiennent, une protection contre l'incertitude qui affecte l'économie, on admet que le seul critère pertinent pour évaluer un titre est la nature de l'assurance qu'il fournit. Lorsque deux actifs fournissent un service de protection comparable (c'est-à-dire, dans une certaine mesure, redondant) la concurrence crée un lien entre leur prix. Plus précisément, considérons un marché financier, sur lequel s'échange un certain nombre de titres contingents. Compte tenu des caractéristiques propres à chacun des actifs, on peut chercher à construire un sous-ensemble de titres, assurant la meilleure protection possible contre les risques économiques, c'est-à-dire tel que l'ajout d'un titre différent n'accroisse pas le degré de protection offert. Imaginons que ce portefeuille « de base » comporte K titres parfaitement identifiés. Les caractéristiques des titres hors-base peuvent alors être répliquées par une combinaison linéaire des caractéristiques des K titres de la base. Dans ces conditions, le prix d'équilibre des actifs hors-base doit respecter une relation du même type avec les prix des actifs du portefeuille de base, sous peine de garantir la présence d'opportunités d'arbitrage. On obtient ainsi une contrainte, devant être respectée par les prix des titres échangés sur le marché, soit, en d'autres termes, une condition d'équilibre.

Cette approche est originale, dans la mesure où l'équilibre est défini indépendamment des préférences des agents (hormis l'axiome de non-satiété), ou de leur attitude vis-à-vis du risque. On doit essentiellement à Ross de l'avoir systématisée, dans le cadre d'un modèle beaucoup plus proche de la théorie financière que ne l'est le modèle d'actifs contingents de Arrow et Debreu.

L'utilisation du principe de non-arbitrage pour déterminer une condition d'équilibre sur un marché obligataire, a été réalisée entre 1976 et 1978, sur la base de modèles stochastiques en temps con-

tinu. Pas moins de trois sources indépendantes doivent être citées : Cox, Ingersoll et Ross [1981], Richard [1978], et Vasicek [1977].¹

L'influence de ces travaux, — et notamment ceux de Cox, Ingersoll et Ross —, a été et est encore telle qu'ils sont considérés à juste titre comme des contributions essentielles à la théorie de la structure par terme des taux d'intérêt. Pourtant, aucun d'entre eux ne constitue, à proprement parler, une *nouvelle* théorie de la hiérarchie des taux.

En réalité, l'aspect le plus novateur des modèles d'arbitrage de la structure des taux est, avant tout, de nature méthodologique. L'emploi du principe de non-arbitrage impose, en effet, l'identification *a priori* des facteurs d'incertitude qui affectent l'économie, de façon à pouvoir sélectionner un sous-ensemble de titres offrant la meilleure protection possible contre le risque. La perspective est donc purement financière, mais procède d'une description explicite de la structure intime de l'économie. En examinant ces modèles, on différencie immédiatement les hypothèses strictement nécessaires à l'application de la condition d'arbitrage, des hypothèses spécifiques aux titres considérés. Par nature, ces hypothèses spécifiques sont exogènes au modèle, et peuvent donc être choisies, soit de manière totalement arbitraire, soit en référence à une théorie définie par ailleurs.

Dès lors, on peut envisager de réexaminer, dans cette perspective, les théories traditionnelles de la structure des taux, afin, d'une part, d'analyser leur compatibilité avec l'équilibre d'arbitrage, et, d'autre part, de distinguer précisément en elles ce qui relève d'une théorie générale des marchés financiers, de ce qui est propre au domaine considéré. Cette démarche s'est avérée fructueuse. Sous l'impulsion de Cox, Ingersoll et Ross, le champ théorique de la structure des taux a été notablement clarifié.

Dans l'esprit de notre travail, un autre résultat s'avère également important. Comme nous l'avons dit, les modèles d'arbitrage sont remarquablement transparents, et affichent sans détour leurs limites. Ces limites, parce qu'elles sont de nature fondamentale, tendent à accréditer l'idée selon laquelle le problème de la structure par terme ne peut être traité dans un cadre purement financier, et relève de considérations économiques beaucoup plus générales.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Suite à cette introduction, nous nous livrons, dans la section 2, à un exercice préliminaire indispensable, à savoir l'interprétation économique des mod-

¹Les années précisées ici sont celles de la publication des articles définitifs. Les *working papers* ou versions préliminaires correspondants ont été réalisés entre 1976 et 1978.

èles stochastiques en temps continu. Nous pourrons ainsi, avant de nous focaliser sur des résultats formels parfois complexes, mieux cerner la portée intrinsèque des modélisations proposées. Dans la section 3, nous exposons le modèle « générique » d'équilibre d'arbitrage, décrivant les contraintes auxquelles sont soumis les prix des bons sans coupon, dans une économie affectée par K sources d'incertitude. Utilisant ce modèle dans la section 4, nous montrons qu'il est possible de réexaminer en profondeur la théorie des anticipations, à travers ses quatre versions pures. Les clarifications théoriques induites sont mises en valeur. Dans la section 5, nous prolongeons cet examen en analysant certaines instanciations du modèle générique à K facteurs, dans l'esprit de la théorie des anticipations. Ce travail permet de mettre en exergue les qualités des modèles d'équilibre d'arbitrage, d'un point de vue empirique. Toutefois, nous montrons également que les limites de la méthode sont telles que le choix d'une spécification devient totalement arbitraire. Nous confirmons ce doute dans la section 6, en livrant un argument formel puissant, démontrant que l'équilibre issu de cette méthode est incapable de donner une vision *a priori* cohérente de la structure par terme des taux d'intérêt. Nous concluons ce chapitre dans une section 7, dans le sens de notre travail.

Section 2 Une interprétation économique des modèles stochastiques en temps continu

2.1 Introduction

Dans le cadre d'un modèle en temps continu, les transactions peuvent avoir lieu à n'importe quel instant du temps.

Comme le note habilement Merton [1973b, p.869], cette situation peut être justifiée par l'hypothèse souvent émise du marché sans friction : s'il n'existe aucun coût de transaction, aucune taxe, et si les actifs peuvent être échangés en n'importe quelle quantité, les investisseurs préféreraient réviser la composition de leur portefeuille à tout instant. En d'autres termes, cela signifie qu'en l'absence de contraintes externes, les investisseurs auront naturellement tendance à raisonner en temps continu, et cela indépendamment du fait qu'ils décident, ou non, de réaliser effectivement des transactions.

Dans ces conditions, le choix du temps discret s'interprète comme une reconnaissance implicite de l'existence de coûts de transaction, ou de problèmes d'indivisibilité. Mais, on doit également admettre que ces frictions autorisent l'adoption d'un *horizon de transaction* (l'intervalle de temps minimum entre deux transactions) fixe et constant dans le temps.

À cette assertion difficile à justifier, s'ajoute un autre problème. On doit, en effet, s'attendre à ce que l'équilibre atteint sur un marché ouvert périodiquement dépende de la longueur de l'horizon de transaction considéré.² Virtuellement, et involontairement, un modèle en temps discret traite donc des conséquences synergiques de l'imperfection des marchés et du comportement des investisseurs. La lisibilité des résultats ne peut qu'en souffrir.

Ces remarques nous invitent à sélectionner comme horizon de transaction le « plus petit intervalle de temps », de façon à éviter tout conflit avec les préférences des investisseurs. Suivant Cox, Ingersoll et Ross [1981, p.770], on doit admettre que le seul choix non-ambigu de ce point de vue conduit à travailler en temps continu.³

Dès lors se pose la question de la représentation des variables aléatoires, et, plus généralement, de

²Suivant Merton, on peut remarquer qu'un investisseur prenant une décision irrévocable pour dix ans, ne choisirait pas de la même façon s'il pouvait réorganiser la composition de son portefeuille à tout instant.

³Au-delà de cette motivation « théorique », on doit tout simplement reconnaître que, en règle générale, les manipulations formelles nécessitées par un modèle sont bien plus simples lorsque celui-ci est exprimé en temps continu.

l'outil mathématique requis pour mener à bien une analyse en incertitude et en temps continu.

Supposons que nous ayons à modéliser les évolutions d'une variable au cours du temps. En univers certain, on pourra utiliser une représentation classique, sous forme d'un modèle dynamique déterministe, du type⁴

$$dy(t) = \mu(y, t) dt \quad (2.1)$$

pour $t \in [0, T]$, et sous la condition initiale $y(0) = y_0$. L'équation (2.1) est une équation différentielle ordinaire, pouvant être résolue, après spécification de la fonction μ , à l'aide des règles standards de calcul différentiel.

En univers incertain, y est une variable aléatoire, et il nous faut introduire un aléa dans la représentation (2.1). Dans le cadre de la littérature considérée ici, la dynamique de y est modélisée sous forme d'un *processus d'Itô*, défini par une *équation différentielle stochastique* de la forme

$$dy(t) = \mu(y, t) dt + \sigma(y, t) dz(t), \quad (2.2)$$

où $\mu(y, t)$ est un paramètre de tendance, $\sigma(y, t)$ est un paramètre de dispersion, et $z(t)$ désigne un processus de Wiener standard. Ces notions relèvent du *calcul stochastique*, une branche des mathématiques traitant des processus aléatoires continus. L'utilisation du calcul stochastique en économie est motivée par la puissance des outils qu'il propose.⁵

Toutefois, pour plusieurs raisons, l'équation (2.2) semble contraignante :

- les accroissements de la variable $z(t)$, qui modélise le choc aléatoire intervenu à l'instant t , sont normaux,
- la tendance $\mu(y, t) dt$ et le choc aléatoire total $\sigma(y, t) dz(t)$ interviennent sur la dynamique de $y(t)$ de manière additive,
- seuls les deux premiers moments de $dy(t)$ sont référencés,

⁴D'une manière générale, la notation fonctionnelle $f(g, t)$ sera utilisée comme abréviation de $f(g(t), t)$: la valeur de la fonction f à l'instant t peut dépendre explicitement du temps et de la valeur de la fonction g , prise à l'instant t .

⁵Une présentation rapide des outils de base du calcul stochastique est donnée en annexe générale B, page 330. Le processus de Wiener standard est présenté en annexe générale B.1.

- la trajectoire de y est continue.

Si ces contraintes se révélaient fortes, on pourrait mettre en doute la capacité du calcul stochastique à représenter correctement la réalité, et la portée des modèles en temps continu s'en trouverait, de ce fait, réduite.

De ce point de vue, l'examen du processus (2.2) et des hypothèses économiques sous-jacentes apparaît comme une précaution méthodologique élémentaire. Pour ce faire, nous allons d'abord préciser la signification du modèle (2.2), puis exhiber les hypothèses mathématico-économiques nécessaires à sa justification.

2.2 Propriétés et comportement dynamique des processus d'Itô

Les qualités du processus dynamique (2.2) peuvent être analysées à partir des propriétés mathématiques du processus de Wiener. Le terme $dz(t)$ joue le rôle de choc exogène, perturbant la trajectoire de $y(t)$. Les chocs sont générés par le processus de Wiener standard $z(t)$.

Le processus $z(t)$ possède les propriétés suivantes :

1. les accroissements de $z(t)$ au cours du temps sont indépendants ;
2. tout accroissement de $z(t)$ au cours du temps est distribué selon une loi normale, d'espérance nulle et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps considéré ;
3. la trajectoire de $z(t)$ est continue mais n'est dérivable en aucun point.

Intuitivement, ces propriétés font du processus de Wiener une transposition, en temps continu, des aléas gaussiens introduits dans les modèles dynamiques discrets. En effet, en temps continu, il faut exprimer le *mouvement instantané* du processus $y(t)$ à l'instant t , et le choc aléatoire qui affecte $y(t)$ doit donc, lui-même, être exprimé en terme de mouvement.

Imaginons que $z(t)$ représente la hauteur atteinte par une particule physique à l'instant t , représentée sur un graphique dont l'abscisse est le temps (le schéma 2.2 donne une trajectoire possible de cette particule). Les propriétés de $z(t)$ évoquées ci-dessus se lisent alors de la façon suivante :

- ses accroissements étant indépendants, $z(t)$ est un processus « sans mémoire ». L'histoire

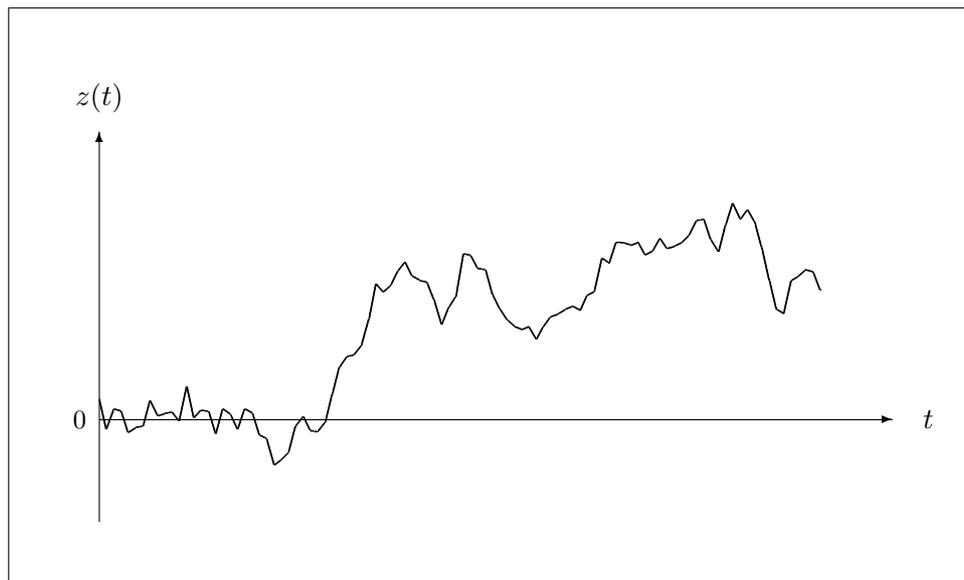


Schéma n°4 : Exemple de trajectoire pour un processus de Wiener standard.

passée de la particule n'influence pas sa course future. En d'autres termes, son comportement futur dépend de sa position actuelle mais non de la façon dont elle y est arrivée ;

- l'espérance de son incrément étant nulle, $z(t)$ ne subit aucune dérive systématique. De plus, la variance de son déplacement entre t et un moment ultérieur croissant comme la longueur de l'intervalle de temps considéré, $z(t)$ n'est soumis à aucune force tendant à restaurer sa position d'origine ;
- la trajectoire de $z(t)$ n'étant dérivable en aucun point, la particule n'a aucune vitesse.⁶

Ces caractéristiques font du processus de Wiener le prototype de l'aléa dynamique pur, si bien qu'il est utilisé intensivement dans le cadre de la théorie des processus stochastiques.

On peut toutefois se demander si la propriété de normalité des incréments de cet aléa n'est pas restrictive. À l'évidence non, ou, tout du moins, *pas plus que ne l'est la normalité des aléas ajoutés aux modèles discrets*. La normalité de $dz(t)$ est, en effet, justifiée par le Théorème Central Limite, qui, en quelque sorte, autorise l'utilisation d'une loi normale pour modéliser un phénomène résultant d'un grand nombre de phénomènes indépendants et de faible amplitude.

De la définition d'un processus de Wiener découle deux propriétés importantes, qui éclairent la

⁶Cette dernière remarque est particulièrement importante, dans la mesure où elle interdit de considérer $dz(t)$ comme une différentielle classique, et justifie donc l'utilisation de règles de calcul spécifiques.

signification d'un processus d'Itô. Considérant que $dz(t)$ s'exprime comme $z(t + dt) - z(t)$, on trouve aisément l'expression de l'espérance et de la variance de $dz(t)$, connaissant sa position courante $z(t)$:

$$E [dz(t) | z(t)] = 0 \quad (2.3)$$

$$V [dz(t) | z(t)] = dt. \quad (2.4)$$

Examinant à nouveau la différentielle stochastique

$$dy(t) = \mu(y, t) dt + \sigma(y, t) dz(t), \quad (2.5)$$

on peut alors calculer

$$E [dy(t) | y(t)] = \mu(y, t) dt \quad (2.6)$$

$$V [dy(t) | y(t)] = \sigma^2(y, t) dt. \quad (2.7)$$

Ainsi, $\mu(y, t)$ est l'espérance du changement de $y(t)$ par unité de temps. Ce terme, aléatoire mais parfaitement connu en t , représente la composante déterministe de la trajectoire de y , car dt n'est pas aléatoire.

De même, $\sigma^2(y, t)$ est la variance du changement de $y(t)$ par unité de temps. Cette variance, aléatoire mais connue en t , contrôle la force avec laquelle le choc $dz(t)$ perturbe la trajectoire de y . Comme $E [dz(t) | z(t)] = 0$, le terme $\sigma^2(y, t) dz(t)$ représente la composante imprévue du changement de y , soit, en d'autres termes, la surprise totale intervenue sur $dy(t)$.

La différentielle stochastique (2.5) montre que le comportement dynamique de y , à l'instant t , est entièrement décrit par la donnée des deux paramètres infinitésimaux du processus, μ et σ . Bien que ces paramètres soient, en eux-mêmes, très généraux (ils peuvent dépendre du niveau atteint par le processus et du temps), ils interviennent dans la différentielle stochastique de façon tout à fait particulière.

Dans quelle mesure le processus stochastique décrit par (2.5) peut-il représenter fidèlement le

comportement dynamique des variables économiques et financières ? C'est à cette question que nous allons tenter de répondre maintenant.

2.3 Une lecture économique du calcul stochastique

Dans la réalité économique, les indicateurs évoluent de façon discrète. Sur un marché financier, par exemple, il s'écoule toujours un certain laps de temps entre deux transactions successives, et le cours d'un titre n'est donc pas défini à tout instant. Un jeu d'hypothèses mathématico-économiques, permettant de justifier l'utilisation d'un processus tel que (2.5) pour représenter l'évolution du cours d'un titre, a été proposé par Merton [1975, 1982, et 1992, chapitre 3]. Ces hypothèses se présentent sous la forme de conditions suffisantes pour qu'un processus d'Itô puisse être considéré comme limite d'une modélisation discrète.

Considérons un marché financier, caractérisé par un horizon de transaction h . La valeur de h désigne, comme nous l'avons vu, l'intervalle de temps de longueur minimale entre deux transactions successives. Dans un cadre théorique standard, le processus de tâtonnement conduisant à l'équilibre est instantané, et la durée d'une séance de marché (c'est-à-dire l'intervalle de temps entre l'ouverture et la fermeture de la séance) est infiniment courte. Dans ce cas, h désigne également la longueur de l'intervalle de temps qui sépare deux séances successives de marché. Comme toujours en temps discret, on suppose que h n'est pas sous le contrôle des investisseurs.

La structure du marché étant ainsi définie, on s'intéresse à l'évolution du prix d'un titre risqué, entre les instants 0 et $T \equiv nh$, avec $n > 0$. Soit $X(t)$ le prix de ce titre à l'instant t , et $\Delta(k) \equiv X(hk) - X(h(k-1))$ le changement de X entre les instants $h(k-1)$ et hk , c'est-à-dire sur la période k . La variation de X entre 0 et T s'écrit

$$X(T) - X(0) = \sum_{k=1}^n \Delta(k), \quad (2.8)$$

soit la somme des variations intervenues sur les n sous-périodes de longueur h . Transformer (2.8) en temps continu consiste à garder l'intervalle de temps $[0, T]$ constant, et à faire croître à l'infini le nombre n de sous-périodes. À la limite, l'horizon de transaction h devient égal à l'élément infinitésimal dt .

En l'absence d'informations supplémentaires, on ne peut rien dire sur la distribution limite du processus. L'analyse consiste donc à poser des contraintes sur le processus discret X , de façon

à pouvoir déterminer, lorsque h tend vers zéro, la loi de probabilité de la variation de X , sur un intervalle de temps de longueur dt , et sur un intervalle de temps de longueur finie quelconque.

Ces contraintes seront bien entendu choisies *de façon à ce que la dynamique limite de $X(t)$ se conforme à celle d'un processus d'Itô*. Gardant à l'esprit l'interprétation économique donnée à $X(t)$ et à h , nous pourrions ainsi évaluer le caractère plus ou moins restrictif des hypothèses émises.

On distinguera deux groupes d'hypothèses : celles qui portent directement sur les moments des distributions étudiées, c'est-à-dire sur l'évolution « macroscopique » du cours boursier $X(t)$, et celles qui détaillent la structure interne des lois, c'est-à-dire l'ensemble des événements qui expliquent les variations du cours. Comme nous allons le voir, le premier groupe d'hypothèses n'est pas restrictif. Au contraire, il permet d'associer à $X(t)$ des propriétés dynamiques qui sont nécessairement celles d'un cours boursier. Par contre, le deuxième groupe d'hypothèses introduit certaines limites.

2.3.1 L'évolution macroscopique du cours boursier

Avant de procéder, on définit un certain nombre de termes. Notons $\epsilon(k)$ le changement de prix (le rendement) imprévu sur la période k , compte tenu de l'information disponible en fin de période $k - 1$. On a

$$\epsilon(k) \equiv \Delta(k) - E_{k-1} \{ \Delta(k) \}. \quad (2.9)$$

Par construction $E_{k-1} \{ \epsilon(k) \} = 0$, et $\epsilon(k)$ désigne donc la surprise ayant affecté le rendement du titre à la période k .

La somme des surprises intervenues sur l'intervalle $[0, T]$ est définie par

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \epsilon(k). \quad (2.10)$$

Comme $E_0 \{ \epsilon(k) \} = 0$, $E_0 \{ S(n) \} = 0$. Et

$$V_0 \{ S(n) \} = E_0 \{ S(n)^2 \} \quad (2.11)$$

désigne donc la variance de $S(n)$, conditionnelle à l'information disponible au début de la période 0. Compte tenu des définitions précédentes, $V_0 \{S(n)\}$ est la variance conditionnelle du rendement sur l'intervalle $[0, T]$, et représente donc une mesure du risque, estimé à l'instant 0, induit par la détention jusqu'en T du titre de prix X .

On émet alors l'hypothèse suivante :⁷

Hypothèse 1 *Il existe $A_1 > 0$, constante indépendante de n , telle que $V_0 \{S(n)\} \geq A_1$.*

La variance du cours étant ainsi bornée inférieurement par une constante strictement positive, la détention du titre est *toujours une opération risquée*, même lorsque l'intervalle entre deux cotations est très petit.

Hypothèse 2 *Il existe $A_2 < \infty$, constante indépendante de n , telle que $V_0 \{S(n)\} \leq A_2$.*

Cette hypothèse signifie que le risque, généré par le titre sur la période de détention considérée, reste borné supérieurement, quel que soit le rythme des ouvertures et fermetures des séances de marché. Le risque n'est donc *jamais infini*.

En résumé, les hypothèses 1 et 2 assurent que la réduction du temps séparant deux cotations ne conduit pas à la dégénérescence du risque induit par le titre. Ces deux postulats, bien loin d'être restrictifs, sont en fait constructifs.⁸

Ayant ainsi caractérisé l'incertitude globale sur l'intervalle $[0, T]$, on s'intéresse maintenant à la répartition de cette incertitude sur les n sous-périodes. Notons

$$V_0 \{k\} \equiv E_0 \{ \epsilon^2(k) \} \tag{2.12}$$

la variance du rendement sur la période k , conditionnée par l'information disponible à l'instant 0, et

$$V_0 \equiv \max_k V_0 \{k\} \tag{2.13}$$

⁷Toutes les hypothèses ci-après sont supposées vérifiées pour tout intervalle fini $[0, T]$.

⁸On pourrait objecter que l'hypothèse 2 interdit, en particulier, l'utilisation de lois stables du type Pareto-Levy, dont la variance est infinie. Mais le point de vue adopté ici pour évaluer les restrictions introduites par l'utilisation d'un processus d'Itô reste strictement empirique.

la variance maximale perçue en 0 sur une sous-période de $[0, T]$.

Hypothèse 3 *Il existe $A_3 > 0$, constante indépendante de n , telle que $V_0 \{k\} / V_0 \geq A_3$ pour tout $k = 1, \dots, n$.*

La constante A_3 étant strictement positive, cette hypothèse signifie que l'incertitude, créée par les variations de X , n'est pas concentrée sur certaines sous-périodes de $[0, T]$. Or, dans la réalité financière, les rendements des titres sont toujours incertains, même lorsqu'on considère des intervalles de temps très petits, et l'hypothèse 3 est donc parfaitement justifiée.⁹

Les trois premières hypothèses qualifient donc le risque induit par la détention d'un actif : sur toute période finie $[0, T]$, ce risque n'est ni nul ni infini, et réparti sur les différentes sous-périodes. On peut montrer que, dans ces conditions, la variance $V_0 \{k\}$ sur une sous-période de longueur h doit être asymptotiquement proportionnelle à h pour tout $k = 1, \dots, n$ (et on écrira $V_0 \{k\} \sim h$).¹⁰ Ainsi, lorsque h deviendra très petit ($h = dt$), la variance $V_0 \{k\}$ sera de l'ordre de grandeur de h .

La quatrième hypothèse assure que le rendement anticipé, par unité de temps, conditionnel à l'information disponible au début de la période,

$$\mu_k \equiv E_{k-1} \{ \Delta(k) \} / h, \tag{2.14}$$

est borné.

Hypothèse 4 *Pour tout h , pour tout $k = 1, \dots, n$, l'espérance μ_k est définie, et il existe une constante $A_4 < \infty$, indépendante de h , telle que $|\mu_k| \leq A_4$.*

Ainsi, aussi petit que soit h , le rendement anticipé μ_k reste fini. L'hypothèse 4 est parfaitement conforme à la réalité.

La dernière hypothèse générale est la suivante :

⁹Comme le note Merton [1992, chapitre 3, p.63], l'hypothèse 3 interdit de considérer un ticket de loterie, dont le tirage a lieu à l'instant T . Dans ce cas, $V_0 \{k\} = 0$ pour $k = 1, \dots, n - 1$, et toute l'incertitude, $V_0 \{n\}$, est donc concentrée sur la dernière période. Toutefois, ce type de titre n'intéresse pas directement les marchés financiers.

¹⁰On a $V_0 \{k\} \sim h$ si et seulement si $V_0 \{k\} = O(h)$ et $V_0 \{k\} \neq o(h)$, où « grand O » et « petit o » sont les notations de Landau (voir page 329).

Hypothèse 5 $X(t)$ est un processus markovien.

Se plaçant à l'instant t , la distribution des valeurs futures de X ne dépend donc que de sa valeur courante $X(t)$, et toute autre information est inutile.

S'agissant d'un cours boursier, l'hypothèse 5 semble placer sur $X(t)$ une contrainte extrêmement forte, voire irréaliste.

Pourtant, cette hypothèse est beaucoup moins restrictive qu'il n'y paraît, car la plupart des processus non-markoviens peuvent être transformés en processus markoviens, grâce à une technique appelée « expansion des états », consistant à ajouter des variables supplémentaires. On obtient ainsi un vecteur de processus *conjointement markoviens*, représentant parfaitement le processus $X(t)$ d'origine.

La véritable restriction est en fait la suivante : la distribution conditionnelle de la variable à modéliser *ne dépend que d'un nombre fini d'informations passées*, ce qui est pratiquement le cas dans toute modélisation économique.

Ainsi, nous pouvons poursuivre notre exposé au prix d'une légère modification de l'interprétation donnée initialement au processus $X(t)$. Cette variable ne représente plus *directement* le cours boursier du titre, mais *indirectement*, *via* la technique d'expansion des états : $X(t)$ est l'un des processus du vecteur obtenu au terme de cette expansion.

Ayant admis le caractère non-restrictif de ces hypothèses générales, nous focalisons maintenant notre attention sur une sous-période k de l'intervalle $[0, T]$, pour nous intéresser à la distribution de la surprise $\epsilon(k)$ intervenue sur cette période, c'est-à-dire aux événements qui déterminent les variations du cours boursier.

2.3.2 La structure probabiliste des variations du cours boursier

Admettons que $\epsilon(k)$ puisse prendre une valeur parmi m valeurs distinctes (m fini), notées $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$, de probabilité conditionnelle respective p_1, \dots, p_m .¹¹ On suppose également qu'il existe une con-

¹¹Le conditionnement des réalisations et des probabilités par la période k est omis afin d'alléger les notations.

stante $M < \infty$, indépendante de n , telle que $\epsilon_j^2 \leq M$ pour tout $j = 1, \dots, m$.¹²

Compte tenu des hypothèses précédentes, on peut démontrer que les événements j tels que $p_j \epsilon_j^2 \sim h$ sont les seuls à contribuer de manière significative aux propriétés asymptotiques de la distribution de X , et qu'il est donc raisonnable d'admettre que cette relation est vérifiée pour tout j .

On fait alors l'hypothèse suivante.

Hypothèse 6 Pour tout $j = 1, \dots, m$, il existe des constantes q_j et r_j telles que $p_j \sim h^{q_j}$ et $\epsilon_j \sim h^{r_j}$.

Considérée isolément, cette hypothèse est plutôt difficile à interpréter. Elle limite simplement l'ensemble des fonctions p_j et ϵ_j , perçues en tant que fonctions de h . Mais, de cette hypothèse, on tire directement $p_j \epsilon_j^2 \sim h^{q_j + 2r_j}$, et, comme $p_j \epsilon_j^2 \sim h$, on obtient

$$q_j + 2r_j = 1. \tag{2.15}$$

En outre, puisque $p_j \leq 1$ et ϵ_j^2 est borné, on voit que l'hypothèse 6 implique $q_j > 0$ et $r_j > 0$. Utilisant (2.15), on en conclut que

$$0 \leq q_j \leq 1 \tag{2.16}$$

$$0 \leq r_j \leq 1/2. \tag{2.17}$$

Ces relations doivent être satisfaites pour tout événement j . On établit ainsi un rapport strict entre la rareté d'un événement (la faiblesse de p_j) et la puissance de son effet (la grandeur de ϵ_j) : plus un événement a une amplitude forte (r_j proche de $1/2$), plus sa probabilité d'occurrence doit être faible (q_j proche de 0).

Ceci permet d'exclure toute possibilité de domination d'un événement — qui serait à la fois fréquent et puissant — dans l'explication des rendements obtenus sur un titre, lorsque l'intervalle de temps entre deux cotations se réduit.

¹²Les réalisations sont ici supposées discrètes et bornées. Toutefois, les résultats exposés peuvent être étendus, sans perte de généralité, aux distributions continues et bornées, ainsi qu'à la distribution normale.

Les valeurs limites de r_j et q_j , données par (2.15), (2.16) et (2.17), sont particulièrement significatives. Elles permettent, notamment, de partitionner les événements selon leur rareté relative. Suivant Merton [1992, chapitre 3, p.65], on distingue trois types d'évènements :

- les événements de « type I », tels que $r_j = 1/2$. Ils sont d'amplitude faible ($\epsilon_j \sim h^{1/2}$) et donc relativement fréquents ($q_j = 0$ et donc $p_j \sim 1$). Ils sont en fait si fréquents que, pour h petit, virtuellement toutes les observations de $\epsilon(k)$ seront de ce type. On peut montrer que, lorsque tous les événements sont de ce type, la trajectoire en temps continu de X est elle-même continue ;
- les événements de « type II », tels que $0 < r_j < 1/2$. Ils sont à la fois d'amplitude plus forte et beaucoup plus rares que les événements précédents, mais leur force ϵ_j reste toutefois d'un ordre égal à une puissance de h .¹³ Ces événements sont rares, mais ne remettent pas en cause la continuité des trajectoires de X ;
- les événements de « type III », tels que $r_j = 0$. Ils sont extrêmement puissants ($\epsilon_j \sim 1$, leur amplitude ne dépend plus de h), et très rares ($p_j \sim h$, leurs apparitions se raréfient aussi vite que h tend vers zéro). Contrairement aux événements de type II, la rareté des événements de type III est suffisante pour altérer la continuité de la trajectoire de X . La survenance d'un événement de ce type provoque un saut brutal de la trajectoire, une discontinuité.

Bien qu'extrêmement rares, les événements de type III influencent significativement la distribution des cours. Si on admet leur présence, on doit faire appel, en temps continu, à une classe de processus beaucoup plus large que celle des processus d'Itô : les processus « mixtes » Itô et Poisson.

Ainsi, sous les six hypothèses précédemment exposées, le cours du titre peut être modélisé sans perte de généralité par une différentielle stochastique de la forme

$$dX(t) = \{\mu(X, t) - \lambda(X, t)\} \bar{s}(t) dt + \sigma(X, t) dz(t) + s(t) dQ(t). \quad (2.18)$$

À l'instar d'un processus d'Itô, μ est le changement anticipé de X par unité de temps, σ^2 est la variance du changement de X par unité de temps (avec μ et σ conditionnés par la survenance d'un événement de type I ou II), et $dz(t)$ est l'incrément d'un processus de Wiener.

¹³La rareté est définie ici par $p_j = o(1)$, c'est-à-dire que p_j est très petit devant la somme des probabilités de tous les événements, lorsque h tend vers zéro.



Schéma n° 5 : Exemple de trajectoire pour un processus mixte Itô et Poisson.

Les termes supplémentaires modélisent les effets des événements de type III sur la trajectoire de X (un exemple de trajectoire est donnée au schéma 2.3.2). Le processus $Q(t)$ est un *processus de Poisson* de paramètre λ , où λ désigne le nombre moyen d'occurrence des événements de ce type par unité de temps.

En particulier, $Q(t)$ possède les propriétés suivantes :

1. les accroissements de $Q(t)$ au cours du temps sont indépendants ;
2. tout accroissement de $Q(t)$ au cours du temps est distribué selon une loi de poisson, dont le paramètre est λ fois la longueur de l'intervalle de temps considéré ;
3. la trajectoire de $Q(t)$ est discontinue.

La propriété 2 implique que la probabilité de survenance de plus d'un événement par unité de temps dt est presque nulle. Ceci montre bien que $Q(t)$ modélise les événements rares.

Dans la différentielle stochastique (2.18), $s(t)$ désigne donc une variable aléatoire qui transforme des sauts intervenus sur $dQ(t)$ en sauts sur $dX(t)$, et $\bar{s}(t)$ est l'espérance de $s(t)$ conditionnée par l'apparition d'un événement de type III. Le terme $-\lambda\bar{s}$ désigne donc le changement instantané anticipé de X par unité de temps, créé par la possible apparition des événements de type III.

Dès lors, pour justifier l'utilisation d'un processus d'Itô comme représentation limite du processus X , c'est-à-dire

$$dX(t) = \mu(X, t) dt + \sigma(X, t) dz(t), \quad (2.19)$$

il suffit de poser que la probabilité d'apparition d'un événement de ce type est nulle ($\lambda = 0$), soit, en d'autres termes, de poser l'hypothèse

Hypothèse 7 *Aucun événement de type III n'est susceptible d'affecter la trajectoire du processus $X(t)$.*

Il s'agit ici certainement de l'hypothèse la plus contraignante. Sa signification est claire : utilisant (2.19) comme représentation d'un processus économique, on admet implicitement que les phénomènes de *rupture* sont négligeables dans l'explication de son comportement dynamique.

Dans le cadre des théories financières, cette prise de position est particulièrement importante. Elle conduit à privilégier une vision « fluide » des marchés financiers, réagissant doucement aux nouvelles informations, *parce qu'aucun événement exceptionnel ne peut survenir*. Dans ce contexte, les agents (rationnels) ne vont pas intégrer dans leur comportement une telle éventualité (par exemple, une brusque rupture de politique monétaire). Or, dans un environnement financier souvent instable, on peut raisonnablement supposer que les investisseurs sont sensibles à l'éventualité d'une catastrophe.

Bien entendu, l'hypothèse 7 ne disqualifie pas les modèles économiques à base de processus d'Itô. Simplement, ses conséquences doivent être gardées à l'esprit.

2.4 Conclusion

Nous venons donc de présenter une interprétation économique des modèles stochastiques en temps continu. Ayant justifié le choix du temps continu comme conséquence de la perfection des marchés, nous avons d'abord présenté le processus stochastique le plus utilisé en temps continu : le processus d'Itô. En première approche, nous avons exhibé plusieurs caractéristiques de ce processus, pouvant jeter le doute sur sa généralité. Nous nous sommes dès lors naturellement posé la question de son aptitude à modéliser correctement les variables économiques et financières.

Pour ce faire, nous avons exposé et examiné un certain nombre d'hypothèses mathématico-économiques, permettant de préciser les restrictions sous-jacentes à ce type de modélisation. Considérant un processus $X(t)$ décrivant l'évolution du prix d'un titre au cours des séances successives de marché, sept hypothèses garantissent que X peut être représenté en temps continu par un processus d'Itô, sans perte de généralité. Étudiant un premier groupe d'hypothèses concernant les moments des distributions de probabilité impliquées, notre première impression s'est avérée positive. En effet, nous avons rencontré

- quatre hypothèses relatives au risque et au rendement du titre considéré, parfaitement en accord avec les données empiriques ;
- une hypothèse imposant à X d'être un processus « sans mémoire ». Il s'est avéré que cette hypothèse, apparemment restrictive, était en réalité de nature essentiellement technique.

Il a ensuite été nécessaire de préciser en détail les distributions de probabilité admissibles. Ajoutant une sixième hypothèse légère, nous avons pu répartir les événements en trois catégories (les événements courants, rares, et très rares), et montrer que la force de chacun de ces événements croissait en raison inverse de leur fréquence. Pour justifier l'utilisation de processus d'Itô, il nous a fallu émettre une septième et dernière hypothèse, excluant toute apparition d'un événement très rare.

Cette dernière hypothèse a pour conséquence importante de garantir la continuité de la trajectoire de prix X , éliminant les sauts provoqués par les événements exceptionnellement rares mais exceptionnellement puissants.

En définitive, le processus d'Itô s'avère tout à fait capable de modéliser des variables économiques ou financières, à ceci près qu'il exclut de prendre en compte tout phénomène catastrophique ou de rupture. Les modèles financiers que nous allons examiner dans ce chapitre supposent donc implicitement que l'environnement évolue de façon non-brutale.

Section 3 Le modèle générique d'équilibre d'arbitrage sur un marché soumis à K sources d'incertitude

3.1 Introduction

Un modèle très général de structure des taux, fondé sur le principe de non-arbitrage, a été proposé par Cox, Ingersoll et Ross [1981]. Le principal résultat de ce modèle est une équation différentielle, appelée *équation de structure par terme*, devant être respectée par la fonction prix des actifs obligataires.

Pour obtenir cette équation, on procède en trois temps.

1. On identifie, sous forme de processus d'Itô, les sources d'incertitude qui affectent l'économie, puis on postule que les prix des bons sans coupon dépendent de ces sources, *via* un certain nombre de variables d'état, sans toutefois préciser la forme de cette relation. Utilisant alors le théorème fondamental du calcul stochastique (le *lemme d'Itô*), on peut exprimer les paramètres des processus suivis par les prix en fonction des caractéristiques dynamiques des variables d'état sous-jacentes, et des dérivées partielles de la fonction prix par rapport au temps et aux variables d'état.
2. On réunit un certain nombre de bons sans coupon, de façon à constituer un portefeuille dont la détention soit sans risque sur l'instant suivant. Invoquant la condition d'arbitrage, on égalise alors naturellement le rendement instantané de ce portefeuille au taux court du marché, et on obtient ainsi une relation entre l'espérance et la volatilité du changement instantané du prix de chacun des titres, c'est-à-dire entre les deux paramètres de la fonction prix.
3. Confrontant alors cette dernière relation avec les équations définissant les paramètres de la fonction prix, on obtient une équation différentielle ordinaire. Cette équation peut être résolue après adjonction de conditions aux bornes, spécifiques à l'actif obligataire.

La généralité du travail de Cox, Ingersoll et Ross réside dans la structure de l'économie modélisée : elle est soumise à K sources d'incertitude, et est décrite par N variables d'état (avec $N \geq K$) non-spécifiées. De ce fait, le modèle représente une « matrice », capable d'engendrer une multitude de modèles plus spécifiques : il suffit pour cela de fixer la valeur de K et de N , et de préciser la signification économique des N variables d'état sélectionnées.

Après avoir précisé les concepts de base qui définissent la structure des taux en temps continu, nous exposons les hypothèses constitutives du modèle à K facteurs, puis décrivons les différentes étapes qui conduisent à l'équation de structure par terme. Enfin, nous analysons les potentialités de ce modèle.

3.2 La structure des taux en temps continu : définitions

Comme précédemment, nous considérons des obligations sans coupon, de valeur faciale unitaire, et exemptes de tout risque de défaut. Une telle obligation paye une unité de numéraire, de façon certaine, à la date de son échéance.

Le prix à l'instant t d'une obligation d'échéance s (avec $t \leq s$) est donné par la fonction $P(t, s)$, supposée dérivable en chacun de ses arguments. La maturité de cette obligation est $T \equiv s - t$. On a, par définition

$$P(s, s) \equiv 1. \quad (3.1)$$

Le taux de rendement interne

Le taux de rendement interne (« *yield to maturity* ») d'un bon de prix $P(t, s)$, noté $R(t, s)$, est défini ici comme le taux de rendement qui, appliqué continûment à un investissement de montant $P(t, s)$ en t , permet d'obtenir une unité monétaire à l'instant s . Littéralement, on écrira donc $P(t, s) \exp \{R(t, s)(s - t)\} \equiv 1$. La formule d'actualisation équivalente est

$$P(t, s) \equiv \exp \{-R(t, s)(s - t)\}. \quad (3.2)$$

Résolvant en $R(t, s)$, il vient

$$R(t, s) = -\frac{\ln \{P(t, s)\}}{s - t}. \quad (3.3)$$

Pour un bon d'échéance s en t , le taux de rendement interne sera donc positif (négatif) si son prix est inférieur (supérieur) à l'unité.

En tant que fonction de s , $R(t, s)$ définit la structure des taux d'intérêt à l'instant t . Sa forme est totalement déterminée par la structure des prix $P(t, s)$, et *vice-versa*.

Le taux d'intérêt instantané

Le taux $r(t)$ est le taux instantané au comptant, porté par un prêt devant être remboursé un instant après (la durée de cet instant étant infiniment petite). Il peut donc être défini comme la limite du taux d'intérêt $R(t, s)$, porté par un bon dont la maturité $s - t$ tend vers zéro.

Formellement, on écrira

$$r(t) \equiv \lim_{s \rightarrow t} R(t, s) \quad (3.4)$$

La signification de ce taux « infiniment court » est plus difficile à saisir que dans le cas discret. Suivant Vasicek [1977, p.178], on peut préciser que la valeur W d'un prêt, accordé à ce taux, augmentera d'un montant égal à

$$dW = Wr(t) dt, \quad (3.5)$$

et ceci de façon certaine. Compte tenu de l'importance particulière accordée à l'intervalle de temps de longueur unitaire, le taux $r(t)$ est souvent baptisé « taux sans risque ».

Introduisant (3.3) dans (3.4), on peut également écrire $r(t) = \lim_{s \rightarrow t} \{\ln P(t, s)/(s - t)\}$. Pour $t = s$, on a $\ln P(t, s) = 0$ et $s - t = 0$. Utilisant la règle de l'Hôpital,¹⁴ il vient $r(t) = \lim_{s \rightarrow t} \{P_t(t, s)/P(t, s)\}$, où $P_t(t, s)$ désigne la dérivée partielle de $P(t, s)$ par rapport à t . Avec (3.1), on obtient ainsi

$$r(t) = P_t(t, t). \quad (3.6)$$

Le taux instantané est donc égal à la pente avec laquelle le bon arrivant couramment à maturité s'approche de l'unité, c'est-à-dire au taux de rendement qu'un investisseur peut obtenir en t sur un intervalle de temps de longueur dt .

¹⁴Voir page 329.

3.3 Les hypothèses du modèle

De façon standard, les marchés sont supposés parfaits :

Hypothèse 1 *Il n'existe aucun coût de transaction, taxe, ou problème d'indivisibilité des actifs. Tous les marchés sont compétitifs, tels que chaque participant soit persuadé qu'il peut acheter ou vendre autant d'actifs qu'il le souhaite, au prix de marché. Sur ces marchés, les échanges ne peuvent avoir lieu qu'à l'équilibre.*

Travaillant en temps continu, on ajoute

Hypothèse 2 *Les marchés sont ouverts continûment.*¹⁵

Les marchés obligataires sont définis par :

Hypothèse 3 *Il existe un marché pour l'emprunt et le prêt instantané au taux r , et pour les prêts et emprunts de durée supérieure. Les titres de créance sont des bons sans coupon, de valeur faciale unitaire, exempts de tout risque de défaut. Le taux r ainsi que les prix des divers bons sont déterminés de façon endogène.*

On confère alors aux investisseurs un comportement rationnel standard :

Hypothèse 4 *Les investisseurs sont insatiables, et suffisamment tolérants vis-à-vis du risque qu'ils puissent accepter de détenir un actif risqué ayant une espérance de rendement finie.*

Cette hypothèse double est destinée à garantir un minimum de cohérence dans le fonctionnement des marchés d'actifs risqués. En premier lieu, l'axiome de non-satiété, en interdisant toute situation dans laquelle un individu verrait sa satisfaction augmenter en conséquence d'une diminution de sa richesse, contraint les prix à être tels qu'aucun actif ne soit dominé.¹⁶ En second lieu, la tolérance

¹⁵Comme nous l'avons signalé, l'hypothèse 2 peut être perçue comme une conséquence naturelle de l'hypothèse 1 (cf. introduction de la section précédente, page 64).

¹⁶C'est-à-dire qu'un portefeuille constitué d'autres actifs puisse coûter moins cher tout en offrant un rendement supérieur dans toutes les éventualités.

au risque permet d'assurer que l'offre excédentaire d'un actif risqué donné peut être résorbée, par une augmentation de son rendement espéré.

Ces quatre hypothèses sont complétées par :

Hypothèse 5 *L'information pertinente pour les investisseurs est représentée par la valeur courante d'un vecteur \mathbf{Y} de N variables d'état. Ces variables suivent conjointement un processus d'Itô multidimensionnel à $K \leq N$ chocs aléatoires. La matrice de variance-covariance des changements des variables d'état est semi-définie positive et de rang K .*

Les changements du vecteur \mathbf{Y} peuvent donc être décrits par une différentielle stochastique de la forme¹⁷

$$d\mathbf{Y}(t) = \underbrace{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Y}, t)}_{(N \times 1)} dt + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Y}, t)}_{(N \times K)} d\mathbf{z}(t) \quad (3.7)$$

où $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Y}, t)$ est le vecteur de dimension N des paramètres de tendance, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Y}, t)$ une matrice ($N \times K$) des coefficients de diffusion, telle que la matrice carrée $\boldsymbol{\sigma}_Y^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}'$ de variance-covariance des changements des variables d'état soit semi-définie positive, et $d\mathbf{z}(t)$ est un vecteur de K processus de Wiener indépendants, représentant les K sources fondamentales d'incertitude. Comme nous l'avons signalé, ce type de modélisation interdit toute discontinuité dans la trajectoire de \mathbf{Y} .¹⁸

La dynamique de la n -ième variable d'état, Y_n , est notée

$$dY_n(t) = \underbrace{\mu_n(\mathbf{Y}, t)}_{(1 \times K)} dt + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}'_n(\mathbf{Y}, t)}_{(K \times 1)} d\mathbf{z}(t) \quad (3.8)$$

où

- $\mu_n(\mathbf{Y}, t)$ est l'espérance du changement de la variable d'état Y_n , par unité de temps,¹⁹

¹⁷Dans cette thèse, les matrices référencées dans le corps du texte sont représentées en caractères gras. Lorsque cela peut être utile, les dimensions d'une matrice sont indiquées sous la variable correspondante. De plus, on adopte les conventions mathématiques suivantes : la dérivée d'un scalaire par rapport à un vecteur colonne (ligne) est un vecteur ligne (colonne), et la dérivée d'un vecteur par rapport à un scalaire est un vecteur de même dimension.

¹⁸Les modélisations avec « risque de saut » ont été notamment utilisées dans le cadre de la théorie de l'évaluation des options. Voir sur ce sujet Cox et Ross [1976] et Merton [1976].

¹⁹On a $E[dz_k(t) | z_k(t)] = 0$ pour tout k .

- $\sigma_n(\mathbf{Y}, t)$ est un vecteur colonne de dimension K , égal à la transposée de la n -ième ligne de la matrice σ . Le terme $\sigma_{n,k}^2(\mathbf{Y}, t)$ désigne la variance du changement de Y_n par unité de temps, expliquée par la k -ième source d'incertitude.²⁰

L'interprétation de la différentielle stochastique (3.8) est similaire à celle d'un processus d'Itô unidimensionnel. Le changement instantané de la variable Y_n en t est décomposé en une somme de $K + 1$ éléments :

- un premier élément qui mesure la réponse du changement de Y_n à l'écoulement déterministe du temps dt , par l'intermédiaire du paramètre $\mu_n(\mathbf{Y}, t)$, connu en t ,
- K éléments qui mesurent la réponse du changement de Y_n à chacun des K chocs exogènes indépendants, par l'intermédiaire du vecteur $\sigma_n(\mathbf{Y}, t)$, connu en t .

Ainsi, chaque variable d'état Y_1, \dots, Y_N subit les mêmes K chocs exogènes z_1, \dots, z_K , mais y répond de façon différente, *via* ses paramètres « personnels » σ_n . Les changements en t des variables d'état sont donc corrélés, et cette corrélation est donnée par la matrice carrée σ_Y^2 de dimension N .

Deux contraintes pèsent sur cette matrice : σ_Y^2 est supposée semi-définie positive et de rang K . La première contrainte, imposant $\mathbf{w}'\sigma_Y^2\mathbf{w} \geq 0$ pour tout vecteur \mathbf{w} de dimension N , est naturelle, dans la mesure où cette expression est la variance d'un « portefeuille » de variables d'état, dont la composition est décrite par \mathbf{w} . La seconde indique qu'aucune combinaison linéaire non-nulle des variables d'état ne permet de réduire le nombre des sources d'incertitude pertinentes : l'économie est *effectivement* soumise à K sources de risque.²¹

Une dernière hypothèse permet alors de boucler le modèle, en établissant les croyances des agents quant au fonctionnement de l'économie.

Hypothèse 6 *Tous les investisseurs sont persuadés que l'économie est telle qu'elle est présentée dans l'hypothèse 5, et ont des croyances homogènes quant à la valeur des paramètres du modèle.*

²⁰On a $V[dz_k(t) | z_k(t)] = dt$ pour tout k , et $\text{Cov}[dz_{k_1}(t) dz_{k_2}(t) | z_{k_1}(t), z_{k_2}(t)] = 0$ pour tout $k_1 \neq k_2$.

²¹On notera que $N \geq K$ est une conséquence de cette dernière contrainte.

Compte tenu des hypothèses précédentes, l'hypothèse 6 conduit implicitement à admettre que les anticipations des investisseurs sont rationnelles. Ceux-ci connaissent — ou croient connaître — la véritable structure de l'économie, ainsi que la valeur des paramètres qui la caractérise à un instant donné (μ et σ). Sachant qu'ils sont naturellement attirés par la richesse, il n'y a aucune raison de penser (en l'absence d'hypothèses supplémentaires) que ces investisseurs n'utilisent pas « au mieux » l'information pour prévoir le futur.²² De plus, si on ajoute que l'information pertinente est disponible pour tous, on doit conclure que les marchés financiers de cette économie sont efficaces au sens large.

3.4 Le lien entre prix et variables d'état

La première étape de la méthode conduisant à l'équation de structure par terme consiste à utiliser l'existence d'une relation fonctionnelle entre prix et variables d'état. Il s'agit de se placer dans les conditions d'application du lemme d'Itô, de façon à lier la dynamique des prix aux paramètres des variables d'état.

Dans le cadre du modèle de Cox, Ingersoll et Ross, l'existence d'une telle relation est justifiée par l'hypothèse 6. En effet, si tous les investisseurs sont persuadés que Y représente une information réellement pertinente, ils vont naturellement conditionner leurs décisions d'offre et de demande à cette information. Ainsi, une relation est créée entre les prix et les variables d'état, *via* les comportements individuels, et, formellement, le prix $P(t, s)$ à l'instant t d'un bon sans coupon de maturité $s - t$ peut être considéré comme une fonction du vecteur Y .

Reste à préciser l'indice de Y dans cette relation, c'est-à-dire la portion de temps prise en compte à l'instant t par les agents pour déterminer leur offre et demande de ce bon de prix $P(t, s)$.

Plaçons-nous à l'instant t . Intuitivement, on s'attend à ce qu'un investisseur utilise des prévisions sur l'état de l'économie entre aujourd'hui et s , la date d'expiration de l'obligation. Dans un premier temps, on utilise le fait que $Y(t)$ est un processus markovien²³ pour éliminer toute son histoire : du fait de cette propriété, l'information $\{Y(\tau), \tau < t\}$ n'est d'aucune utilité pour prévoir les

²²L'hypothèse 5 ne faisant aucune référence à un *vrai* modèle de l'économie, le postulat de rationalité des anticipations doit ici être interprété en référence à un mécanisme autoréalisateur.

²³Un processus d'Itô est toujours markovien.

développements de $\mathbf{Y}(t)$, au-delà de t . Compte tenu de cette remarque, on serait tenté d'écrire

$$P(t, s) = P(\{\mathbf{Y}(\tau), t \leq \tau \leq s\}, t, s). \quad (3.9)$$

Puis on remarque que la propriété de markov justifie également l'élimination de l'avenir de $\mathbf{Y}(t)$: $\mathbf{Y}(t)$ est strictement suffisant pour prévoir au mieux la chronique $\{\mathbf{Y}(\tau), \tau > t\}$. Ainsi, $P(t, s)$ ne dépend que de $\mathbf{Y}(t)$, et on écrira de manière compacte

$$P(t, s) = P(\mathbf{Y}, t, s). \quad (3.10)$$

De la même façon, on montre que

$$r(t) = r(\mathbf{Y}, t). \quad (3.11)$$

Avant d'aller plus loin, il est important de préciser que le conditionnement de $P(t, s)$ par $\mathbf{Y}(t)$ ne signifie pas que les investisseurs sont eux-mêmes sans mémoire, et n'utilisent aucune information historique utile pour prévoir l'avenir. Le vecteur $\mathbf{Y}(t)$ est bien conjointement markovien, par définition des processus multidimensionnels d'Itô, mais peut tout à fait inclure des états représentatifs de l'histoire de l'économie, dans la mesure où ceux-ci s'avèrent pertinents.²⁴ En l'absence de toute spécification économique des variables d'état, l'écriture (3.10) doit être uniquement considérée comme une conséquence mathématique des hypothèses 5 et 6.

Le lemme d'Itô²⁵ permet alors d'affirmer que la fonction prix $P(\mathbf{Y}, t, s)$, en tant que fonction du processus d'Itô \mathbf{Y} , est elle-même un processus d'Itô.²⁶ Il en est de même pour le taux de rendement instantané d'un bon, qui se calcule comme le pourcentage de variation instantané de son prix.²⁷

²⁴Comme nous l'avons déjà signalé, la propriété de markov est une restriction faible, dans la mesure où une « expansion des états » d'un processus non-markovien permet souvent de retrouver des processus markovien (voir page 73). Le vecteur $\mathbf{Y}(t)$ pourra ainsi inclure, par exemple, un état égal à la moyenne d'un autre état sur une période donnée du passé.

²⁵Voir annexe générale B.2, page 332.

²⁶Pour cela, on doit admettre que $P(\mathbf{Y}, t, s)$ possède des dérivées partielles premières en \mathbf{Y} et en t , ainsi qu'une dérivée seconde en \mathbf{Y} . De plus ces dérivées doivent être continues.

²⁷Le bon, acheté au prix $P(\mathbf{Y}, t, s)$, est revendu un instant dt après, alors que sa maturité s'est réduite de dt .

Le taux de rendement instantané, à l'instant t , d'un bon d'échéance s , peut donc s'écrire sous la forme

$$\frac{dP(\mathbf{Y}, t, s)}{P(\mathbf{Y}, t, s)} = \alpha(\mathbf{Y}, t, s) dt + \underset{(1 \times K)}{\boldsymbol{\delta}'(\mathbf{Y}, t, s)} \underset{(K \times 1)}{d\mathbf{z}(t)} \quad (3.12)$$

où $\alpha(\mathbf{Y}, t, s)$ est l'espérance mathématique du taux de rendement instantané, et $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{Y}, t, s)$ une matrice de dimension $(K \times 1)$, dont l'élément général $\{\delta_k(\mathbf{Y}, t, s)\}$ est la volatilité non-anticipée de dP/P , engendrée par les fluctuations imprévues de \mathbf{Y} , sous l'effet de la k -ième source d'incertitude. La variance totale du taux de rendement est donc $\boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{\delta}$.

Il est possible de préciser la signification de $\alpha(\mathbf{Y}, t, s)$ en examinant la solution de l'équation différentielle stochastique (3.12), sous la condition terminale $P(\mathbf{Y}, s, s) \equiv 1$. Cette condition stipule que la valeur du bon à échéance est égale à l'unité monétaire remboursée. Elle assure donc que les bons sans coupon sont exempts de tout risque de défaut.

Théorème 1 *Le prix $P(\mathbf{Y}, t, s)$ solution de (3.12) sous $P(\mathbf{Y}, s, s) \equiv 1$ est*

$$P(\mathbf{Y}, t, s) = E_{\mathbf{Y}, t} \left[\exp \left\{ - \int_t^s \alpha(\mathbf{Y}, \tau, s) d\tau \right\} \right] \quad (3.13)$$

Preuve :

Cette preuve utilise des résultats de Friedman [1975, p.147], qui établissent un lien direct entre équation différentielle stochastique et équation intégrale.

On définit

$$V(u) = \exp \left\{ - \int_t^u \alpha(\mathbf{Y}, \tau, s) d\tau \right\}.$$

Le lemme d'Itô nous donne la différentielle du processus $P(\mathbf{Y}, t, u) \times V(u)$ sous la forme

$$d(PV) = V dP + P dV + dP dV.$$

Utilisant l'expression de dP/P donnée en (3.12), et calculant $dV/V = -\alpha du$, la différentielle $d(PV)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} d(PV) &= PV(\alpha du + \delta' dz) \\ &+ PV(-\alpha du) \\ &+ PV(\alpha du + \delta' dz)(-\alpha du). \end{aligned}$$

Comme $du \times du = 0$ et $du \times dz_i = 0$, il vient

$$d(PV) = VP(\delta' dz).$$

On intègre cette équation de t à s , et on obtient ainsi

$$P(\mathbf{Y}, s, s)V(s) - P(\mathbf{Y}, t, s)V(t) = \int_t^s VP(\delta' dz).$$

Par définition, $P(\mathbf{Y}, s, s) = 1$ et $V(t) = 1$. Prenant l'espérance à gauche et à droite, on trouve donc

$$P(\mathbf{Y}, t, s) = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}, t} [V(s)]$$

car l'espérance de l'intégrale stochastique est, par nature, nulle. Or, cette dernière équation est précisément (3.13).

CQFD.

L'équation (3.13) présente le prix courant d'un bon comme l'espérance de la valeur actualisée de l'unité monétaire remboursée à échéance. Cette actualisation est effectuée à un taux évoluant aléatoirement au cours du temps, égal, à chaque instant, à l'espérance du taux de rendement instantané du bon par unité de temps, évaluée à cet instant.

Ainsi, le paramètre α joue le rôle de taux d'actualisation pour ce bon. On notera que cette équation ne résulte d'aucun processus d'équilibre. Elle dérive simplement de l'écriture (3.12) et des caractéristiques techniques de l'actif considéré (c'est-à-dire la condition terminale). Les valeurs futures de α n'étant pas connues, le théorème ne permet pas d'évaluer $P(\mathbf{Y}, t, s)$ à l'instant t .

Le lemme d'Itô nous permet maintenant de préciser la valeur des $K + 1$ paramètres infinitésimaux du processus dP/P . En notation abrégée,²⁸ on écrira

$$\alpha(\mathbf{Y}, t, s) = \frac{1}{P} \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_Y^2 \mathbf{P}_{YY}) + \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\mu} + P_t \right\} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \frac{1}{P} \{ \mathcal{L}[P] \} \\ \delta'(\mathbf{Y}, t, s) &= \frac{1}{P} \{ \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\sigma} \}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

où $\mathcal{L}[P]$ est le générateur différentiel de P sur les variables d'état,²⁹ \mathbf{P}_Y est le vecteur ($1 \times N$) des dérivées partielles de P par rapport aux variables d'état, \mathbf{P}_{YY} est la matrice ($N \times N$) des dérivées partielles secondes de P par rapport à \mathbf{Y} , et « tr » désigne l'opérateur de trace.

L'application du lemme d'Itô permet ainsi de préciser la façon dont l'incertitude s'incorpore dans les prix. Pour obtenir l'équation de structure par terme, il est maintenant nécessaire de contraindre l'évolution des rendements à respecter une condition d'arbitrage.

3.5 Une condition d'arbitrage

La perfection du marché des titres assure la disparition de toute opportunité d'arbitrage. Pour contraindre la structure des prix, il suffit d'exhiber deux portefeuilles, composés différemment, mais ayant des caractéristiques de risque identiques, puis d'égaliser leur taux de rendement.

Dans la logique du temps continu, on s'intéressera au rendement *instantané* de ces portefeuilles. De ce point de vue, le portefeuille entièrement investi au taux r , à l'instant t , est fort simple : il permet d'obtenir, de façon certaine, un taux de rendement $r(t)$. Choisisant ce portefeuille comme référence, il nous reste à construire un portefeuille sans risque instantané.

Pour cela, on procède de la façon suivante. Considérons un portefeuille, composé à partir de $K + 1$ bons risqués de maturité différente, et d'échéance respective s_1, \dots, s_{K+1} . Appelons w_1, \dots, w_{K+1} les proportions du portefeuille global investies dans ces $K + 1$ actifs (on a $\sum_{i=1}^{K+1} w_i =$

²⁸On omet les paramètres des fonctions $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\sigma}$ et P , et on note en indice les variables par lesquelles on dérive partiellement P .

²⁹Voir annexe générale B.2, page 332.

1). La richesse W du détenteur de ce portefeuille ainsi constitué va évoluer conformément à l'équation d'accumulation

$$\frac{dW}{W} = \sum_{i=1}^{K+1} w_i \frac{dP(\mathbf{Y}, t, s_i)}{P(\mathbf{Y}, t, s_i)}. \quad (3.16)$$

Utilisant (3.12), cette équation peut s'exprimer sous la forme de la différentielle stochastique

$$\frac{dW}{W} = \left\{ \sum_{i=1}^{K+1} w_i \alpha(\mathbf{Y}, t, s_i) \right\} dt + \left\{ \sum_{i=1}^{K+1} w_i \delta'(\mathbf{Y}, t, s_i) dz(t) \right\} \quad (3.17)$$

$(1 \times K)$ $(K \times 1)$

Le deuxième terme du membre droit pondère simplement les surprises constatées sur les $K + 1$ actifs, chacune de ces surprises étant la somme des effets des mêmes K sources d'incertitude. On peut donc réarranger ce terme, en sommant d'abord sur les sources d'incertitude, de façon à exprimer l'effet global de chaque source sur l'évolution de la richesse.

La surprise totale sur dW/W s'écrit

$$\sum_{k=1}^K \left\{ \sum_{i=1}^{K+1} w_i \delta_k(\mathbf{Y}, t, s_i) \right\} dz(t). \quad (3.18)$$

Ainsi, pour que le rendement de ce portefeuille soit sans risque, il suffit de choisir les poids w_i tels que chacune des K sources d'incertitude disparaisse, c'est-à-dire tels que

$$\sum_{i=1}^{K+1} w_i \delta_k(\mathbf{Y}, t, s_i) = 0, \quad \forall k = 1, \dots, K. \quad (3.19)$$

Dans ce cas, le taux de rendement du portefeuille ne peut être différent du taux sans risque $r(\mathbf{Y}, t)$:

$$\sum_{i=1}^{K+1} w_i \alpha(\mathbf{Y}, t, s_i) = r(\mathbf{Y}, t). \quad (3.20)$$

Utilisant le fait que $\sum_{i=1}^{K+1} w_i = 1$, l'équation précédente peut se réécrire

$$\sum_{i=1}^{K+1} w_i \{ \alpha(\mathbf{Y}, t, s_i) - r(\mathbf{Y}, t) \} = 0. \quad (3.21)$$

Le système composé des équations (3.19) et de l'équation (3.21) constitue un système de $K + 1$ équations, dont les inconnues sont les $K + 1$ coefficients w_i . Sous forme matricielle, ce système peut s'écrire

$$\begin{bmatrix} \alpha(\mathbf{Y}, t, s_1) - r(\mathbf{Y}, t), & \cdots, & \alpha(\mathbf{Y}, t, s_{K+1}) - r(\mathbf{Y}, t) \\ \delta_1(\mathbf{Y}, t, s_1), & \cdots, & \delta_1(\mathbf{Y}, t, s_{K+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_K(\mathbf{Y}, t, s_1), & \cdots, & \delta_K(\mathbf{Y}, t, s_{K+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Pour que ce système possède une solution non-triviale (c'est-à-dire différente de $w_i = 0, \forall i$), le déterminant de la matrice carrée de dimension $K + 1$ doit être égal à zéro, et son rang doit donc être strictement inférieur à $K + 1$. Les lignes de cette matrice étant dépendantes, une combinaison linéaire non-nulle de celles-ci doit être égale à un vecteur ligne de $K + 1$ zéros.

Cette propriété étant totalement indépendante des titres sélectionnés, le vecteur des coefficients de cette combinaison linéaire ne dépend pas des échéances s_1, \dots, s_{K+1} choisies. Ainsi, pour une échéance s quelconque, on peut écrire

$$\alpha(\mathbf{Y}, t, s) - r(\mathbf{Y}, t) = \underset{(1 \times K)}{\boldsymbol{\lambda}'_z(\mathbf{Y}, t)} \underset{(K \times 1)}{\boldsymbol{\delta}(\mathbf{Y}, t, s)}, \quad (3.23)$$

où $\boldsymbol{\lambda}_z(\mathbf{Y}, t)$ est un vecteur colonne de dimension K .

Considérant \mathbf{Y} et t comme étant fixes, l'équation (3.23) établit une relation linéaire entre le rendement espéré et la volatilité d'une obligation.

3.6 La prime de terme

Clairement, le membre gauche de (3.23) s'interprète comme le taux de rendement espéré, exigé au-delà du taux sans risque pour accepter de détenir, pendant un instant, un bon de maturité $s - t$, soit, en d'autres termes, la *prime de terme instantanée* en t sur l'échéance s . Notant $\Phi(\mathbf{Y}, t, s)$ cette prime, on écrit (3.23) sous la forme

$$\Phi(\mathbf{Y}, t, s) = \boldsymbol{\lambda}'_z(\mathbf{Y}, t) \boldsymbol{\delta}(\mathbf{Y}, t, s). \quad (3.24)$$

La prime de terme, exigée en t sur le bon sans coupon de maturité $s - t$, s'exprime comme la somme des rémunérations offertes à l'équilibre pour chacun des K risques supportés par ce bon.

De plus, la rémunération du « risque- k »³⁰ est le produit d'une mesure de la « quantité » de risque- k exhibée par ce bon, et de la compensation, offerte à l'équilibre, pour une unité de ce risque. Le k -ième élément de $\lambda_z(\mathbf{Y}, t)$ représente donc le « prix de marché » du risque- k , ou encore la prime de risque unitaire offerte à l'équilibre pour le risque- k .³¹

Dans cette économie, les K sources d'incertitude sont *médiatisées* par les N variables d'état, et on doit pouvoir exprimer les primes de terme en fonction des risques perçus sur chacune de ces variables. Définissons le vecteur $\lambda_Y \equiv \sigma \lambda_z$. Compte tenu de la signification de λ_z , ce vecteur représente les rémunérations unitaires, offertes à l'équilibre pour le risque porté par chacun des états, ou, dans l'optique de l'APT de Ross, les « primes de risque des facteurs ». Utilisant l'expression de δ donnée en (3.14), on peut exprimer la prime de terme en fonction de ces primes de risque, et des dérivées partielles du prix de l'actif par rapport aux variables d'état :

$$\Phi(\mathbf{Y}, t, s) = \frac{1}{P} \{P_Y \lambda_Y\}. \quad (3.25)$$

La prime de terme apparaît ici comme une combinaison linéaire des primes de facteur, dont les coefficients mesurent la sensibilité du taux de rendement de l'actif aux variations des états.

3.7 Condition d'arbitrage et CAPM multifacteur

Au-delà des développements mathématiques, on peut s'interroger sur l'origine et la signification de ces résultats. En particulier, l'équation (3.23) peut être interprétée comme la condition d'équilibre d'un *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) multifacteur.

Dans le cadre du CAPM, un marché financier efficient ne peut rémunérer à l'équilibre le risque *diversifiable*, c'est-à-dire le risque pouvant être éliminé en constituant un portefeuille diversifié. Le rendement espéré sur un actif risqué, exigé en supplément du taux sans risque, dépend alors, d'une part, de l'importance du risque non-diversifiable (ou risque *systematique*) supporté par l'acheteur de cet actif, et, d'autre part, du « prix d'équilibre » de ce risque sur le marché.

Conformément à l'analyse standard en la matière, les marchés financiers se voient investis d'une

³⁰En l'absence de toute spécification économique de ces risques, nous appellerons « risque- k » le risque induit par la k -ième source d'incertitude.

³¹On notera toutefois que cette interprétation en terme de prix est abusive, dans la mesure où, dans le cadre de ce modèle, rien ne permet d'établir la positivité de λ_z .

unique mission, à savoir d'organiser au mieux la répartition des risques induits par l'incertitude fondamentale qui affecte l'économie, compte tenu de l'attitude de chaque agent vis-à-vis du risque. Ainsi, un actif financier sera évalué en tant que vecteur de cette répartition, c'est-à-dire du seul point de vue de ses capacités à protéger son détenteur contre les aléas fondamentaux.

Dans le cadre du modèle d'équilibre partiel, l'économie est soumise à K sources d'incertitude. Ces sources étant indépendantes, elles représentent autant de risques non-diversifiables, et, à ce titre, rémunérés par le marché.

On peut dès lors se poser la question du nombre minimum d'actifs différents nécessaires pour assurer correctement le transfert des risques.

Dans le modèle à K facteurs, où la matrice de variance-covariance des états est de rang K , il suffit de K bons, de maturité s_1, \dots, s_K , et tels qu'il ne soit pas possible d'exprimer les risques supportés par l'un d'entre eux comme une fonction linéaire des risques des autres bons. Ainsi, la matrice carrée $K \times K$ des facteurs de risque, notée $\delta'_B \equiv (\delta(\mathbf{Y}, t, s_1), \dots, \delta(\mathbf{Y}, t, s_K))$, est de rang plein, et forme une base qui engendre les facteurs de tous les portefeuilles possibles de bons sans coupon. En particulier, les caractéristiques de risque d'un bon hors-base peuvent toujours être exprimées comme une combinaison linéaire des facteurs de risque des bons inclus dans la base. La condition d'arbitrage contraint alors naturellement le rendement de ce bon hors-base à respecter une stricte relation avec les rendements des bons de la base, notés $\alpha'_B \equiv (\alpha(\mathbf{Y}, t, s_1), \dots, \alpha(\mathbf{Y}, t, s_K))$.

Cette relation peut être explicitée au moyen de (3.23). Cette équation, considérée pour chaque bon de la base, forme le système de K équations

$$\underset{(K \times 1)}{\alpha_B} - r \times \underset{(K \times 1)}{\mathbf{1}} = \underset{(K \times K)}{\delta_B} \times \underset{(K \times 1)}{\lambda_z} \quad (3.26)$$

où $\mathbf{1}$ représente un vecteur colonne de 1. Comme δ_B est, par définition, inversible, on peut résoudre en λ_z :

$$\lambda_z = \delta_B^{-1}(\alpha_B - r\mathbf{1}). \quad (3.27)$$

Utilisant cette équation, (3.23) s'écrit, pour un bon hors-base,

$$\alpha - r = \delta' \delta_B^{-1} (\alpha_B - r \mathbf{1}). \quad (3.28)$$

On reconnaît ici un modèle de type CAPM multifacteur : la prime, offerte à l'équilibre pour un actif risqué, est une combinaison linéaire des rendements excédentaires des bons de la base, dont les coefficients (les *bêtas* $\delta' \delta_B^{-1}$) mesurent la capacité de protection du bon contre chacune des sources d'incertitude.

Clairement, ces bons hors-base sont perçus comme *redondants* par les investisseurs. C'est précisément cette redondance qui crée des liens entre les prix des obligations, et qui fonde ainsi l'existence d'une *structure* par terme des taux d'intérêt.

3.8 L'équation de structure par terme

Utilisant la notation $\lambda_Y \equiv \sigma \lambda_z$ introduite plus haut, on établit maintenant le résultat fondamental suivant :

Théorème 2 *Le prix $P(\mathbf{Y}, t, s)$ satisfait à l'équation différentielle partielle*

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_Y^2 \mathbf{P}_{YY}) + \mathbf{P}_Y (\boldsymbol{\mu} - \lambda_Y) - rP + P_t = 0. \quad (3.29)$$

Preuve :

Il suffit de remplacer dans l'équation (3.23) les paramètres $\alpha(\mathbf{Y}, t, s)$ et $\delta(\mathbf{Y}, t, s)$ par leur expression donnée en (3.14) et (3.15).

CQFD.

Cette équation, appelée *équation de structure par terme*, est une équation différentielle. Sa résolution, sous la condition terminale $P(\mathbf{Y}, s, s) \equiv 1$, fournit la structure des prix $P(\mathbf{Y}, t, s)$, et, par simple transformation, la structure des taux.

L'équation (3.29) constitue le principal résultat du modèle d'arbitrage. Il s'agit d'une condition devant *nécessairement* être respectée sur un marché efficient par les prix des bons sans coupon

pour ne pas créer d'opportunités d'arbitrage.

La solution en terme de prix est donnée dans le corollaire suivant.

Corollaire 1 *Le prix $P(\mathbf{Y}, t, s)$, solution de (3.29) sous $P(\mathbf{Y}, s, s) \equiv 1$, est*

$$P(\mathbf{Y}, t, s) = E_{\mathbf{Y}, t} [\exp \{-\varrho(\mathbf{Y}, t, s)\}] \quad (3.30)$$

avec

$$\varrho(\mathbf{Y}, t, s) = \int_t^s r(\mathbf{Y}, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_t^s \boldsymbol{\lambda}'_z(\mathbf{Y}, \tau) \boldsymbol{\lambda}_z(\mathbf{Y}, \tau) d\tau + \int_t^s \boldsymbol{\lambda}'_z(\mathbf{Y}, \tau) dz(\tau)$$

Preuve :

Cette démonstration est fondée sur la généralisation d'une preuve exposée dans Vasicek [1977, p.182]. Elle est similaire, dans sa démarche, à la preuve du théorème 1.

Posant

$$V(u) = E_{\mathbf{Y}, t} [\exp \{-\varrho(\mathbf{Y}, t, u)\}],$$

on s'intéresse au processus $P(\mathbf{Y}, t, u) \times V(u)$. Le lemme d'Itô permet d'écrire

$$d(PV) = V dP + P dV + dP dV.$$

Pour obtenir dV , on utilise de nouveau le lemme d'Itô, en considérant V comme une fonction de u et de $z(u)$. Il vient

$$dV = \left\{ V_u + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{V}_{zz}) \right\} dt + \{ \mathbf{V}'_z \} dz.$$

On calcule alors $V_u = (-r - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}'_z \boldsymbol{\lambda}_z) V$, $\mathbf{V}_z = -\boldsymbol{\lambda}_z V$, $\mathbf{V}_{zz} = \boldsymbol{\lambda}'_z \boldsymbol{\lambda}_z V$, et $\text{tr}(\mathbf{V}_{zz}) = \boldsymbol{\lambda}_z \boldsymbol{\lambda}'_z V$. La différentielle de V s'écrit donc

$$dV = V \{-r\} dt + V \{-\boldsymbol{\lambda}'_z\} dz.$$

D'autre part, utilisant (3.12), (3.14) et (3.15), la différentielle de $P(\mathbf{Y}, t, u)$ s'écrit

$$dP = \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_Y^2 \mathbf{P}_{YY}) + \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\mu} + P_t \right\} du + \{ \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\sigma} \} dz.$$

Combinant ces deux dernières équations avec l'expression de $d(PV)$ donnée plus haut, on obtient³²

$$\begin{aligned} d(PV) &= V \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_Y^2 \mathbf{P}_{YY}) \right\} du + V \{ \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\sigma} \} dz \\ &\quad + V \{ -rP \} du + V \{ -P \boldsymbol{\lambda}'_z \} dz \\ &\quad + V \{ -\mathbf{P}_Y \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\lambda}_z \} du \\ &= V \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_Y^2 \mathbf{P}_{YY}) + \mathbf{P}_Y (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\lambda}_z) - rP + P_t \right\} du \\ &\quad + V \{ \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\sigma} - P \boldsymbol{\lambda}'_z \} dz. \end{aligned}$$

On reconnaît, en facteur de du , le membre gauche de l'équation de structure par terme (3.29).

Ainsi,

$$d(PV) = V \{ \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\sigma} - P \boldsymbol{\lambda}'_z \} dz.$$

Intégrant cette équation entre t et s , on obtient

$$P(\mathbf{Y}, s, s)V(s) - P(\mathbf{Y}, t, s)V(t) = \int_t^s V \{ \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\sigma} - P \boldsymbol{\lambda}'_z \} dz.$$

Par définition, $P(\mathbf{Y}, s, s) = 1$, $V(t) = 1$, et l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle.

Prenant donc l'espérance à gauche et à droite, il vient

$$P(\mathbf{Y}, t, s) = \mathbb{E}_{\mathbf{Y}, t} [V(s)],$$

³²On utilise ici les règles habituelles du calcul stochastique. En particulier, on voit que

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_Y \boldsymbol{\sigma} dz V \{ -\boldsymbol{\lambda}'_z \} dz \\ &= -V \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\sigma} dz dz' \boldsymbol{\lambda}_z \\ &= -V \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\sigma} I du \boldsymbol{\lambda}_z \\ &= -V \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\lambda}_z du, \end{aligned}$$

où I est la matrice identité.

ce qui est bien l'équation (3.30).

CQFD.

La solution (3.30) est similaire, dans sa forme, à l'équation (3.13). Toutefois, la partie droite de (3.30) ne comporte, en dehors de l'horizon sur lequel s'effectue l'actualisation, que des termes indépendants de l'échéance s considérée. On y trouve uniquement le taux d'intérêt instantanément non-risqué r et le vecteur λ_z des primes unitaires des K risques fondamentaux.

Ainsi, le corollaire 1 introduit une décomposition intéressante du facteur d'actualisation, utilisé pour calculer la valeur présente d'un flux financier futur certain, dans une économie dynamique incertaine. Ce facteur comporte

1. une composante d'actualisation, due à l'écoulement déterministe du temps :

$$\exp \left\{ - \int_t^s r(\mathbf{Y}, \tau) d\tau \right\}.$$

En l'absence d'incertitude, le prix du bon est exactement égal à ce terme ;

2. un terme d'ajustement, dû aux incertitudes qui affectent l'économie :

$$\exp \left\{ - \frac{1}{2} \int_t^s \lambda'_z(\mathbf{Y}, \tau) \lambda_z(\mathbf{Y}, \tau) d\tau - \int_t^s \lambda'_z(\mathbf{Y}, \tau) dz(\tau) \right\}.$$

Le facteur d'actualisation effectif se présente alors comme l'espérance du produit du facteur d'actualisation « temps » et du facteur d'ajustement « incertitude ».

Pour mieux comprendre cet ajustement séquentiel du facteur d'actualisation du temps par le facteur du risque, on procède à l'expérience suivante : imaginons que l'économie décrite précédemment soit modifiée, de façon à ce que les variables d'état suivent le processus

$$d\mathbf{Y} = (\boldsymbol{\mu} - \lambda_Y) dt + \boldsymbol{\sigma} dz, \tag{3.31}$$

c'est-à-dire le processus d'origine, dans lequel le terme de tendance a été diminué des primes offertes à l'équilibre pour les risques de facteur. Dans ces conditions, la tendance de dP est $\alpha = (1/P)\hat{\mathcal{L}}[P]$, où $\hat{\mathcal{L}}$ est la générateur différentiel de P sur les nouvelles variables d'état, et l'équation

de structure par terme se réécrit sous la forme $\hat{\mathcal{L}}[P] - rP = 0$. On obtient ainsi $\alpha = r$, et la solution en terme de prix devient

$$P(\mathbf{Y}, t, s) = \hat{\mathbb{E}}_{\mathbf{Y}, t} \left[\exp \left\{ - \int_t^s r(\mathbf{Y}, \tau) d\tau \right\} \right], \quad (3.32)$$

où le chapeau indique que l'espérance mathématique est conditionnelle au processus modifié \mathbf{Y} , décrit par (3.31).

Le facteur d'ajustement de l'incertitude peut ainsi être éliminé de la formule d'évaluation, en soustrayant à la tendance de chaque variable d'état la prime offerte pour le risque qu'elle porte, c'est-à-dire en transformant les anticipations des investisseurs quant à l'évolution de ces variables. Dans cette économie « ajustée », le taux d'intérêt sans risque r est le taux d'actualisation pertinent.

3.9 Conclusion

Nous venons donc de présenter un modèle très général de structure des taux, fondé sur une condition d'arbitrage. Supposant que l'information pertinente pour les investisseurs était décrite par N variables d'état, et admettant que ces variables suivaient conjointement un processus d'Itô, nous avons pu établir, dans un premier temps, que le prix de chaque bon suivait un processus du même type. Il a été également possible de donner l'expression de l'espérance et de la volatilité instantanée des prix, en fonction des paramètres des variables d'état et des dérivées partielles de la fonction prix. Invoquant alors la nécessité d'une disparition à l'équilibre des opportunités d'arbitrage, il a été possible d'exhiber une relation linéaire entre le rendement instantané sur un bon, espéré en excès du taux sans risque, et une mesure de l'exposition, induite par ce bon, à chacun des risques fondamentaux de l'économie. Considérant alors conjointement le processus des prix et cette relation linéaire, nous avons pu obtenir une équation différentielle ayant comme solution, sous des conditions aux bornes spécifiques à l'actif considéré, la structure par terme des prix.

La modélisation explicite des sources d'incertitude qui grèvent l'économie constitue l'aspect le plus novateur de cette approche. Au-delà des développements mathématiques parfois délicats, il en découle une extrême limpidité des hypothèses, inférences et conclusions, qui facilite une argumentation critique efficace, tant globale que locale.

La méthode de l'équilibre d'arbitrage est séduisante, parce qu'indépendante de l'actif considéré. Elle permet ainsi de contraindre la structure des taux, sans invoquer aucune hypothèse spécifique

au marché obligataire.

Si cette grande généralité fait la force de cette méthode, elle fait aussi, d'une certaine manière, sa faiblesse. Examinant l'équation de structure par terme (3.29), on voit, en effet, que sa résolution est soumise à un certain nombre de spécifications supplémentaires :

- le vecteur $\mathbf{Y}(t)$ des variables d'état, c'est-à-dire le ou les facteurs qui influencent réellement les prix,
- les vecteurs $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Y}, t)$ et $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Y}, t)$ des paramètres infinitésimaux des états $\mathbf{Y}(t)$, c'est-à-dire les caractéristiques du comportement dynamique des facteurs explicatifs de la structure des taux,
- le vecteur $\boldsymbol{\lambda}_z(\mathbf{Y}, t)$ des primes unitaires des K risques fondamentaux, ou, alternativement, le vecteur $\boldsymbol{\lambda}_Y(\mathbf{Y}, t)$ des primes de facteur des risques portés par les N variables d'état.

Il est important de noter que ces éléments sont parfaitement exogènes au modèle, et la méthode conduisant à l'équilibre d'arbitrage ne donne donc aucune indication sur la valeur de ces paramètres.

Ainsi, pour obtenir un modèle de structure des taux, il est nécessaire d'émettre des hypothèses permettant de préciser $\mathbf{Y}(t)$ et $\boldsymbol{\lambda}_Y(\mathbf{Y}, t)$, c'est-à-dire de prendre une position théorique spécifique quant à la détermination de la hiérarchie des taux. Clairement, le modèle à K facteurs n'est *pas* l'expression d'une nouvelle théorie de la structure par terme, mais fonctionne comme un « réceptacle », pouvant accueillir, dans un cadre standard, une large variété de théories.³³

Le caractère exogène, parfaitement identifié, des éléments ci-dessus est alors source de clarté, car il permet de distinguer précisément les contraintes issues d'hypothèses générales concernant le fonctionnement des marchés financiers, des contraintes spécifiques relevant *a priori* d'une théorie de la structure des taux.

En ce sens, l'équilibre d'arbitrage est susceptible de clarifier les positions de la théorie des anticipations. C'est ce thème que nous allons aborder maintenant.

³³Selon les propres termes des auteurs, le modèle crée une « coquille mathématique vide ».

Section 4 Un réexamen de la théorie pure des anticipations à la lumière de l'équilibre d'arbitrage

4.1 Introduction

Réexaminant en profondeur la théorie pure des anticipations, l'article de Cox, Ingersoll et Ross [1981] a profondément marqué les recherches sur la structure des taux.

Comme nous l'avons vu précédemment, ces auteurs ont répertorié quatre formulations différentes de cette théorie, afin de clarifier leur cohérence respective et commune. Le verdict peut être résumé par deux conclusions dévastatrices :

- la proposition la plus générale énoncée dans le cadre de la théorie pure des anticipations, à savoir l'égalité du rendement espéré des stratégies d'investissement sur chaque période de détention, est fautive dans le cadre d'un équilibre à anticipations rationnelles. Cette formulation peut être remplacée par une proposition plus restreinte, postulant l'égalité du rendement espéré sur une période de détention « unitaire » ;
- sous hypothèse d'anticipations rationnelles, les quatre propositions mises en évidence sont incompatibles deux à deux.

En quelque sorte, il n'existe pas *une* théorie pure des anticipations, mais *quatre* propositions mutuellement exclusives.

Bien entendu, ceci ne préjuge pas de la validité de chacune d'elles, et permet simplement d'affirmer que *l'une au plus* de ces propositions peut être vérifiée dans un cadre standard (marchés parfaits et anticipations rationnelles). À l'évidence, le modèle d'équilibre d'arbitrage nous permet d'aller plus loin, en confrontant chacune de ces propositions aux restrictions imposées par la condition d'arbitrage. Compte tenu du caractère *nécessaire* des conditions obtenues dans le cadre du modèle à K facteurs, cette confrontation ne peut déboucher sur la validation de l'une des quatre propositions. Par contre, elle peut potentiellement conduire à l'invalidation de chacune d'entre elles.

C'est ce que nous proposons d'examiner ici. Toutefois, avant de procéder, il est nécessaire de reformuler en temps continu certaines définitions afférentes à la structure des taux.

4.2 Les primes en temps continu : définitions

Pour exprimer les quatre propositions issues de la théorie des anticipations, nous devons redéfinir, en temps continu, deux concepts : le taux à terme implicite et le taux de rendement sur n périodes.

La prime de terme instantanée

L'équivalent continu de la notion de taux de rendement sur n périodes, est, pour une durée de détention « unitaire », le pourcentage instantané de variation de prix. Pour un bon de maturité $s - t$ en t , le taux de rendement instantané $\tilde{H}(t, s)$ se calcule donc comme

$$\tilde{H}(t, s) \equiv \frac{P_t(t, s)}{P(t, s)}. \quad (4.1)$$

où le tilde indique que ce taux est inconnu à l'instant t .

On définit alors la *prime de terme instantanée* (« *Instantaneous holding premium* »), sur l'échéance s et à l'instant t , comme le taux de rendement, espéré au-delà du taux sans risque du moment, sur un investissement de durée dt en bons d'échéance s .

$$\Phi(t, s) = E \left[\tilde{H}(t, s) \mid I(t) \right] - r(t), \quad (4.2)$$

où $I(t)$ désigne l'information disponible en t .

La prime de terme implicite instantanée

On note $F(t, s_1, s_2)$ le taux d'intérêt implicite en t , pour un prêt sans risque entre s_1 et s_2 (avec $t < s_1 < s_2$).

On rappelle que deux opérations, effectuées à l'instant t , sont nécessaires pour construire ce prêt futur : acheter une obligation d'échéance s_2 , au prix $P(t, s_2)$, et vendre au même moment $P(t, s_2)/P(t, s_1)$ obligations d'échéance s_1 , au prix $P(t, s_1)$, de façon à compenser exactement la dépense liée à la première opération. L'effet net de cette stratégie correspond à un prêt d'un montant $P(t, s_2)/P(t, s_1)$ en s_1 , rapportant une unité monétaire en s_2 .

Le taux de rendement interne de cette obligation future fictive, calculable à partir de la structure des taux en t , est donc donné par

$$F(t, s_1, s_2) \equiv -\frac{\ln \{P(t, s_2)/P(t, s_1)\}}{s_2 - s_1}. \quad (4.3)$$

En appliquant à cette équation la règle de l'Hôpital, on obtient la définition du taux à terme implicite instantané, pour l'instant futur s

$$F(t, s) \equiv -\frac{P_s(t, s)}{P(t, s)}, \quad (4.4)$$

où $P_s(t, s)$ désigne la dérivée partielle de $P(t, s)$ par rapport à s . Ce taux, calculable en t , s'interprète comme le taux de rendement instantané marginal qu'un investisseur peut attendre en t , s'il décide d'accroître d'un instant la durée de son prêt, au-delà de s .

Pour préciser cette interprétation, on utilise (3.2) pour évaluer le membre droit de (4.4). Il vient

$$F(t, s) = R(t, s) + (s - t)R_s(t, s). \quad (4.5)$$

Comme le note Campbell [1986, p.185], cette relation entre le taux implicite instantané et le taux de rendement interne est analogue à la relation entre coût marginal et coût moyen. Ainsi, par exemple, si le taux de rendement interne croît avec la maturité (c'est-à-dire si la pente de la structure des taux est positive), le taux implicite est supérieur au taux interne.

Intégrant (4.4) entre t et s , puis utilisant (3.1), on obtient une relation intéressante entre prix et taux à terme implicite instantané :

$$P(t, s) = \exp \left\{ -\int_t^s F(t, \tau) d\tau \right\}. \quad (4.6)$$

Le prix en t d'un bon délivrant une unité monétaire en s est égal à la valeur de ce flux, actualisée aux taux implicites instantanés sur l'intervalle de temps considéré.

Le taux implicite instantané permet de définir la *prime de terme implicite instantanée* (« *instantaneous forward premium* ») sur l'échéance s et à l'instant t , comme

$$\Psi(t, s) = F(t, s) - E[\tilde{r}(s) | I(t)]. \quad (4.7)$$

4.3 Les équations d'équilibre en univers certain

Dans un monde sans incertitude ni friction, peuplé d'agents rationnels, les rendements instantanés de tous les actifs financiers doivent être égaux.

Appliquée au marché des obligations, cette condition d'arbitrage s'écrit

$$H(t, s) = r(t) \quad (4.8)$$

soit encore, utilisant la définition (4.1),

$$P_t(t, s) - r(t)P(t, s) = 0. \quad (4.9)$$

Sous la condition terminale $P(s, s) \equiv 1$, l'unique solution de cette équation différentielle est

$$\frac{1}{P(t, s)} = \exp \left\{ \int_t^s r(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.10)$$

Pour un investisseur disposant de fonds entre t et s , acheter une obligation d'échéance s apporte le même rendement qu'un investissement renouvelé continûment, au taux $r(t)$.

En utilisant la définition (3.2) reliant $P(t, s)$ et $R(t, s)$, on obtient

$$R(t, s) = \frac{1}{s - t} \int_t^s r(\tau) d\tau. \quad (4.11)$$

Les taux « longs » sont une moyenne des taux instantanés, et la structure des taux entre t et s est uniquement fonction de l'évolution du taux court sur cet intervalle de temps.

De plus, utilisant (4.3) et (4.10), on montre que le taux implicite à la structure en t , pour un prêt entre s_1 et s_2 , est précisément le taux au comptant sur la période considérée, tel qu'il prévaudra en s_1 :

$$F(t, s_1, s_2) = R(s_1, s_2). \quad (4.12)$$

De même, par (4.4) et (4.10), on obtient

$$F(t, s) = r(s). \quad (4.13)$$

La conclusion la plus générale de la théorie des taux en univers certain est toujours valide : l'équilibre est caractérisé par l'égalité des rendements de toutes les stratégies possibles d'investissement sur une période de détention donnée (de t_0 à t_n), quelle que soit cette période :

$$\frac{P(t_1, s_1)}{P(t_0, s_1)} \times \frac{P(t_2, s_2)}{P(t_1, s_2)} \times \cdots \times \frac{P(t_n, s_n)}{P(t_{n-1}, s_n)} = \Pi(t_0, t_n), \quad \forall t_0, t_n. \quad (4.14)$$

Dans cette expression, $\Pi(t_0, t_n)$ est indépendant du choix des périodes de réinvestissement ($t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1}$), et de la maturité des obligations sélectionnées (s_1, \dots, s_n).

4.4 Quatre formulations de la théorie pure des anticipations en temps continu

Nous reformulons ici, en temps continu et en avenir incertain, les quatre versions de la théorie pure recensées par Cox, Ingersoll et Ross. Travaillant dans le cadre du calcul stochastique, on doit supposer que l'information utile à l'instant t peut-être représentée par la valeur courante d'un processus stochastique d'Itô multidimensionnel, noté \mathbf{Y} . Le prix à l'instant t d'un bon d'échéance s sera noté $P(\mathbf{Y}, t, s)$.

L'hypothèse locale des anticipations

Cette hypothèse pose la nullité de la prime de terme instantanée $\Phi(\mathbf{Y}, t, s)$, pour toutes les échéances s , et à tout instant t , soit, en d'autres termes, l'égalité du rendement de détention instantané espéré, pour toutes les stratégies d'investissement. Compte tenu des notations adoptées,³⁴ et de la définition de $\Phi(\mathbf{Y}, t, s)$ donnée en (4.2), on peut écrire

$$\mathbb{E} \left[\tilde{H}(\mathbf{Y}, t, s) \mid \mathbf{Y}(t) \right] = r(t) dt. \quad (4.15)$$

Utilisant la définition du taux de rendement instantané $\tilde{H}(\mathbf{Y}, t, s)$, donnée en (4.1), il vient

$$\frac{\mathbb{E} [dP(\mathbf{Y}, t, s) \mid \mathbf{Y}(t)]}{P(\mathbf{Y}, t, s)} = r(t) dt. \quad (4.16)$$

³⁴Par la suite, on omettra le conditionnement de $r(t)$ par $\mathbf{Y}(t)$ pour alléger les notations.

L'équation (4.16) est équivalente à l'équation intégrale³⁵

$$P(\mathbf{Y}, t, s) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ - \int_t^s r(\tau) d\tau \right\} \middle| \mathbf{Y}(t) \right], \quad (4.17)$$

qui montre que le prix courant d'un bon sans coupon est égal à l'espérance de la valeur actuelle du paiement unitaire auquel il donne droit.

L'hypothèse des anticipations en rendement de détention

On doit ici exprimer l'égalité du rendement certain, obtenu en détenant un bon jusqu'à maturité, et du rendement incertain, obtenu sur un investissement instantané renouvelé continûment, pendant cette même période :

$$\frac{1}{P(\mathbf{Y}, t, s)} = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \int_t^s r(\tau) d\tau \right\} \middle| \mathbf{Y}(t) \right]. \quad (4.18)$$

Exprimée en différentielle, (4.18) s'écrit³⁶

$$\mathbb{E} [d(1/P(\mathbf{Y}, t, s)) | \mathbf{Y}(t)] = -r(t)(1/P(\mathbf{Y}, t, s)) dt. \quad (4.19)$$

L'hypothèse des anticipations en taux de rendement interne

Les deux stratégies considérées sont ici les mêmes que précédemment, mais les indicateurs comparés sont les taux de rendement interne :

$$R(\mathbf{Y}, t, s) = \mathbb{E} \left[\frac{1}{s-t} \int_t^s r(\tau) d\tau \middle| \mathbf{Y}(t) \right]. \quad (4.20)$$

Utilisant la définition du taux de rendement interne $R(\mathbf{Y}, t, s)$, donnée en (3.3), il vient après simplification

$$-\ln \{P(\mathbf{Y}, t, s)\} = \int_t^s \mathbb{E} [r(\tau) | \mathbf{Y}(t)] d\tau. \quad (4.21)$$

³⁵Cette équivalence est démontrée par la preuve du théorème page 87

³⁶La démonstration est similaire à celle effectuée dans le cadre de l'hypothèse locale, à ceci près qu'il est nécessaire de calculer préalablement $d(1/P)$ en utilisant le lemme d'Itô.

La forme différentielle de l'équation intégrale (4.21) est³⁷

$$\mathbb{E} [d(\ln P(\mathbf{Y}, t, s)) | \mathbf{Y}(t)] = r(t) dt. \quad (4.22)$$

L'hypothèse des anticipations non-biaisées

Sous cette hypothèse, la prime de terme implicite instantanée $\Psi(\mathbf{Y}, t, s)$ est nulle, pour toutes les échéances s , et à tout instant t . D'après la définition de $\Psi(\mathbf{Y}, t, s)$, donnée en (4.7), on a

$$F(\mathbf{Y}, t, s) = \mathbb{E} [r(s) | \mathbf{Y}(t)]. \quad (4.23)$$

La définition du taux à terme implicite $F(\mathbf{Y}, t, s)$, donnée en (4.4), permet d'écrire

$$-\frac{P_s(\mathbf{Y}, t, s)}{P(\mathbf{Y}, t, s)} = \mathbb{E} [r(s) | \mathbf{Y}(t)]. \quad (4.24)$$

En intégrant (4.24) entre t et s , sous $P(\mathbf{Y}, s, s) \equiv 1$, on obtient

$$-\ln \{P(\mathbf{Y}, t, s)\} = \int_t^s \mathbb{E} [r(\tau) | \mathbf{Y}(t)] d\tau, \quad (4.25)$$

soit exactement l'équation (4.21). Ceci montre qu'en temps continu l'hypothèse des anticipations en taux de rendement interne et l'hypothèse des anticipations non-biaisées sont strictement équivalentes. Par la suite nous n'en considérerons donc qu'une seule.

4.5 Une théorie, trois propositions distinctes

Ainsi, en temps continu, la théorie pure des anticipations prend trois formes distinctes. Comme nous l'avons vu, chacune d'entre elles peut s'exprimer comme une fonction d'évaluation reliant le prix d'un bon sans coupon, de durée $s - t$ en t , aux développements du taux court entre t et s (voir (4.17), (4.18) et (4.22)).

Avant d'étudier ces propositions à la lumière du modèle d'équilibre d'arbitrage, il est utile d'examiner leur compatibilité mutuelle.

³⁷Même remarque que précédemment, en calculant $d(\ln(P))$.

Pour cela, définissons une variable aléatoire \tilde{X} par

$$\tilde{X} \equiv \exp \left\{ - \int_t^s r(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.26)$$

Utilisant (4.17), (4.18) et (4.21), les trois formulations différentes de la théorie pure peuvent respectivement s'exprimer par les trois équations :

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{E} [\tilde{X}] \\ P^{-1} &= \mathbf{E} [\tilde{X}^{-1}] \\ \ln P &= \mathbf{E} [\ln \tilde{X}], \end{aligned} \quad (4.27)$$

soit encore

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{E} [\tilde{X}] \\ P &= \left\{ \mathbf{E} [\tilde{X}^{-1}] \right\}^{-1} \\ P &= \exp \left\{ \mathbf{E} [\ln \tilde{X}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Si la distribution de \tilde{X} est dégénérée, les trois équations ci-dessus sont évidemment identiques, ce qui prouve l'équivalence des diverses versions de la théorie pure en temps continu, lorsque les taux sont certains. Si \tilde{X} est réellement aléatoire, l'inégalité de Jensen permet d'écrire³⁸

$$\left\{ \mathbf{E} [\tilde{X}^{-1}] \right\}^{-1} < \exp \left\{ \mathbf{E} [\ln(\tilde{X})] \right\} < \mathbf{E} [\tilde{X}] \quad (4.29)$$

ce qui prouve que les trois équations sont incompatibles deux à deux.

³⁸Le logarithme népérien étant une fonction concave, on a $\ln(\mathbf{E} [\tilde{X}]) > \mathbf{E} [\ln(\tilde{X})]$. La fonction exponentielle étant strictement croissante, cette relation implique $\mathbf{E} [\tilde{X}] > \exp \left\{ \mathbf{E} [\ln(\tilde{X})] \right\}$. Par changement de variables, on obtient $\mathbf{E} [\tilde{X}^{-1}] > \exp \left\{ \mathbf{E} [\ln(\tilde{X}^{-1})] \right\}$, soit $\mathbf{E} [\tilde{X}^{-1}] > \left\{ \exp \left\{ \mathbf{E} [\ln(\tilde{X})] \right\} \right\}^{-1}$. La stricte décroissance de la fonction inverse pour des valeurs positives implique alors $\left\{ \mathbf{E} [\tilde{X}^{-1}] \right\}^{-1} < \exp \left\{ \mathbf{E} [\ln(\tilde{X})] \right\}$.

Ainsi, si l'hypothèse locale des anticipations (première équation de (4.28)) décrit bien l'équilibre du marché, alors les deux autres hypothèses sous-évaluent les prix, et donc sur-évaluent les taux. La situation est inverse si l'hypothèse des anticipations en rendement de détention (deuxième équation de (4.28)) est vérifiée. Dans la situation intermédiaire, où l'hypothèse des anticipations en taux de rendement interne est supposée valide (dernière équation de (4.28)), l'hypothèse locale induit des taux trop faibles, et l'hypothèse en rendement de détention des taux trop élevés.

Dans un cadre standard, la théorie pure des anticipations recouvre donc trois propositions distinctes. Nous pouvons maintenant examiner si, dans le cadre du modèle à K facteurs, certaines de ces propositions violent les restrictions imposées par la condition d'arbitrage.

4.6 L'expression des primes de terme

Pour préparer cet examen, on s'intéresse, dans un premier temps, aux primes de terme instantanées, induites par chacune des propositions dans le cadre du modèle d'arbitrage.

Dans le contexte général de la théorie pure, on s'attendrait *a priori* à trouver des primes nulles. En effet, si l'isomorphisme longtemps admis entre les théories en univers certain et les théories en univers incertain, sous hypothèse de neutralité vis-à-vis du risque, était effectivement vérifié, il serait naturel d'admettre qu'aucune des propositions de la théorie pure ne conduit à rémunérer un portefeuille au-delà du taux sans risque.

Les développements précédents montrent clairement que cet isomorphisme n'existe pas dans le cadre de la théorie pure de la structure des taux. Dès lors, on doit s'attendre à trouver des primes non-nulles pour certaines propositions.

Pour examiner ceci, on raisonne à partir du processus des prix

$$dP/P = \alpha dt + \delta' dz, \tag{4.30}$$

et on cherche à exprimer la prime de terme $\Phi = \alpha - r$ sous chacune des hypothèses considérées.

Hypothèse locale des anticipations

L'hypothèse locale des anticipations implique, par définition, la nullité des primes de terme. On le vérifie en remarquant que (4.30) induit $E [dP] = \alpha P dt$. Puis, sous hypothèse locale, on note que $E [dP] = rP dt$. Il vient immédiatement $\Phi = 0$.

Hypothèse des anticipations en rendement de détention

Dans ce cas, on calcule au préalable $d(1/P)$. Le lemme d'Itô permet d'écrire

$$d(1/P) = \{-\alpha + \delta'\delta\} (1/P) dt - (1/P)\delta' dz, \quad (4.31)$$

ce qui implique que $E [d(1/P)] = \{-\alpha + \delta'\delta\} (1/P) dt$. Mais, sous l'hypothèse étudiée, $E [d(1/P)] = -r(1/P) dt$, et donc

$$\Phi = \delta'\delta. \quad (4.32)$$

La prime sur chaque bon sans coupon est ici égale à la variance de ses rendements.

Hypothèse des anticipations en taux de rendement interne

Le lemme d'Itô permet ici de calculer

$$d(\ln P) = \left\{ \alpha - \frac{1}{2} \delta'\delta \right\} dt + \delta' dz. \quad (4.33)$$

Sous l'hypothèse étudiée, on a $E [d(\ln P)] = r dt$. On en conclut que

$$\Phi = \frac{1}{2} \delta'\delta. \quad (4.34)$$

La prime est donc ici la moitié de celle obtenue précédemment.

4.7 Confrontation des hypothèses au modèle à K facteurs

On montre ici que les deux dernières propositions, qui induisent des primes de terme non-nulles, sont incompatibles avec un équilibre à anticipations rationnelles.

Pour ce faire, on examine la forme générale des primes concernées. D'après (4.32) et (4.34), cette forme est

$$\Phi(\mathbf{Y}, t, s) = a\delta'(\mathbf{Y}, t, s)\delta(\mathbf{Y}, t, s) \quad (4.35)$$

avec $a = 1$ sous l'hypothèse en rendement de détention, et $a = 1/2$ sous l'hypothèse en taux de rendement interne, ou sous l'hypothèse des anticipations non-biaisées.

On utilise alors un résultat du modèle à K facteurs, qui stipule que la prime de terme sur un bon sans coupon s'exprime comme la somme des rémunérations offertes par le marché pour chacun des risques supportés par ce bon :³⁹

$$\Phi(\mathbf{Y}, t, s) = \underset{(1 \times K)}{\lambda'_z(\mathbf{Y}, t)} \underset{(K \times 1)}{\delta(\mathbf{Y}, t, s)}. \quad (4.36)$$

Intuitivement, une incohérence naît de la confrontation des deux équations ci-dessus : alors que toutes deux expriment la prime de terme comme une combinaison linéaire des paramètres de volatilité $\delta(\mathbf{Y}, t, s)$, les coefficients $a\delta'(\mathbf{Y}, t, s)$ de cette combinaison dans (4.35) — équation dérivée des deux formulations de la théorie pure ici considérées — dépendent de l'échéance s , alors que les coefficients $\lambda'_z(\mathbf{Y}, t)$ dans (4.36) — équation issue de la condition d'arbitrage — n'en dépendent pas.

Égalisant (4.35) et (4.36), il vient

$$\{\lambda'_z(\mathbf{Y}, t) - a\delta'(\mathbf{Y}, t, s)\} \delta(\mathbf{Y}, t, s) = 0. \quad (4.37)$$

S'il est possible de trouver des valeurs de λ_z , δ et a qui satisfassent (4.37) pour un instant du

³⁹Voir équation (3.24) page 91. On rappelle que $\lambda_z(\mathbf{Y}, t)$ est un vecteur $(K \times 1)$ dont le k -ième élément s'interprète comme le « prix » unitaire de marché du risque- k , et $\delta(\mathbf{Y}, t, s)$ est un vecteur de même dimension, dont le k -ième élément mesure la « quantité » de risque- k supportée par un bon d'échéance s en t .

temps et un état $\mathbf{Y}(t)$ particulier, il est facile de montrer que cette équation ne peut être satisfaite à chaque instant, et quel que soit $\mathbf{Y}(t)$.

Les termes $\lambda_z(\mathbf{Y}, t)$ et a étant indépendants de s , l'équation (4.37) indique qu'il existe une relation fonctionnelle entre les K paramètres de volatilité $\delta_1, \dots, \delta_K$ d'un bon, mais que cette relation ne dépend pas de la maturité $s - t$ de ce bon. En conséquence, les facteurs $\delta_1, \dots, \delta_K$ sont, eux-mêmes, indépendants de s , ce qui signifie qu'à chaque instant les bons ont la même volatilité. Formellement, on peut écrire $\delta(\mathbf{Y}, t, s) = \delta(\mathbf{Y}, t)$.

L'impossibilité d'une telle situation apparaît en examinant un bon un instant avant son échéance. Pour $t = s$, les paramètres du processus de prix $dP(\mathbf{Y}, t, s)$ sont donnés par⁴⁰

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{Y}, t, t) &= r(\mathbf{Y}, t) \\ \delta(\mathbf{Y}, t, t) &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{4.38}$$

Sur son dernier instant de vie, un bon sans coupon est donc sans risque, et rapporte naturellement le taux sans risque en vigueur à cet instant.

On doit en conclure que, si $\delta(\mathbf{Y}, t, s)$ est indépendant de s , on doit avoir $\delta(\mathbf{Y}, t, s) = \mathbf{0}$, pour tout s . Dans ces conditions, les prix des bons évoluent de façon totalement déterministe, ce qui contredit de manière flagrante l'hypothèse selon laquelle il existe K sources d'incertitude pertinentes.

Ainsi, dans un monde véritablement incertain, les hypothèses examinées ici (et résumées par (4.35)), violent la condition d'arbitrage, et donc *garantissent* l'existence d'opportunités de gain sans risque.

Cox, Ingersoll et Ross donnent un exemple très simple, permettant d'illustrer ce dernier point. Supposons qu'il n'existe qu'une seule source d'incertitude ($K = 1, N \geq 1$), et considérons deux bons, d'échéance s_1 et s_2 , et de paramètre de volatilité δ_1 et δ_2 , tels que $\delta_1 \delta_2 > 0$. Un portefeuille constitué de ces deux actifs, dans des proportions respectives $w_1 = \delta_2 / (\delta_2 - \delta_1)$ et $w_2 = 1 - w_1$,

⁴⁰De $P(\mathbf{Y}, s, s) \equiv 1$ on déduit $P_{Y_n} = 0 \forall n$. D'autre part, on sait que $r(\mathbf{Y}, t) = P_t(\mathbf{Y}, t, t)$. Introduisant ces résultats dans l'expression des paramètres du processus de prix (équations (3.14) et (3.15), page 89), on obtient (4.38).

est par construction sans risque sur l'instant suivant.⁴¹ Pourtant, si l'équation (4.35) est vérifiée, ce portefeuille paye une prime certaine

$$\Phi = a(w_1\delta_1^2 + w_2\delta_2^2) = a\delta_1\delta_2 > 0 \quad (4.39)$$

et il existe donc bien une opportunité d'arbitrage.

Suivant Cox, Ingersoll et Ross, on doit donc admettre que seule la version locale de la théorie pure des anticipations respecte la condition d'arbitrage.

4.8 Conclusion

Nous venons donc de procéder au réexamen des diverses propositions émanant de la théorie pure des anticipations, dans le cadre du modèle à K facteurs de Cox, Ingersoll et Ross [1981]. Nous avons remarqué, dans un premier temps, que deux des quatre propositions étaient strictement équivalentes en temps continu, puis montré que les trois propositions restantes étaient incompatibles deux à deux. Il a été alors possible de prouver que deux de ces propositions étaient en contradiction avec l'équilibre défini par le modèle à K facteurs, car elles ne respectaient pas les restrictions imposées par la condition d'arbitrage. Ceci nous a permis de conclure que l'hypothèse des anticipations en rendement de détention, en taux de rendement interne, ainsi que l'hypothèse des anticipations non-biaisées, étaient incompatibles avec un équilibre à anticipations rationnelles.

Comme nous l'avons signalé, cette affirmation invalide trois des quatre propositions qui constituent la théorie pure des anticipations, mais ne permet en aucun cas de valider la proposition rescapée. L'hypothèse locale des anticipations est donc *susceptible* de définir un équilibre économique viable.

L'importance du réexamen proposé par Cox, Ingersoll et Ross est considérable. La conclusion principale de l'étude est en effet pour le moins percutante : trois versions de la théorie des anticipations, qui ont fait l'objet de multiples travaux jusqu'à la fin des années soixante-dix, sont déclarées inconsistantes.

Cela dit, un tel résultat ne signifie pas que ces études souffraient d'une quelconque incohérence interne. Elles étaient simplement fondées sur des hypothèses différentes (et, d'ailleurs, souvent

⁴¹On vérifie aisément que $w_1\delta_1 + w_2\delta_2 = 0$.

vagues). L'intérêt du travail de Cox, Ingersoll et Ross est d'avoir clarifié le domaine, explicité les raisonnements, et surtout exprimé la théorie des anticipations dans un cadre standard.

Section 5 Les modèles explicites de structure des taux issus du modèle à K facteurs

5.1 Introduction

Les développements précédents ont mis en valeur des éclaircissements théoriques importants, issus de l'application du principe de non-arbitrage, et cela dans le cadre d'un modèle général et abstrait, comportant K sources d'incertitude non-spécifiées.

Nous montrons maintenant que l'analyse de la théorie des anticipations peut être prolongée, à travers une spécialisation du modèle à K facteurs, sous forme de modèles explicites de la structure des taux. Cette spécialisation consiste, nous l'avons vu, à préciser la valeur d'un certain nombre d'éléments exogènes :

- la liste des variables d'état, qui représente l'information pertinente pour les investisseurs, ainsi que les paramètres caractéristiques du comportement dynamique de chacune de ces variables ;
- les primes unitaires d'équilibre, offertes pour chacun des risques qui affectent ces variables d'état.

Il est intéressant de spécifier ces éléments, dans la mesure où il devient alors possible de résoudre l'équation de structure par terme, et d'obtenir ainsi une solution en terme de prix, ou, de manière équivalente, en terme de taux. Disposant d'une expression explicite pour la structure des taux d'intérêt, on peut étudier ses propriétés dynamiques, et les confronter au comportement effectif de la structure réelle.

Dans le cadre de la théorie des anticipations, les primes sont supposées constantes, c'est-à-dire indépendantes du temps et des variables d'état. Adoptant cette hypothèse, l'essentiel de la discussion portera donc sur la définition et la spécification de ces variables d'état.

Nous pouvons ainsi évaluer la capacité d'un modèle dérivé de la théorie des anticipations à reproduire une dynamique vraisemblable des taux. De plus, nous tirons de cette étude certains enseignements sur la méthode même.

5.2 La structure des taux dans une économie soumise à une seule source d'incertitude : le modèle à un facteur

S'il fallait ne retenir qu'un seul facteur explicatif de la hiérarchie des taux, lequel devrions-nous choisir ? À cette question, la théorie des anticipations répond sans détour : le taux court. Cette théorie, qu'elle soit « pure » (à prime nulle) ou « impure » (à prime constante), est bâtie autour de cette explication moniste : le taux court (actuel et anticipé) est *l'unique* déterminant de la structure par terme.

Nous reprenons donc ici la méthode générale de l'équilibre d'arbitrage dans le cadre d'un modèle où le taux court est la seule variable d'état. Ceci nous permet d'examiner, sous un angle nouveau, les hypothèses nécessaires à l'obtention de la théorie des anticipations.

5.2.1 Le taux court, unique facteur d'incertitude

Suivant Vasicek [1977], on postule que le taux court est l'unique variable aléatoire — l'unique source d'incertitude — déterminant la courbe des taux. Utilisant les hypothèses du modèle à K facteurs, on suppose que les changements de $r(t)$ sont décrits par la différentielle stochastique⁴²

$$dr(t) = \mu(r, t) dt + \sigma(r, t) dz(t). \quad (5.1)$$

Le taux court suivant un processus d'Itô, $\mu(r, t)$ désigne l'espérance du changement instantané de $r(t)$, et $\sigma^2(r, t)$ est égal à la variance de ce même changement.⁴³

À ce stade, le processus gouvernant l'évolution de $r(t)$ est encore très général : la tendance μ et la volatilité σ sont susceptibles de dépendre du niveau courant du taux court et de l'instant considéré.

Comme nous l'avons vu, l'équation (5.1) impose toutefois une condition non-triviale : les trajectoires de $r(t)$ sont continues, et le taux court n'effectue donc aucun saut instantané. Ainsi, par exemple, si on suppose que le taux court est fixé par les autorités, cette propriété exclut la prise en compte d'éventuelles ruptures de politique monétaire.

⁴²On pose $K = 1$, $N = 1$, $Y_1 = r$, $\mu_1 = \mu$ et $\sigma_1 = \sigma$ dans le modèle à K facteurs. Tous les éléments de la différentielle stochastique sont donc scalaires.

⁴³On rappelle que, pour un processus de Wiener $z(t)$, on a $E[dz(t) | z(t)] = 0$ et $V[dz(t) | z(t)] = dt$.

Acceptant tout de même (5.1) comme représentation plausible du processus suivi par $r(t)$, il est maintenant nécessaire de postuler l'existence d'une relation entre le taux court et le prix des obligations sans coupon.

5.2.2 Le lien entre le taux court et le prix des obligations

Suivant la méthode de l'équilibre d'arbitrage, on conditionne la structure des taux à l'aléa fondamental qui affecte l'économie, en admettant que le prix $P(t, s)$ d'une obligation, d'échéance s en t , est déterminé par l'évolution attendue du taux court entre t et s , $\{r(\tau), t \leq \tau \leq s\}$. Le processus $r(t)$ étant markovien, il suffit de poser $P(t, s) = P(r(t), t, s)$, soit, de façon abrégée,

$$P(t, s) \equiv P(r, t, s). \quad (5.2)$$

Cette hypothèse, qui prépare l'application du lemme d'Itô au processus $P(r, t, s)$, signifie que le taux court $r(t)$ représente l'information pertinente pour les investisseurs, et que ceux-ci vont donc ajuster leur comportement à son évolution prévue. De ce fait, un lien est créé, *via* les comportements de marché, entre le taux court et la structure par terme.

Mais, bien entendu, une information n'est pertinente pour les investisseurs qu'à partir du moment où ils la considèrent comme telle, et ce point mérite donc justification. Suivant Richard [1978, p.43], on peut signaler que $r(t)$ représente, pour un investisseur, le coût d'opportunité instantané de détention d'un bon long, comparativement à un investissement productif de sa richesse au taux d'intérêt court. L'évolution attendue de $r(t)$, entre t et s , lui permet donc de mesurer le coût d'opportunité total, engendré par la détention d'un bon d'échéance s pendant un instant de longueur dt . Cet argument a le mérite de rendre explicite une conception de l'articulation réel-financier sous-jacente à la théorie des anticipations : le taux court d'équilibre, lié à la productivité marginale du capital physique, véhicule une information sur les opportunités d'investissement disponibles dans l'économie. Il représente ainsi le « canal » privilégié qui relie la sphère réelle de l'économie aux marchés financiers.

Admettant que $r(t)$ soit une information pertinente, l'équation (5.2) nous oblige à admettre que $r(t)$ représente toute l'information pertinente. En effet, parce qu'il n'y a, par définition, aucune autre variable d'état dans ce modèle, on ne peut utiliser la technique d'expansion des états, et il est donc impossible d'ajouter à l'ensemble d'information pertinent des valeurs passées du taux court.

Dès lors, l'innocuité de l'hypothèse établissant le caractère markovien des variables d'état, dans le cadre du modèle à K facteurs, disparaît ici. Trois lectures de l'équation $P(t, s) \equiv P(r, t, s)$ suffisent pour s'en convaincre :

- toute l'information pertinente pour les investisseurs est concentrée, à chaque instant, dans la valeur courante du taux court ;
- la connaissance de $r(t)$ est suffisante pour former les meilleures anticipations possibles à l'instant t ;
- pour chaque niveau du taux court, une et une seule forme de structure des taux est possible.

Ainsi, dans le cadre des modèles d'équilibre d'arbitrage, la nécessaire explicitation des sources d'incertitude qui affectent l'économie montre qu'il est difficile de soutenir que le taux court est l'unique variable explicative de la structure des taux, et, en même temps, d'affirmer qu'il est markovien.⁴⁴

Considérant (5.1) et (5.2), utilisons tout de même ces hypothèses pour préciser le processus des prix. Le lemme d'Itô permet d'écrire

$$\frac{dP(r, t, s)}{P(r, t, s)} = \alpha(r, t, s) dt + \delta(r, t, s) dz(t) \quad (5.3)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha(r, t, s) &= \frac{1}{P} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2(r, t) P_{rr} + \mu(r, t) P_r + P_t \right\} \\ \delta(r, t, s) &= \frac{1}{P} \{ \sigma(r, t) P_r \} \end{aligned} \quad (5.4)$$

où $\alpha(r, t, s)$ désigne l'espérance mathématique du rendement instantané de l'obligation, et $\delta(r, t, s)$ la volatilité non-anticipée, engendrée par les fluctuations imprévues du taux court.

⁴⁴Ce faisant, nous rendons justice à la théorie des anticipations, en la dissociant du modèle à un facteur. La théorie des anticipations est effectivement une théorie moniste de la structure des taux, mais ne postule pas que le taux court est markovien. De ce fait, elle est potentiellement capable d'appréhender une réalité bien moins caricaturale que celle dont il est question ici.

Le lien entre taux court et prix étant ainsi établi, on peut maintenant invoquer la condition d'arbitrage.

5.2.3 La condition d'arbitrage

Conformément à la démarche de l'équilibre d'arbitrage, on construit un portefeuille comportant deux types d'obligation — les obligations d'échéance s_1 et d'échéance s_2 —, détenues dans des proportions respectives w_1 et $w_2 \equiv 1 - w_1$.

La valeur $W(t)$ de ce portefeuille croît au taux

$$\frac{dW(t)}{W(t)} = \frac{dP(r, t, s_1)}{P(r, t, s_1)} w_1 + \frac{dP(r, t, s_2)}{P(r, t, s_2)} w_2, \quad (5.5)$$

soit

$$\frac{dW(t)}{W(t)} = \{\alpha(r, t, s_1)w_1 + \alpha(r, t, s_2)w_2\} dt + \{\delta(r, t, s_1)w_1 + \delta(r, t, s_2)w_2\} dz(t). \quad (5.6)$$

Pour que son rendement soit certain, il suffit de choisir w_1 et w_2 tels que

$$\delta(r, t, s_1)w_1 + \delta(r, t, s_2)w_2 = 0. \quad (5.7)$$

Si tel est le cas, son rendement instantané ne peut être différent du taux sans risque $r(t)$, et on a donc

$$\alpha(r, t, s_1)w_1 + \alpha(r, t, s_2)w_2 = r(t). \quad (5.8)$$

Utilisant la contrainte $w_1 + w_2 = 1$, l'équation (5.8) s'écrit

$$\{\alpha(r, t, s_1) - r(t)\} w_1 + \{\alpha(r, t, s_2) - r(t)\} w_2 = 0. \quad (5.9)$$

Les équations (5.7) et (5.9) constituent un système de deux équations à deux inconnues, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \alpha(r, t, s_1) - r(t) & \alpha(r, t, s_2) - r(t) \\ \delta(r, t, s_1) & \delta(r, t, s_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Ce système n'admet de solution non-triviale que si son déterminant est nul. Il vient

$$\frac{\alpha(r, t, s_1) - r(t)}{\delta(r, t, s_1)} = \frac{\alpha(r, t, s_2) - r(t)}{\delta(r, t, s_2)}. \quad (5.11)$$

Cependant, la procédure suivie est indépendante des échéances s_1 et s_2 choisies. On peut donc écrire

$$\frac{\alpha(r, t, s) - r(t)}{\delta(r, t, s)} = \lambda_z(r, t), \quad (5.12)$$

pour toute échéance s . Le terme $\lambda_z(r, t)$ étant indépendant de s , cette égalité représente bien la contrainte qui pèse sur les prix des obligations, et fonde, par là même, l'existence d'une structure des taux d'intérêt.

Exprimée sous la forme

$$\alpha(r, t, s) - r(t) = \lambda_z(r, t)\delta(r, t, s) \quad (5.13)$$

l'équation précédente montre bien que $\lambda_z(r, t)$ s'interprète comme la prime unitaire offerte pour le risque engendré par les fluctuations imprévues du taux court, à l'instant t , sous l'effet de $dz(t)$: le rendement instantané espéré, en excès du taux sans risque $r(t)$, sur l'obligation d'échéance s (c'est-à-dire la prime exigée par le marché sur cette échéance) est égal à la prime unitaire du risque induit par la source d'incertitude z , multipliée par une mesure de l'exposition au risque fondamental de cette obligation, $\delta(r, t, s)$.

En multipliant $\lambda_z(r, t)$ par σ , on obtient une mesure du prix accordé au risque fondamental total porté par le taux court. On notera $\lambda_r \equiv \sigma\lambda_z$ la *prime unitaire de risque de taux d'intérêt*. Utilisant cette définition, ainsi que les équations (5.4) et (5.13), on peut exprimer la prime de terme sous la forme

$$\Phi(r, t, s) = \lambda_r \frac{P_r}{P}. \quad (5.14)$$

Cette expression fait apparaître λ_r comme la prime d'équilibre pour une sensibilité unitaire aux variations du taux d'intérêt. Toutefois, dans le cadre de ce modèle d'arbitrage pur, il est impossible de déterminer le signe des éléments qui définissent ci-dessus la prime de terme.

5.2.4 L'équation de structure par terme

Pour obtenir l'équation de structure par terme, il suffit d'introduire dans (5.13) les valeurs de α et δ données en (5.4). Il vient, en notation abrégée,

$$\frac{1}{P} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} + \mu P_r + P_t \right\} - r(t) = \lambda_z \frac{1}{P} \{ \sigma P_r \}, \quad (5.15)$$

soit, après réarrangement,

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} + (\mu - \lambda_r) P_r - rP + P_t = 0. \quad (5.16)$$

La résolution de cette équation différentielle, sous la condition terminale $P(r, s, s) \equiv 1$, fournit la structure des prix $P(r, t, s)$, et, par simple transformation, la structure des taux $R(r, t, s)$.

Utilisant l'équation prix, solution du modèle à K facteurs,⁴⁵ la solution de l'équation différentielle (5.16) s'exprime sous la forme générale suivante :

$$P(r, t, s) = \mathbb{E}_{r,t} \left[\exp \left\{ - \int_t^s r(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_t^s \lambda_z^2(r, \tau) d\tau - \int_t^s \lambda_z(r, \tau) dz(\tau) \right\} \right]. \quad (5.17)$$

L'équation (5.17) montre que, si l'équation différentielle (5.16) contraint effectivement la structure des prix, elle ne permet pas d'obtenir un équilibre unique. À l'évidence, l'obtention d'une solution particulière est soumise à une spécification précise des variables $\mu(r, t)$, $\sigma(r, t)$ et $\lambda_r(r, t)$, qui restent totalement exogènes au modèle.

Pourtant, le problème de la dynamique du taux court et de la valorisation du risque relève clairement de la théorie économique. Le fait que $\mu(r, t)$, $\sigma(r, t)$ et $\lambda_r(r, t)$ soient exogènes justifie donc le caractère essentiellement partiel de l'équilibre obtenu.

5.2.5 Modèle à un facteur et théorie pure des anticipations

La lisibilité du modèle à un facteur constitue sa plus grande qualité. L'explicitation des sources d'incertitude permet notamment de préciser le statut et la portée des hypothèses utilisées pour construire une théorie achevée de la structure des taux. D'un côté, on trouve les hypothèses standards,

⁴⁵Voir équation (3.30) page 95.

indépendantes des actifs étudiés, qui contraignent partiellement les prix. De l'autre, on trouve les hypothèses spécifiques au fonctionnement du marché obligataire, nécessaires pour obtenir une solution particulière. Ainsi, dans un cadre microéconomique standard, *l'essentiel* d'une théorie de la structure des taux peut être identifié au deuxième groupe d'hypothèses.

De ce point de vue, la théorie pure des anticipations se résume simplement par les deux propositions suivantes :

- le taux court est le seul facteur explicatif de la structure des taux ;
- le prime unitaire de risque de taux est identiquement nulle.

Les spécifications formelles correspondantes, à savoir

$$P(t, s) = P(r, t, s) \tag{5.18}$$

$$\lambda_r(r, t) = 0, \tag{5.19}$$

sont suffisantes pour obtenir la solution

$$P(r, t, s) = E_{r,t} \left[\exp \left\{ - \int_t^s r(\tau) d\tau \right\} \right] \tag{5.20}$$

dans le cadre du modèle d'arbitrage de Cox, Ingersoll et Ross. L'équation (5.20) représente bien le cœur de la théorie des anticipations : le prix d'une obligation est égal à l'espérance de la valeur actuelle du seul flux qu'elle procure.

Ainsi, pour obtenir (5.20), nous avons dû utiliser (5.18) et (5.19), *en plus* des hypothèses du modèle à K facteurs. Ceci montre clairement que l'efficience de marché et la rationalité des investisseurs ne permettent pas de justifier les deux propositions formalisées par (5.18) et (5.19). Dès lors, le débat autour de la théorie des anticipations est substantiellement clarifié : cette démarche nous invite, en effet, à concentrer essentiellement l'analyse critique de la théorie sur les arguments utilisés pour justifier la prééminence du taux court et la nullité (ou, par extension, la constance) de la prime unitaire.

Le modèle d'arbitrage à un facteur est présenté ici comme un outil permettant de clarifier le débat théorique. Il n'en est pas moins apte à fournir un cadre d'analyse performant pour mener des analyses empiriques.

5.3 Quelques solutions particulières

Si nous supposons que la théorie (impure) des anticipations est vérifiée ($\lambda_r(r, t) = \lambda_r$), l'équation de structure par terme (5.16) devient

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} + (\mu - \lambda_r)P_r - rP + P_t = 0. \quad (5.21)$$

Pour confronter cette proposition à la réalité, il est nécessaire de préciser les paramètres $\mu(r, t)$ et $\sigma(r, t)$, décrivant le comportement du taux court. Ce faisant, il sera possible de discuter des caractéristiques dynamiques de la structure des taux obtenue.

Trois types de processus ont été proposés pour le taux court :

- le processus de Wiener général,
- le processus d'Ornstein-Uhlenbeck,
- le processus « racine carrée ».

La dynamique de la structure des taux étant directement issue des caractéristiques du processus suivi par $r(t)$, il est utile d'envisager chacune de ces hypothèses, du point de vue de ses capacités à reproduire un comportement dynamique vraisemblable pour le taux court.

5.3.1 Le processus de Wiener général

Ce type de processus a été notamment utilisé par Merton [1973a] et Dothan [1978].

Un processus de Wiener est un processus d'Itô dont les paramètres infinitésimaux sont constants, indépendants du temps et du niveau couramment atteint par le processus. Posant $\mu(r, t) = \mu$, et $\sigma(r, t) = \sigma$ dans (5.1), l'évolution de $r(t)$ est alors décrite par la différentielle stochastique

$$dr(t) = \mu dt + \sigma dz(t), \quad (5.22)$$

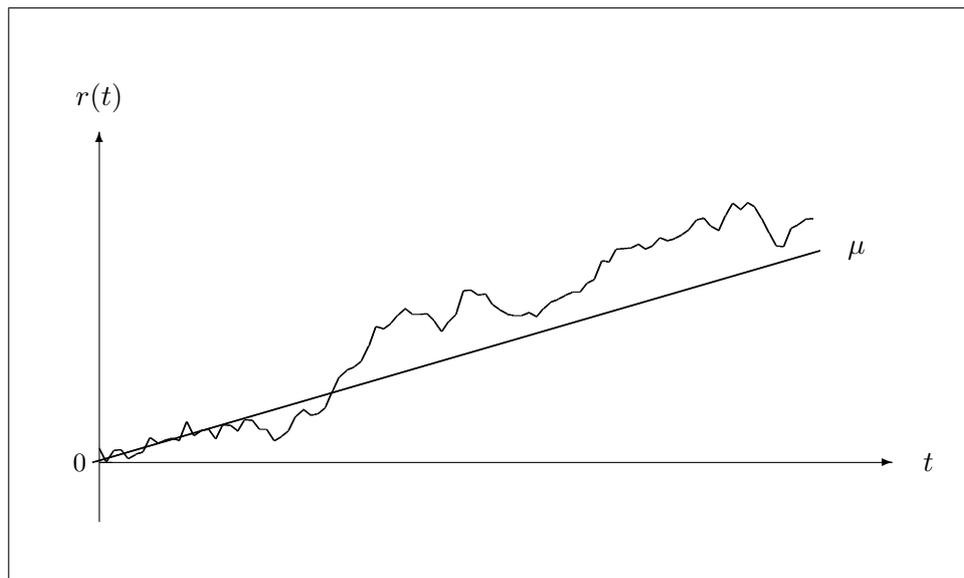


Schéma n°6 : Exemple de trajectoire pour un processus de Wiener Général.

où $dz(t)$ désigne l'incrément d'un processus de Wiener standard, et μ et σ^2 représentent respectivement l'espérance et la variance de la variation instantanée de $r(t)$. Une trajectoire possible de ce type de processus est donnée dans le schéma 5.3.1.

Pour qualifier la dynamique du taux court, on examine l'expression de l'espérance et de la variance d'une valeur future $r(s)$, connaissant la valeur courante $r(t)$. Pour $t \leq s$, on a⁴⁶

$$\begin{aligned} E[r(s) | r(t)] &= r(t) + \mu T \\ V[r(s) | r(t)] &= \sigma^2 T, \end{aligned} \tag{5.23}$$

où $T \equiv s - t$ désigne la longueur de l'intervalle considéré.

L'espérance de la variation du taux court croît donc linéairement avec T . Ceci traduit une tendance d'évolution « sur le long terme ». Toutefois, ce trend ne concernant que l'espérance du processus, il ne garantit pas le sens de variation effectif. La variance étant également proportionnelle à T , il est tout à fait possible qu'une réalisation de $r(s) - r(t)$ prenne un signe opposé à celui de μ . Cela

⁴⁶Voir annexe générale B.3.1, page 335.

signifie, en particulier, que les investisseurs seront incapables de prévoir avec certitude le sens de variation du taux court.

De plus, la variance instantanée σ^2 étant indépendante du temps et du niveau atteint par $r(t)$, l'évolution du taux court apparaît comme fondamentalement instable. Aucune force de rappel ne venant le contraindre à se rapprocher de sa tendance μ , le processus va diverger vers des valeurs infinies pour des périodes très éloignées.

Dans ces conditions, il n'est pas étonnant que la solution de l'équation de structure par terme soit économiquement injustifiable.

Supposant, d'une part, que la théorie des anticipations est vérifiée ($\lambda_r(r, t) = \lambda_r$), et, d'autre part, que $r(t)$ suit un processus de Wiener général de paramètres μ et σ , cette équation s'écrit

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} + (\mu - \lambda_r)P_r - rP + P_t = 0, \quad (5.24)$$

où μ , σ et λ_r sont des constantes.

Sous la condition terminale $P(r, s, s) \equiv 1$, la solution est⁴⁷

$$P(r, t, s) = \exp \left\{ -r(t)T - \frac{(\mu - \lambda_r)T^2}{2} + \frac{\sigma^2 T^3}{6} \right\}, \quad (5.25)$$

où $T \equiv s - t$ désigne la maturité de l'obligation.

Disposant de la fonction prix, on peut calculer P_t , P_r et P_{rr} .⁴⁸ Introduisant ces expressions dans (5.4), on obtient la valeur des paramètres infinitésimaux du processus dP/P :

$$\alpha(r, t, s) = r(t) - \lambda_r T \quad (5.26)$$

⁴⁷Voir démonstration en annexe A.1, page 144.

⁴⁸On trouve

$$\begin{aligned} P_t &= P \left\{ r + (\mu - \lambda_r)T - \frac{\sigma^2 T^2}{2} \right\}, \\ P_r &= P \{-T\} < 0, \\ P_{rr} &= P \{T^2\} > 0. \end{aligned}$$

$$\delta(r, t, s) = -\sigma T,$$

et la prime de terme est donc

$$\Phi(r, t, s) = -\lambda_r T. \quad (5.27)$$

Cette prime est positive lorsque $\lambda_r < 0$. Dans ce cas, elle croît linéairement avec la maturité T de l'obligation, et accompagne ainsi une hausse de la variance $\sigma^2 T^2$ du taux de rendement.

Dans le cadre de la théorie pure des anticipations, on a $\lambda_r = 0$, et le taux de rendement instantané, espéré sur un bon de maturité T , est le taux court sans risque du moment. Comme $\Phi = 0$ et $\delta^2 = \sigma^2 T^2 > 0$, on voit que le marché ne rémunère pas le risque auquel s'exposent pourtant les investisseurs en obligations.

En utilisant (5.25) et la relation de définition $R(t, s) = -\ln \{P(t, s)\} / T$, on obtient

$$R(r, t, s) = r(t) + \frac{(\mu - \lambda_r)T}{2} - \frac{\sigma^2 T^2}{6} \quad (5.28)$$

et on peut calculer la pente

$$\frac{\partial R(r, t, s)}{\partial T} = \frac{(\mu - \lambda_r)}{2} - \frac{1}{3}\sigma^2 T. \quad (5.29)$$

Si $\mu > \lambda_r$, la structure par terme des taux d'intérêt est une courbe en cloche : elle part d'un niveau $r(t)$ avec une pente initiale $(\mu - \lambda_r)/2$, croît jusqu'à atteindre un maximum pour la maturité $T = (3/2)(\mu - \lambda_r)/\sigma^2$, puis décroît de façon monotone pour les maturités suivantes.

Si $\mu \leq \lambda_r$, la structure des taux est décroissante (strictement si $\mu = \lambda_r$).

Dans tous les cas, on a

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} R(r, t, s) = -\infty \quad (5.30)$$

et il paraît difficile de justifier économiquement l'existence de taux au comptant négatifs.⁴⁹ Le

⁴⁹On pourrait avancer que $R(r, t, s)$ représente un taux réel. Mais alors, comment pourrait-on justifier que le taux d'inflation ne soit pas considéré comme une information pertinente par les investisseurs ?

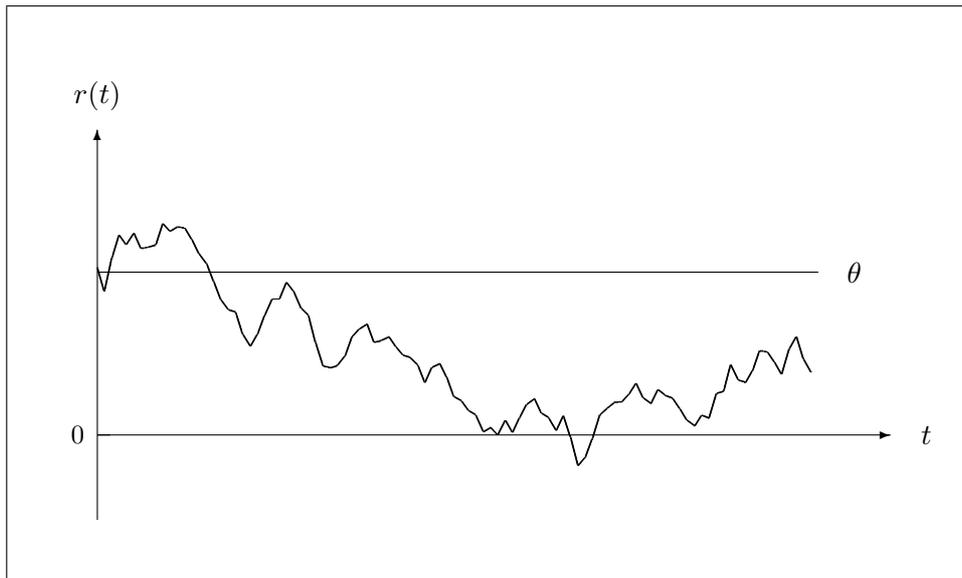


Schéma n°7 : Exemple de trajectoire pour un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

processus de Wiener général étant une très mauvaise description de l'évolution du taux court, il conduit naturellement à une structure des taux empiriquement suspecte.

Son principal défaut est lié à son instabilité, qui se traduit par une divergence totale de sa trajectoire dans le lointain. Or, en examinant une série temporelle du taux court, on soupçonne intuitivement la présence d'une « force de rappel », qui le maintiendrait à un niveau « normal ». Cette intuition trouve une première expression sous la forme du processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

5.3.2 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Cette hypothèse, utilisée par Vasicek [1977] et Langetieg [1980], consiste à représenter la dynamique du taux court par la différentielle stochastique

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t)) dt + \sigma dz(t) \quad (5.31)$$

où κ et θ sont des scalaires strictement positifs. Le schéma 5.3.2 présente une trajectoire possible pour ce type de processus.

Ce processus d'Itô décrit une dynamique régressive, autour d'une valeur « moyenne » θ . Imaginons que $r(t)$ passe au-dessus de ce niveau θ , sous l'effet d'un choc aléatoire $\sigma dz(t)$ positif. Dans

ce cas, l'espérance de la variation instantanée de $r(t)$, égale à $\kappa(\theta - r(t))$, est négative, et $r(t)$ aura tendance à se rapprocher de son niveau moyen, à la « vitesse » κ . La conclusion est identique lorsque $r(t)$ passe au-dessous de θ .⁵⁰

L'évolution de $r(t)$ résulte maintenant de deux forces contradictoires : la force de rappel « équilibrante », et l'aléa « déséquilibrant ». On pallie ainsi un inconvénient majeur du processus de Wiener général, à savoir une espérance et une variance de variation qui tendent vers l'infini.

Dans le cas d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, on a, pour $t \leq s$,⁵¹

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[r(s) | r(t)] &= \theta + (r(t) - \theta)e^{-\kappa T} \\ \mathbf{V}[r(s) | r(t)] &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa T}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Lorsque T devient infiniment grand, l'espérance de $r(s)$ — étant donné son niveau actuel — tend vers la valeur « moyenne » θ . La variance conditionnelle tend, quant à elle, vers la constante finie $\sigma^2/2\kappa$.

Introduisant l'expression des paramètres du processus (5.31) dans l'équation de structure par terme, il vient

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} + \{\kappa(\theta - r) - \lambda_r\} P_r - rP + P_t = 0 \quad (5.33)$$

et sa solution est⁵²

$$\begin{aligned} P(r, t, s) &= \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} (e^{-\kappa T} - 1) r(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - e^{-2\kappa T}) + \frac{1}{\kappa} \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \right\} (1 - e^{-\kappa T}) - \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right\} T \right\}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

⁵⁰Pour ces raisons, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, avec $\kappa > 0$, est aussi appelé *elastic random walk*.

⁵¹Voir annexe générale B.3.2, page 336.

⁵²Voir démonstration en annexe A.2, page 145.

Évaluant P_t , P_r et P_{rr} à partir de cette solution,⁵³ l'équation (5.4) nous donne

$$\begin{aligned}\alpha(r, t, s) &= r(t) + \frac{\lambda_r}{\kappa} \left(e^{-\kappa T} - 1 \right) \\ \delta(r, t, s) &= \frac{\sigma}{\kappa} \left(e^{-\kappa T} - 1 \right),\end{aligned}\tag{5.35}$$

soit une prime de terme

$$\Phi(r, t, s) = \frac{\lambda_r}{\kappa} \left(e^{-\kappa T} - 1 \right),\tag{5.36}$$

positive pour toutes les échéances, si λ_r est négatif.

Si on pose $\lambda_r = 0$, on retrouve encore une situation typique de la théorie pure des anticipations : à l'équilibre, le marché ne paye aucune prime pour une opération pourtant risquée.⁵⁴

Considérant la forme générale de la solution (5.34), la structure des taux est donnée par

$$\begin{aligned}R(r, t, s) &= -\frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{\kappa} \left(e^{-\kappa T} - 1 \right) r(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} \left(1 - e^{-2\kappa T} \right) + \frac{1}{\kappa} \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \right\} \left(1 - e^{-\kappa T} \right) - \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right\} T \right\}.\end{aligned}\tag{5.37}$$

⁵³On trouve

$$\begin{aligned}P_t &= P \left\{ r e^{-\kappa T} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} e^{-2\kappa T} - \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \right\} e^{-\kappa T} + \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right\} \right\}, \\ P_r &= P \left\{ \frac{1}{\kappa} \left(e^{-\kappa T} - 1 \right) \right\} < 0, \\ P_{rr} &= P \left\{ \frac{1}{\kappa^2} \left(e^{-\kappa T} - 1 \right)^2 \right\} > 0.\end{aligned}$$

⁵⁴Contrairement au cas précédent, le risque instantané tend ici vers un maximum avec la maturité du bon :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \delta^2 = \frac{\sigma^2}{\kappa^2}.$$

Pour un instant t donné, les valeurs limites en s de cette expression sont⁵⁵

$$\lim_{s \rightarrow t} R(r, t, s) \equiv r(t), \quad (5.38)$$

par définition, et

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} R(r, t, s) \equiv R(\infty) = \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}. \quad (5.39)$$

Utilisant cette notation, on peut exprimer la structure des taux (5.37) sous la forme

$$R(r, t, s) = R(\infty) + \frac{1}{\kappa T} (1 - e^{-\kappa T}) (r(t) - R(\infty)) + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3 T} (1 - e^{-\kappa T})^2 \quad (5.40)$$

La structure des taux part de $r(t)$, et tend vers un niveau $R(\infty)$ pour les échéances lointaines. Sa forme précise dépend du niveau de $r(t)$, et de la valeur des paramètres κ , θ , σ et λ_r . L'étude du signe de la pente de la structure montre que, si $r(t)$ est en deçà de $R(\infty) - \sigma^2/4\kappa^2$, la courbe des taux est monotone croissante ; si $r(t)$ est au-delà de $R(\infty) + \sigma^2/2\kappa^2$, elle est monotone décroissante. Pour des valeurs intermédiaires de $r(t)$, la structure est en cloche. Bien plus réaliste, cette solution comporte tout de même deux défauts. Le premier tient à la constance de $R(\infty)$, qui contraint la queue de la structure des taux à un niveau indépendant de sa forme. Le second, bien plus grave, est lié à la spécification de la variance instantanée de l'évolution du taux court : celle-ci ne permet pas d'exclure des valeurs négatives pour $r(t)$. En effet, lorsque $r(t)$ s'approche de zéro, sa dynamique tend à ressembler à un processus de Wiener général $dr(t) = \kappa\theta dt + \sigma dz(t)$. Si le terme $\kappa\theta dt$ est forcément positif, $\sigma dz(t)$ peut tout à fait prendre une valeur négative, telle que le taux devienne lui-même négatif.

Pour éviter ceci, il est nécessaire que la variance du processus dépende de son niveau, afin de l'empêcher de franchir la limite du zéro.

⁵⁵ Appliquant la règle de l'Hôpital (voir page 329), il vient

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +\infty} R(r, t, s) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \left\{ e^{-\kappa T} r - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} e^{-2\kappa T} - \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \right\} e^{-\kappa T} + \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right\} \right\} \\ &= \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}. \end{aligned}$$

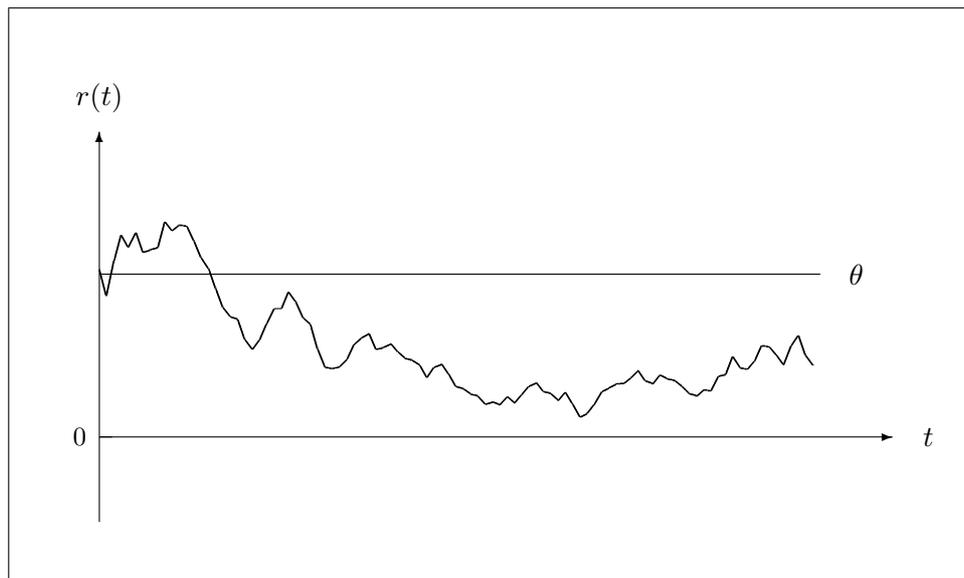


Schéma n°8 : Exemple de trajectoire pour un processus « racine carrée ».

5.3.3 Le processus « racine carrée »

Richard [1978] et Cox, Ingersoll et Ross [1985b] ont utilisé un processus dont la variance instantanée est proportionnelle à la racine carrée du niveau atteint. Sa différentielle stochastique s'écrit

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma\sqrt{r} dz, \quad (5.41)$$

où $\kappa > 0$, et $\theta > 0$. Le schéma 5.3.3 illustre le comportement dynamique de ce type de processus.

À l'instar du processus Ornstein-Uhlenbeck, le processus « racine carrée » est un processus autorégressif d'ordre un, décrivant l'attraction élastique du taux court autour de la valeur centrale θ , avec une vitesse d'ajustement κ .

Cependant, lorsque $r(t)$ devient nul, la dynamique du taux court est ici décrite par l'équation déterministe $dr(t) = \kappa\theta dt > 0$. Ceci montre que, d'une part, le taux court ne peut jamais être négatif, et, d'autre part, qu'il redevient immédiatement positif juste après avoir atteint la valeur zéro. Zéro est une « barrière réfléchissante » pour le taux d'intérêt.⁵⁶

⁵⁶Comme le notent Cox, Ingersoll et Ross [1985b, p.391], la nullité de $r(t)$ n'est envisageable que si $\sigma^2 > 2\kappa\theta$.

On remarque également que $\sigma^2 r(t)$, la variance instantanée du changement du taux court, croît avec son niveau. Ceci concorde avec les constatations empiriques, qui montrent que les taux sont d'autant plus volatiles que leur niveau est élevé.

Sous (5.41), l'espérance et la variance de $r(s)$, sachant $r(t)$, avec $t \leq s$, sont⁵⁷

$$\begin{aligned} E[r(s) | r(t)] &= \theta + (r(t) - \theta)e^{-\kappa T} \\ V[r(s) | r(t)] &= \theta \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa T}) + \frac{\sigma^2}{\kappa} (r(t) - \theta) (e^{-\kappa T} - e^{-2\kappa T}). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Lorsque κ tend vers l'infini (l'ajustement se fait de plus en plus rapidement), l'espérance de $r(t)$ tend vers θ , et sa variance vers zéro. À l'inverse, lorsque κ tend vers zéro (l'attraction vers θ est de plus en plus faible), l'espérance du taux futur tend vers son niveau courant, et sa variance vers $\sigma^2 r(t)T$, ce qui, dans ce cas, témoigne de l'absence de toute force de rappel. D'après (5.42), on voit également que la variance de $r(s)$ tend vers la constante finie $\theta\sigma^2/2\kappa$, lorsque s tend vers l'infini.

Les remarques ci-dessus montre que le processus « racine-carrée » est apte à fournir une représentation vraisemblable de la dynamique du taux court.⁵⁸

Nous devons donc résoudre l'équation différentielle

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r P_{rr} (\kappa(\theta - r) - \lambda_r) P_r - rP + P_t = 0. \quad (5.43)$$

Sous $P(r, s, s) \equiv 1$, la solution est⁵⁹

$$P(r, t, s) = \exp \{A(T)r(t) + B(T)\}, \quad T \equiv s - t \quad (5.44)$$

avec

⁵⁷Voir annexe B.3.3, page 337.

⁵⁸Pour une confirmation empirique, voir notamment l'étude approfondie de Marsh et Rosenfeld [1983].

⁵⁹Voir démonstration en annexe A.3, page 147.

$$\begin{aligned}
 A(T) &= \frac{-2(e^{vT} - 1)}{C(T)} \\
 B(T) &= \frac{2(\kappa\theta - \lambda_r)}{\sigma^2} \ln \left\{ \frac{2v \exp \left\{ \frac{\kappa+v}{2} T \right\}}{C(T)} \right\} \\
 C(T) &= (\kappa + v)(e^{vT} - 1) + 2v \\
 v &= \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Examinant les signes de ces diverses expressions, on voit que $A(T) = P_r/P$ est négatif, et donc que $P_r < 0$: le prix d'un bon est donc une fonction décroissante du taux court. Utilisant l'équation (5.4), on obtient les paramètres du processus de prix dP/P :

$$\begin{aligned}
 \alpha(r, t, s) &= r(t) + \lambda_r A(T) \\
 \delta(r, t, s) &= A(T)\sigma\sqrt{r}.
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

L'expression de δ montre que les taux de rendement sur les obligations sont moins variables lorsque le taux court est faible, et qu'ils sont certains lorsqu'il est nul (dans ce dernier cas, dr est, en effet, non-stochastique). De plus, comme $A'(T) < 0$, la variabilité des rendements d'une obligation décroît avec sa maturité. Le processus « racine carrée » montre ici qu'il reproduit qualitativement certaines propriétés importantes de la structure des taux.

5.4 Un ou deux facteurs ?

Cette étude montre que le modèle à un facteur est capable de générer des modèles explicites intéressants. Au prix d'une complexité croissante, nous avons pu, à chaque étape, améliorer la vraisemblance de la dynamique de la structure des taux obtenue.

Cela dit, le modèle à un facteur reste insatisfaisant. En effet, comme nous l'avons montré, l'unicité du facteur d'incertitude, modélisé sous la forme d'un processus « sans mémoire », conduit en particulier à admettre qu'à chaque niveau du taux court correspond une et une seule structure des taux. Ceci est manifestement irréaliste.

Intuitivement, il manque un « degré de liberté », qui permettrait à la courbe des taux d'être moins rigide. Cette rigidité apparaît clairement lorsqu'on évalue la covariance (par unité de temps) du rendement instantané de deux titres. Choisissons deux titres quelconques, d'échéances respectives s_1 et s_2 . Les processus suivis par les rendements sont notés respectivement

$$\begin{aligned} dP_1/P_1 &= \alpha_1 dt + \delta_1 dz \\ dP_2/P_2 &= \alpha_2 dt + \delta_2 dz. \end{aligned} \tag{5.47}$$

On calcule alors

$$\text{Cov} \left[\frac{dP_1}{P_1}, \frac{dP_2}{P_2} \right] = E [\delta_1 dz \times \delta_2 dz] = \delta_1 \delta_2 dt, \tag{5.48}$$

et, comme $V [dP_i/P_i] = \delta_i^2 dt$, on voit que la corrélation par unité de temps entre les rendements de tous les bons est parfaite. D'une manière plus générale, la parfaite corrélation des taux de rendement, et même, plus directement, des taux d'intérêt, est inhérente aux modèles de structure des taux à un facteur.

Comment éviter cette rigidité ?

La réponse est fort simple : il faut ajouter un ou plusieurs facteurs. Comme il est difficile d'admettre que le taux court ne fasse pas partie des facteurs explicatifs de la structure des taux, les chercheurs se sont attachés à simplement étendre le modèle de Vasicek. Deux modèles sont souvent cités : le modèle de Richard [1978], et le modèle de Brennan et Schwartz [1979].

Richard se réfère à la célèbre théorie de Fisher, relative au taux d'intérêt nominal, pour incorporer comme second facteur le taux d'inflation anticipé. Brennan et Schwartz choisissent, quant à eux, de considérer le taux court et un taux long. Ces deux auteurs se réfèrent à la théorie des anticipations, qui affirme qu'un taux long reflète les anticipations du taux court. Si, dès lors, on refuse l'idée selon laquelle le niveau actuel de ce taux suffit à déterminer son évolution future, le choix du taux long s'impose naturellement.

À l'instar du modèle à un facteur de Vasicek, ces deux modèles s'expriment comme des spécialisations du modèle à K facteurs. Ainsi, par exemple, la dynamique conjointe des variables d'état

du modèle de Brennan et Schwartz est de la forme :

$$\begin{bmatrix} dr(t) \\ dl(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_r(r, l, t) \\ \mu_l(r, l, t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{1r}(r, l, t) & \sigma_{2r}(r, l, t) \\ \sigma_{1l}(r, l, t) & \sigma_{2l}(r, l, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dz_1(t) \\ dz_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

où $l(t)$ désigne le taux long à l'instant t , et où z_1 et z_2 sont deux processus de Wiener indépendants.

En application du théorème 2 du modèle à K facteurs, l'équation de structure par terme s'écrit

$$\frac{1}{2}\sigma_r^2 P_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_l^2 P_{ll} + \sigma_{rl} P_{rl} + (\mu_r - \lambda_r) P_r + (\mu_l - \lambda_l) P_l - rP + P_t = 0, \quad (5.50)$$

où $\sigma_r^2 \equiv \sigma_{1r}^2 + \sigma_{2r}^2$ et $\sigma_l^2 \equiv \sigma_{1l}^2 + \sigma_{2l}^2$ désignent la variance du taux court et du taux long, et $\sigma_{rl} \equiv \sigma_{1r}\sigma_{1l} + \sigma_{2r}\sigma_{2l}$ la covariance entre ces deux taux. Les termes $\lambda_r \equiv \lambda_r(r, l, t)$ et $\lambda_l \equiv \lambda_l(r, l, t)$ sont les primes unitaires, associées au risque de taux. La prime de terme sur un bon est

$$\Phi = \lambda_r \times \frac{P_r}{P} + \lambda_l \times \frac{P_l}{P}, \quad (5.51)$$

ce qui montre bien que cette prime rémunère l'exposition au risque, émanant des variations non-anticipées du taux court et du taux long.

L'intérêt de ces modèles tient au fait que les deux facteurs qui déterminent la structure des taux n'évoluent pas de façon parfaitement coordonnée, et qu'en conséquence la corrélation des taux de rendement sur les divers bons peut être différente de l'unité. Ce faisant, on accroît incontestablement le réalisme du modèle.

Cet avantage se paye toutefois par une augmentation sensible du nombre des paramètres à spécifier. De trois paramètres dans le modèle à un facteur de Vasicek, on passe ici à huit (six paramètres du processus joint des états, plus deux primes unitaires). Tous ces paramètres, et en particulier les primes de risque, doivent être fixés sur la base de considérations théoriques externes au modèle. On peut alors s'interroger sur le sens de la démarche consistant à ajouter un ou plusieurs facteurs au modèle de Vasicek. En effet, en augmentant le nombre de variable d'état, on accroît la nécessité « d'importer » des conclusions théoriques définies par ailleurs, et on réduit la portée du modèle. Ceci est particulièrement criant dans le cas du modèle de Brennan et Schwartz : postulant que deux taux expliquent l'ensemble de la structure, ces auteurs ont d'autant moins à expliquer, et on comprend bien qu'un modèle à trois taux exogènes n'aurait pas grand intérêt.

Mais, alors, existe-t-il un nombre raisonnable de facteurs ? De façon interne, l'approche par arbitrage ne peut fournir aucune réponse à cette question, et on doit faire appel à diverses techniques économétriques. Ceci n'est pas satisfaisant du point de vue de l'analyse théorique des déterminants de la structure des taux.

5.5 Conclusion

Ici se termine notre étude des modèles explicites de structure des taux, issus de l'équilibre d'arbitrage. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés au modèle à un facteur de Vasicek [1977], qui nous a permis, dans une certaine mesure, d'examiner un modèle opérationnel de la théorie des anticipations, exprimée dans un cadre standard. Pour obtenir des solutions explicites en terme de prix ou de taux, il nous a fallu alors spécifier les paramètres du processus suivi par l'unique variable d'état, le taux court. Trois solutions alternatives ont été proposées, puis analysées du point de vue des propriétés de la solution obtenue. Cette analyse nous a permis de mettre en valeur la grande souplesse des modèles d'arbitrage.

Toutefois, comme nous l'avons remarqué, l'unicité du facteur d'incertitude constitue un défaut majeur de ces modèles, dans la mesure où elle impose une corrélation parfaite entre tous les taux. Ceci nous a conduit à considérer la démarche consistant à accroître le nombre des facteurs. Si cette opération améliore indéniablement la vraisemblance du modèle obtenu, il implique en même temps une diminution de la portée du discours théorique sous-jacent. Un problème est, dès lors, apparu : est-il possible de résoudre ce « *trade-off* » de façon optimale ? Dans le cadre de l'équilibre d'arbitrage, la réponse est négative : les spécifications particulières des variables d'état devant être justifiées *en dehors* du modèle, le choix de ces spécifications ne peut être qu'arbitraire. En conséquence, le *trade-off* évoqué ci-dessus ne peut être résolu de façon satisfaisante.

Bien sûr, cette conclusion ne condamne pas les modèles d'arbitrage, qui n'ont jamais prétendu livrer autre chose qu'une solution partielle. Toutefois, nous devons admettre que les difficultés engendrées par le fait qu'un certain nombre d'éléments importants restent exogènes, prêche pour un dépassement de cette approche.

Section 6 De l'insuffisance d'une approche par arbitrage de la structure des taux

6.1 Introduction

Les développements précédents nous ont permis de souligner les difficultés induites par le fait qu'un certain nombre de paramètres importants, utilisés dans les modèles d'arbitrage, restent exogènes. Toutes les critiques que nous avons pu formuler à cet égard ont contribué à affirmer le caractère *souhaitable* d'une approche plus générale, fondée sur une description plus précise des comportements individuels et de l'équilibre économique. Cette conclusion, en forme de recommandation, sous-entend qu'une telle démarche permettrait d'appréhender une part plus grande de réalité, soit, en d'autres termes, *d'améliorer* un modèle déjà performant.

Suivant Cox, Ingersoll et Ross [1985b], on peut aller plus loin, et montrer qu'une approche plus économique de la structure des taux n'est pas seulement *souhaitable*, elle est en fait *indispensable*.

L'argument de Cox, Ingersoll et Ross est, somme toute, fort simple. Si la démarche de l'équilibre d'arbitrage permet d'établir des contraintes devant être nécessairement respectées par les prix de marché, elle n'est pas suffisante pour interdire toute opportunité de gain sans risque. Dès lors, sur ce marché, il doit être possible de mettre en œuvre une stratégie conduisant à des profits certains.

6.2 Contraintes sur les primes instantanées

Considérons donc, de nouveau, le modèle à K facteurs. Concentrant notre attention sur la prime de terme, on peut résumer la démarche conduisant à l'équation de structure des taux de la façon suivante : sous des hypothèses standards d'efficience et de rationalité, et dans le cadre d'un marché financier ouvert continûment, si l'information pertinente est représentée par N variables d'état dont l'évolution conjointe est gouvernée par

$$d\mathbf{Y}(t) = \underbrace{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Y}, t)}_{(N \times 1)} dt + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Y}, t)}_{(N \times K)} d\mathbf{z}(t) \quad (6.1)$$

alors le prix $P(\mathbf{Y}, t, s)$ d'un bon d'échéance s évolue conformément à

$$\frac{dP(\mathbf{Y}, t, s)}{P(\mathbf{Y}, t, s)} = \alpha(\mathbf{Y}, t, s) dt + \underset{(1 \times K)}{\delta'(\mathbf{Y}, t, s)} \underset{(K \times 1)}{dz(t)}, \quad (6.2)$$

où

$$\alpha(\mathbf{Y}, t, s) = \frac{1}{P} \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_Y^2 \mathbf{P}_{YY}) + \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\mu} + P_t \right\} \quad (6.3)$$

$$\equiv \frac{1}{P} \{ \mathcal{L}[P] \}$$

$$\delta'(\mathbf{Y}, t, s) = \frac{1}{P} \{ \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\sigma} \}. \quad (6.4)$$

L'équation (6.3) permet d'exprimer la prime instantanée $\Phi(\mathbf{Y}, t, s) \equiv \alpha(\mathbf{Y}, t, s) - r(\mathbf{Y}, t)$ comme

$$\Phi = \frac{1}{P} \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_Y^2 \mathbf{P}_{YY}) + \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\mu} - rP + P_t \right\}. \quad (6.5)$$

Il est important de souligner que cette dernière équation découle simplement de l'application, sur la fonction prix, des règles de calcul de l'outil mathématique utilisé, à savoir le calcul stochastique. La portée théorique de (6.5), en réalité très limitée, peut être résumée par les deux propositions suivantes :

1. l'information pertinente peut être modélisée par un processus multidimensionnel d'Itô. Cette proposition, largement discutée au début de ce chapitre, s'est avérée fort peu restrictive ;
2. les prix des obligations dépendent de ce processus. Compte tenu du fait que l'information ainsi véhiculée est supposée pertinente, cette proposition apparaît comme tout à fait naturelle.

La signification théorique du modèle naît véritablement de la condition d'arbitrage, qui contraint la prime à respecter la relation⁶⁰

$$\Phi(\mathbf{Y}, t, s) = \boldsymbol{\lambda}'_z(\mathbf{Y}, t) \delta(\mathbf{Y}, t, s), \quad (6.6)$$

⁶⁰Voir équation (3.24) page 91.

où λ_z est le vecteur ($K \times 1$) des primes unitaires d'équilibre des risques issus des K sources fondamentales d'incertitude.

Introduisant (6.4) dans (6.6), on peut écrire

$$\Phi(\mathbf{Y}, t, s) = \frac{1}{P} \{P_Y \lambda_Y\}. \quad (6.7)$$

où $\lambda_Y = \lambda_Y(\mathbf{Y}, t) \equiv \sigma \lambda_z$ est le vecteur ($N \times 1$) des primes unitaires d'équilibre des risques portés par chacune des N variables d'état. Ce vecteur ne dépend pas de l'échéance s . D'après (6.7), le n -ième élément de λ_Y représente la compensation offerte à l'équilibre par le marché pour détenir un actif ayant une sensibilité de un pourcent par rapport aux variations de la n -ième variable d'état. La prime Φ sur un bon s 'exprime comme la somme des compensations offertes, la n -ième compensation étant égale à la sensibilité du bon à la n -ième variable d'état, multipliée par la compensation unitaire offerte pour ce type de sensibilité.

L'intérêt de cette représentation est de montrer que l'équilibre d'arbitrage place des restrictions sur le rendement instantané, espéré en excès du taux sans risque : la prime $\Phi(\mathbf{Y}, t, s)$ sur un bon d'échéance s doit satisfaire à la fois l'équation (6.5) et l'équation (6.7).

Le bouclage du modèle peut être réalisé en spécifiant

- la liste des variables d'état \mathbf{Y} , ainsi que les paramètres $\mu(\mathbf{Y}, t)$ et $\sigma(\mathbf{Y}, t)$ des processus suivis par chacune d'elles ;
- le vecteur $\lambda_Y(\mathbf{Y}, t)$ des primes de risque des variables d'état.

On montre maintenant que certaines spécifications conduisent à des incohérences internes.

6.3 Exemple d'une économie inconsistante

Pour ce faire, plaçons-nous dans le cadre d'un modèle dans lequel la seule variable d'état jugée pertinente par les investisseurs est le taux court. Ce taux est supposé suivre un processus « racine carrée », décrit par la différentielle stochastique

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma\sqrt{r} dz, \quad \text{avec } \kappa, \theta > 0. \quad (6.8)$$

Spécialisant, puis égalisant (6.5) et (6.7), il vient

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r P_{rr} + \kappa(\theta - r)P_r - rP + P_t = \lambda_r(r, t)P_r. \quad (6.9)$$

Il est maintenant nécessaire de spécifier $\lambda_r(r, t)$, le prix d'équilibre d'une sensibilité unitaire aux variations du taux court. Supposons par exemple que cette prime soit une fonction linéaire de $r(t)$, notée

$$\lambda_r(r, t) = \lambda_0 + \lambda_1 r. \quad (6.10)$$

Dès lors, la solution en terme de prix est⁶¹

$$P(r, t, s) = \exp \{A(T)r + B(T)\} \quad (6.11)$$

avec

$$\begin{aligned} A(T) &= \frac{-2(e^{vT} - 1)}{C(T)} \\ B(T) &= \frac{2(\kappa\theta - \lambda_0)}{\sigma^2} \ln \left\{ \frac{2v \exp \left\{ \frac{\kappa + \lambda_1 + v}{2} T \right\}}{C(T)} \right\} \\ C(T) &= (\kappa + \lambda_1 + v)(e^{vT} - 1) + 2v \\ v &= \sqrt{(\kappa + \lambda_1)^2 + 2\sigma^2} \end{aligned} \quad (6.12)$$

où $T \equiv s - t$ désigne la maturité de l'obligation.

Utilisant cette solution pour calculer les divers termes de (6.3) et (6.4), la dynamique des prix (6.2) s'écrit

$$\frac{dP}{P} = \{r + (\lambda_0 + \lambda_1 r)A(T)\} dt + A(T)\sigma\sqrt{r} dz. \quad (6.13)$$

⁶¹On pose $\bar{\kappa} = \kappa + \lambda_1$, $\bar{\theta} = (\kappa\theta)/(\kappa + \lambda_1)$ et $\bar{\lambda}_r = \lambda_0$. L'équation différentielle à résoudre s'écrit alors $\frac{1}{2}\sigma^2 r P_{rr} + (\bar{\kappa}(\bar{\theta} - r) - \bar{\lambda}_r) P_r - rP + P_t = 0$, et on utilise directement la preuve donnée en annexe A.3, page 147.

La prime instantanée $\lambda = (\lambda_0 + \lambda_1 r)A(T)$ s'exprime donc comme une fonction linéaire du taux court.

Pour montrer que (6.13) n'exclut pas *a priori* les opportunités d'arbitrage, on se place dans la situation où le taux court est nul. Posant $r = 0$, (6.13) se réduit à

$$\frac{dP}{P} = \lambda_0 A(T) dt. \quad (6.14)$$

Cette équation décrit une situation dans laquelle le taux de rendement apporté par la détention du bon, sur le prochain instant, est absolument certain, et pourtant différent du taux court en vigueur, égal à zéro. Le terme $A(T)$ étant négatif, on peut dire que, si λ_0 est positif (négatif), il suffit de vendre (d'acheter) des obligations, et de prêter (d'emprunter) au taux court du marché la somme correspondante, pour réaliser un gain sans risque. Sous les hypothèses du modèle, cette situation ne peut en aucun cas représenter un équilibre économique. L'économie est, en quelque sorte, « inconsistante ».

Bien sûr, ce résultat ne remet pas en cause la justesse des inférences mathématiques utilisées pour dériver l'équation de structure par terme, mais souligne crûment le caractère *nécessaire* de la condition d'arbitrage utilisée.

6.4 Conclusion

La démarche de l'équilibre d'arbitrage montre ici ses limites : elle est tout simplement incapable, en elle-même, de définir un équilibre économique viable. En conséquence, elle ne peut fournir d'algorithme permettant de décider de la viabilité de la situation obtenue.

Cette dernière conclusion est particulièrement importante. Du point de vue des applications empiriques, elle signifie qu'il est malheureusement possible de s'évertuer à tester un modèle, sans jamais se rendre compte qu'il est en fait inconsistant. Du point de vue théorique, elle conduit à admettre *l'insuffisance intrinsèque* de l'approche exposée dans ce chapitre : la procédure consistant à utiliser un modèle, bâti sur la condition d'arbitrage, pour analyser une théorie de la structure des taux définie « en dehors » — et résumée par une spécification particulière des paramètres exogènes μ , σ et λ_Y —, devient inacceptable, du fait que le modèle obtenu ne peut échapper au soupçon de l'incohérence. Dès lors, une autre démarche doit être envisagée pour spécifier un modèle de structure des taux.

Mais quelle direction prendre ?

La critique précédente montre clairement la voie : il nous faut découvrir une relation fonctionnelle entre les paramètres μ , σ et λ_Y , de façon à assurer *a priori* l'absence d'opportunité d'arbitrage à l'équilibre.

La portée de cette conclusion, apparemment modeste, est en réalité considérable : pour exhiber une relation fonctionnelle entre ces paramètres, on doit rendre endogène leur détermination au sein du modèle. Pour rendre endogène le vecteur des primes unitaires λ_Y , il est nécessaire de s'intéresser à l'attitude des agents vis-à-vis du risque, et donc à leurs préférences. De même, rendre endogène le taux court conduit naturellement à modéliser les processus de production à l'œuvre dans l'économie, pour introduire l'épargne et l'investissement.

À l'évidence, le concept d'équilibre pertinent dans ce contexte n'est plus celui issu du principe d'arbitrage, mais celui de l'égalité entre offre et demande.

Le renversement de perspective est bien total : on est conduit ici à décrire *au préalable* les structures et comportements de la sphère réelle de l'économie, le respect de la condition d'arbitrage étant analysé comme une simple conséquence logique d'un équilibre économique au sens traditionnel du terme.

Pour la théorie traditionnelle, ces conclusions sont dévastatrices, mais constituent en même temps une importante perspective de renouveau.

Section 7 Conclusion du chapitre 2

Ainsi s'achève notre étude des modèles d'arbitrage de la structure des taux.

Dans un premier temps, nous avons analysé la pertinence d'une représentation des phénomènes économiques au moyen de processus d'Itô. Nous avons montré que ce choix n'était pas aussi restrictif qu'on aurait pu le penser, de prime abord. Toutefois, l'hypothèse conduisant à admettre la continuité des trajectoires des processus a été jugée significative d'un renoncement à toute explication en terme de rupture. À ceci près, nous avons conclu que l'outil de base, utilisé par les modèles d'équilibre de la structure des taux, ne remettait pas en cause la généralité des résultats obtenus.

Nous avons ensuite exposé le modèle d'arbitrage à K facteurs, et mis en valeur ses qualités. Sa grande transparence, outre le fait qu'elle favorise une critique directe et rigoureuse, permet de séparer clairement les hypothèses nécessaires à l'obtention d'un équilibre d'arbitrage, des hypothèses devant être spécifiées relativement à des considérations exogènes au modèle. De ce fait, le modèle à K facteurs s'est avéré potentiellement capable de constituer une plate-forme, destinée à réinterpréter les théories traditionnelles de la structure des taux.

Il a alors été possible de procéder au réexamen de la théorie pure des anticipations, à travers quatre versions utilisées couramment dans la littérature. Exprimées en temps continu, deux versions se sont avérées identiques, et les trois restantes ont pu être déclarées incompatibles deux à deux. Confrontées à la condition d'équilibre issue du modèle d'arbitrage, deux de ces trois versions ont montré qu'elles étaient insoutenables dans un cadre théorique standard. En conclusion, nous avons dû admettre que seule la version locale de la théorie pure des anticipations, postulant l'égalité des rendements espérés sur une période de longueur unitaire, était susceptible d'être valide dans le cadre d'un équilibre économique plus général.

Nous avons ensuite spécialisé le modèle à K facteurs, en spécifiant, en particulier, la prime et les facteurs de risque, en accord avec la théorie des anticipations, puis en examinant la structure des taux conditionnellement à divers processus supposés du taux court. Nous avons apprécié la souplesse du modèle, mais été tenté d'ajouter de nouveaux facteurs explicatifs, de façon à accroître sa vraisemblance empirique. Ceci nous a permis de souligner le caractère arbitraire des choix effectués en la matière, et, finalement, l'inaptitude de l'approche par arbitrage à construire un modèle de structure des taux satisfaisant, du point de vue de l'analyse théorique.

Ces réserves ont été largement confirmées par un argument formel, démontrant que certaines spécifications des paramètres exogènes au modèle pouvaient conduire à des situations d'équilibre paradoxales, *garantissant* l'existence d'opportunités d'arbitrage. Aussi, nous avons dû admettre que la méthode utilisée pour définir cet équilibre ne fournissait aucune indication sur le choix de ces paramètres, et, en même temps, ne pouvait assurer la cohérence du modèle obtenu. De ce point de vue, cette méthode est clairement défailante.

Cette conclusion est, pour nous, fort importante. Elle signifie en particulier que l'endogénéisation du prix d'équilibre du risque est nécessaire au maintien de la cohérence d'un modèle de structure des taux. Dès lors, la boîte de pandore de l'économie réelle est ouverte : le prix d'équilibre du risque dépend de l'attitude des agents vis-à-vis de ce risque, et donc, *via* leur fonction d'utilité, de leur niveau de consommation effectif. Mais, dans l'optique de la théorie standard, leur choix de consommation est déterminé conjointement à leur choix d'épargne et d'investissement, c'est-à-dire à leur offre et demande de titres.

La boucle est donc bouclée, et l'équilibre d'arbitrage, purement financier, s'efface au profit d'un équilibre traditionnel exprimé en terme d'offre et de demande. C'est à cette perspective, qui semble prometteuse, que nous allons maintenant nous consacrer.

Annexe du chapitre 2

On donne ici la démonstration des diverses solutions particulières, obtenues dans le cadre du modèle d'arbitrage à un facteur, en supposant que la théorie des anticipations est vérifiée.

Les solutions obtenues lorsque le taux court suit un processus de Wiener général ou un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sont démontrées (sous hypothèse locale des anticipations) dans Roger [1991, pp.256–260]. Pour un processus « racine carrée », la preuve livrée ici est tirée de Choe [1986, p.505].

A.1 Solution pour un processus de Wiener général

On doit résoudre une équation différentielle de la forme

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} + (\mu - \lambda_r)P_r - rP + P_t = 0, \quad (\text{A.1})$$

sous la condition terminale $P(r, s, s) \equiv 1$, où μ , σ et λ_r sont des constantes.

Pour ce faire, on envisage une solution générale de la forme

$$P(r, t, s) = \exp \{A(T)r(t) + B(T)\}, \quad T \equiv s - t. \quad (\text{A.2})$$

De $P(r, s, s) \equiv 1$, on déduit $A(0)r(t) + B(0) = 0$. Valable à chaque instant t , cette condition impose $A(0) = B(0) = 0$.

L'équation (A.2) ci-dessus nous permet de calculer facilement les dérivées partielles $P_t = -\{A'(T)r + B'(T)\}P$, $P_r = A(T)P$ et $P_{rr} = A(T)^2P$. On introduit alors ces expressions dans l'équation de structure par terme (A.1). Divisant par P puis factorisant en r , on obtient :

$$\{1 + A'(T)\}r(t) = \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 A(T)^2 + (\mu - \lambda_r)A(T) - B'(T) \right\}. \quad (\text{A.3})$$

Cette dernière égalité devant être vérifiée quel que soit T , les termes entre accolades sont nuls. On doit donc résoudre les deux équations différentielles suivantes :

$$A'(T) = -1 \quad (\text{A.4})$$

$$B'(T) = \frac{1}{2}\sigma^2 A(T)^2 + (\mu - \lambda_r)A(T). \quad (\text{A.5})$$

La solution de la première équation différentielle est naturellement $A(T) = -T + K_1$, où K_1 est une constante quelconque. Sous $A(0) = 0$, il vient $K_1 = 0$, et la solution est finalement

$$A(T) = -T. \quad (\text{A.6})$$

Utilisant ce résultat, la deuxième équation différentielle s'écrit

$$B'(T) = \frac{1}{2}\sigma^2 T^2 - (\mu - \lambda_r)T. \quad (\text{A.7})$$

Le membre droit étant un polynôme de degré deux en T , il vient immédiatement

$$B(T) = \left\{ \frac{1}{6}\sigma^2 T^3 - \frac{1}{2}(\mu - \lambda_r)T^2 \right\} + K_2. \quad (\text{A.8})$$

De $B(0) = 0$, on déduit $K_2 = 0$.

Introduisant les expressions finales de $A(T)$ et $B(T)$ dans (A.2), la solution de l'équation de structure par terme (A.1) s'écrit

$$P(r, t, s) = \exp \left\{ -r(t)T - \frac{(\mu - \lambda_r)T^2}{2} + \frac{\sigma^2 T^3}{6} \right\}. \quad (\text{A.9})$$

A.2 Solution pour un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On doit résoudre une équation différentielle de la forme

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} + (\kappa(\theta - r) - \lambda_r) P_r - rP + P_t = 0, \quad (\text{A.10})$$

sous la condition terminale $P(r, s, s) \equiv 1$, où κ , θ , σ et λ_r sont des constantes.

La solution générale est de la forme

$$P(r, t, s) = \exp \{ A(T)r(t) + B(T) \}, \quad T \equiv s - t. \quad (\text{A.11})$$

La condition terminale implique $A(0)r(t) + B(0) = 0$ pour tout t , et donc $A(0) = B(0) = 0$. Introduisant les dérivées partielles $P_t = -\{A'(T)r + B'(T)\}P$, $P_r = A(T)P$ et $P_{rr} = A(T)^2P$ dans l'équation de structure par terme (A.10), divisant par P puis regroupant les termes en r , on obtient :

$$\{\kappa A(T) + 1 + A'(T)\}r(t) = \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 A(T)^2 + (\kappa\theta - \lambda_r)A(T) - B'(T) \right\}. \quad (\text{A.12})$$

Valable quel que soit T , cette équation impose la nullité du facteur de r ainsi que du terme indépendant de r . On doit donc résoudre les deux équations différentielles suivantes :

$$A'(T) = -\kappa A(T) - 1 \quad (\text{A.13})$$

$$B'(T) = \frac{1}{2}\sigma^2 A(T)^2 + (\kappa\theta - \lambda_r)A(T). \quad (\text{A.14})$$

Pour résoudre la première équation différentielle, on pose $C(T) = A(T) + 1/\kappa$, et (A.13) se réécrit $C'(T) = -\kappa C(T)$, dont la solution est $C(T) = K_1 \exp(-\kappa T)$. Sous $A(0) = 0$, on calcule $C(0) = 1/\kappa$, et donc $K_1 = 1/\kappa$. Finalement, la solution de (A.13) sous $A(0) = 0$ est donc

$$A(T) = \frac{1}{\kappa} \left(e^{-\kappa T} - 1 \right). \quad (\text{A.15})$$

Combinant (A.14) et (A.15), il vient

$$B'(T) = \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} \right\} e^{-\kappa T} - \theta + \frac{\lambda_r}{\kappa} + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \left(e^{-\kappa T} - 1 \right)^2, \quad (\text{A.16})$$

soit, après réarrangements,

$$B'(T) = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\kappa^2} e^{-2\kappa T} + \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \right\} e^{-\kappa T} - \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right\}. \quad (\text{A.17})$$

Posant $D(T) = \exp(-\kappa T)$, on a $D'(T) = -\kappa D(T)$. Examinant B en tant que fonction de $D(T)$, on peut alors écrire⁶²

$$\frac{\partial B(T)}{\partial D(T)} = \frac{B'(T)}{D'(T)}, \quad (\text{A.18})$$

⁶²En effet, si $B(T) = f(D(T))$, la règle de dérivation des fonctions composées nous permet d'écrire $f(D(T))'_{D(T)} = B'(T)/D'(T)$. Le membre gauche de cette dernière égalité s'interprète bien comme $\partial B(T)/\partial D(T)$.

soit

$$\frac{\partial B(T)}{\partial D(T)} = -\frac{\sigma^2}{2\kappa^3}D(T) - \frac{1}{\kappa} \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \right\} + \frac{\frac{1}{\kappa} \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right\}}{D(T)}. \quad (\text{A.19})$$

La solution de l'équation différentielle (A.17) est donc

$$B(T) = -\frac{\sigma^2}{4\kappa^3}D(T)^2 - \frac{1}{\kappa} \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \right\} D(T) + \frac{1}{\kappa} \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right\} \ln(D(T)) + K_2. \quad (\text{A.20})$$

De plus, sous $B(0) = 0$, on obtient $K_2 = \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} + \frac{1}{\kappa} \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \right\}$. La solution de l'équation différentielle (A.10), sous $P(r, s, s) \equiv 1$, est donc

$$P(r, t, s) = \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} \left(e^{-\kappa T} - 1 \right) r(t) + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} \left(1 - e^{-2\kappa T} \right) + \frac{1}{\kappa} \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \right\} \left(1 - e^{-\kappa T} \right) - \left\{ \theta - \frac{\lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right\} T \right\}. \quad (\text{A.21})$$

A.3 Solution pour un processus « racine carrée »

On doit résoudre l'équation différentielle

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r P_{rr} + (\kappa(\theta - r) - \lambda_r) P_r - rP + P_t = 0, \quad (\text{A.22})$$

sous la condition terminale $P(r, s, s) \equiv 1$, où κ , θ , σ et λ_r sont des constantes.

La solution générale est de la forme

$$P(r, t, s) = \exp \{ A(T)r(t) + B(T) \}, \quad T \equiv s - t. \quad (\text{A.23})$$

La condition $P(r, s, s) \equiv 1$ implique $A(0)r(t) + B(0) = 0$ pour tout t , et donc $A(0) = B(0) = 0$. Les dérivées partielles $P_t = -\{A'(T)r + B'(T)\}P$, $P_r = A(T)P$ et $P_{rr} = A(T)^2P$, introduites dans (A.22), donnent, après division par P et factorisation en r :

$$\left\{ -\frac{1}{2}\sigma^2 A(T)^2 + \kappa A(T) + 1 + A'(T) \right\} r(t) = \{(\kappa\theta - \lambda_r) A(T) - B'(T)\}. \quad (\text{A.24})$$

Valable pour tout T , cette équation impose la nullité du facteur de r et du terme indépendant de r . On doit donc résoudre les deux équations différentielles suivantes :

$$A'(T) = \frac{1}{2}\sigma^2 A(T)^2 - \kappa A(T) - 1 \quad (\text{A.25})$$

$$B'(T) = (\kappa\theta - \lambda_r) A(T). \quad (\text{A.26})$$

Pour résoudre (A.25), on procède au changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} D(T) &\equiv A(T) - \frac{\kappa + v}{\sigma^2} \\ E(T) &\equiv A(T) - \frac{\kappa - v}{\sigma^2} \\ v &\equiv \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

On vérifie alors aisément que

$$\frac{1}{2}\sigma^2 A(T)^2 - \kappa A(T) - 1 = v \left\{ \frac{1}{D(T)} - \frac{1}{E(T)} \right\}^{-1}. \quad (\text{A.28})$$

Et, comme $A'(T) = D'(T) = E'(T)$, on peut réécrire (A.28) sous la forme

$$\left\{ \frac{D'(T)}{D(T)} - \frac{E'(T)}{E(T)} \right\} = v. \quad (\text{A.29})$$

Intégrant (A.29) de 0 à T , il vient immédiatement

$$\left[\ln \frac{D(\tau)}{E(\tau)} \right]_0^T = vT \quad (\text{A.30})$$

soit

$$\ln \left\{ \frac{D(T)/D(0)}{E(T)/E(0)} \right\} = vT. \quad (\text{A.31})$$

De $A(0) = 0$, on déduit $D(0)/E(0) = (\kappa + v)/(\kappa - v)$. Introduisant cette expression dans (A.31), il vient, après élimination du logarithme,

$$\frac{D(T)}{E(T)} = \frac{\kappa + v}{\kappa - v} e^{vT}. \quad (\text{A.32})$$

Il suffit alors de remplacer $D(T)$ et $E(T)$ par leur expression, donnée en (A.27), et de résoudre en $A(T)$. On trouve

$$A(T) = \frac{-2(e^{vT} - 1)}{(\kappa + v)(e^{vT} - 1) + 2v}. \quad (\text{A.33})$$

Afin de préparer la résolution de la deuxième équation différentielle (A.26), on procède à un nouveau changement de variables :

$$C(T) \equiv (\kappa + v)(e^{vT} - 1) + 2v, \quad (\text{A.34})$$

si bien que $C'(T) = v(\kappa + v) \exp(vT)$, et $C(0) = 2v$. On peut alors exprimer (A.33) sous la forme

$$A(T) = -\frac{2}{\sigma^2} \frac{C'(T)}{C(T)} + \frac{\kappa + v}{\sigma^2}. \quad (\text{A.35})$$

Insérant cette expression dans (A.26), on doit alors résoudre

$$B'(T) = \frac{2(\kappa\theta - \lambda_r)}{\sigma^2} \left\{ -\frac{C'(T)}{C(T)} + \frac{\kappa + v}{2} \right\}. \quad (\text{A.36})$$

Comme $B(0) = 0$, l'intégration de cette équation entre 0 et T conduit à

$$B(T) = \frac{2(\kappa\theta - \lambda_r)}{\sigma^2} \left[-\ln C(\tau) + \frac{\kappa + v}{2} \tau \right]_0^T, \quad (\text{A.37})$$

soit

$$B(T) = \frac{2(\kappa\theta - \lambda_r)}{\sigma^2} \left\{ -\ln \left\{ (\kappa + v)(e^{vT} - 1) + 2v \right\} + \frac{\kappa + v}{2}T + \ln \{2v\} \right\}, \quad (\text{A.38})$$

ou encore

$$B(T) = \frac{2(\kappa\theta - \lambda_r)}{\sigma^2} \ln \left\{ \frac{2v \exp \left\{ \frac{\kappa + v}{2}T \right\}}{C(T)} \right\}. \quad (\text{A.39})$$

La solution de l'équation différentielle (A.22), sous $P(r, s, s) \equiv 1$, est donc

$$P(r, t, s) = \exp \{A(T)r(t) + B(T)\}, \quad T \equiv s - t \quad (\text{A.40})$$

avec

$$\begin{aligned} A(T) &= \frac{-2(e^{vT} - 1)}{C(T)} \\ B(T) &= \frac{2(\kappa\theta - \lambda_r)}{\sigma^2} \ln \left\{ \frac{2v \exp \left\{ \frac{\kappa + v}{2}T \right\}}{C(T)} \right\} \\ C(T) &= (\kappa + v)(e^{vT} - 1) + 2v \\ v &= \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Chapitre 3

Structure des taux et équilibre économique général

Section 1 Introduction

Dans la mesure où l'équilibre entre offre et demande de titres dépend étroitement des comportements individuels, et de l'environnement dans lequel ceux-ci s'expriment, l'analyse des déterminants économiques de la structure des taux peut être conduite de multiples façons. Dans la logique de cette thèse, nous choisissons d'examiner l'influence du comportement économique rationnel en incertitude.

Le modèle pertinent en la matière est le modèle intertemporel d'équilibre économique général des actifs financiers, de Cox, Ingersoll et Ross [1985a]. Il possède l'avantage d'être parfaitement compatible avec le modèle d'arbitrage à K facteurs, tant sur le plan formel que théorique. Du point de vue formel, il fait appel au calcul stochastique. Du point de vue théorique, il s'inscrit dans une perspective purement standard, à base de marchés parfaits et d'anticipations rationnelles. En vérité, le modèle d'équilibre général peut être perçu comme l'extension « naturelle » du modèle à K facteurs, dans un univers économique complet. Nous pouvons, de ce fait, envisager de les comparer précisément, et de déterminer ainsi l'apport spécifique de l'approche par l'équilibre général.

La suite de ce chapitre est organisée de la façon suivante. Dans une section 2, nous présentons le modèle général de Cox, Ingersoll et Ross. Ses hypothèses, relatives aux comportements et à l'environnement économique, sont analysées. À l'équilibre, un certain nombre de relations fondamentales sont établies, et, en particulier, une équation permettant d'évaluer une grande variété d'actifs financiers. Spécialisant cette dernière équation au cas des bons sans coupon, on obtient une *équation fondamentale de structure par terme*, comparable à l'*équation de structure par terme* issue du modèle d'arbitrage. Dans la section 3, nous poursuivons la comparaison en montrant que le modèle d'équilibre économique général est capable d'engendrer des modèles explicites, tout à fait similaires à ceux obtenus par spécialisation du modèle à K facteurs. L'avantage des modèles explicites issus de l'approche par l'équilibre général tient au fait qu'ils sont consistants, dans le sens où ils garantissent l'absence d'opportunité d'arbitrage à l'équilibre. Toutefois, nous montrons que les hypothèses nécessaires à l'obtention d'une solution fermée de structure des taux sont loin d'être neutres d'un point de vue théorique. Dans la section 4, nous utilisons le modèle général pour réexaminer les théories traditionnelles. En particulier, la théorie pure des anticipations est mise à rude épreuve. Enfin, une section 5 conclut ce chapitre.

Section 2 Équilibre économique général et prix des bons sans coupon

2.1 Introduction

À la fin des années soixante-dix, un papier de travail de Cox, Ingersoll et Ross, intitulé « *A Theory of the the Term Structure of Interest Rates* », commence à circuler. Avant même sa publication (tardive) sous forme de deux articles désormais célèbres [1985a, 1985b], ce papier s'affirme déjà comme une contribution majeure à la théorie de la structure des taux, et, plus généralement, à la théorie de l'évaluation des actifs financiers. Depuis, le modèle de Cox, Ingersoll et Ross occupe une position centrale (et presque monopolistique) dans la littérature théorique standard traitant de la hiérarchie des taux, et aucune alternative ne semble actuellement pointer à l'horizon.

Comment expliquer ce succès ? Nous avancerons trois raisons principales.

La première raison tient aux qualités intrinsèques du modèle. Dans son univers (marchés parfaits et anticipations rationnelles), le modèle d'équilibre général est sans conteste une construction remarquable. Ses hypothèses, à la fois simples et générales, adaptées à un contexte intertemporel, en font une extension naturelle du modèle « phare » de la théorie standard moderne, le modèle développé par Arrow [1964] et Debreu [1959]. Pourtant, le modèle de Cox, Ingersoll et Ross ne paye pas cette richesse théorique par une inaptitude aux tests empiriques : il permet notamment d'exhiber une équation de prix pouvant s'appliquer aux bons sans coupon, mais également à la quasi-totalité des actifs financiers. Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross réalise la performance de regrouper en son sein — et d'une manière particulièrement élégante — des pans entiers de la théorie économique et financière : théorie du taux d'intérêt en univers incertain (dont l'archétype est précisément le modèle de Arrow et Debreu), version d'équilibre du CAPM monopériodique, CAPM intertemporel, et théories d'évaluation des actifs financiers par arbitrage.¹

La deuxième raison est liée à l'état du domaine de recherche dans la décennie quatre-vingts. Dans un troisième article important, Cox, Ingersoll et Ross [1981] réexaminent en profondeur les théories traditionnelles de la structure des taux. Comme nous l'avons vu, leurs conclusions sont dévastatrices : la théorie pure des anticipations, réduite à une version « locale », n'est déclarée valide que sous des hypothèses extrêmement restrictives. De plus, comme nous le verrons, les

¹La version d'équilibre du CAPM monopériodique est attribuée à Sharpe [1964, 1970], Lintner [1965a, 1965b], Mossin [1966, 1969], et Treynor [1965]. Le CAPM intertemporel (l'ICAPM) a été développé en temps discret par Samuelson [1969], et en temps continu par Merton [1969, 1971, 1973b]. Les théories d'évaluation des actifs financiers par arbitrage sont représentées notamment par Black et Scholes [1973], Vasicek [1977], et Cox, Ingersoll et Ross [1981].

théories avec primes, comme la théorie de Hicks ou de Modigliani et Sutch, sont assujetties à une réinterprétation de leurs fondements. En déstabilisant ainsi le domaine de recherche, l'article de 1981 a probablement favorisé l'adoption rapide des travaux novateurs publiés en 1985.

Enfin, la troisième raison tient à la complexité de l'outil mathématique utilisé. Bien qu'il puisse paraître paradoxal d'en faire une des raisons du succès des travaux de Cox, Ingersoll et Ross, l'utilisation intensive du calcul stochastique, dans le cadre du modèle d'équilibre économique général, explique en partie la position privilégiée qu'il occupe. Pour les articles de 1985 notamment, le coût du « ticket d'entrée » mathématique est particulièrement élevé, et la compréhension même du modèle de structure des taux n'est pas chose aisée.² Pourtant, compte tenu de l'importance des travaux en question, le modèle d'équilibre économique général constitue, pour l'économiste intéressé par les aspects théoriques de la structure des taux, un point de passage obligé. Ainsi, bien qu'à l'origine d'un saut qualitatif important, les travaux de Cox, Ingersoll et Ross n'en ont pas moins provoqué un certain resserrement du domaine de recherche.

Dans la présente section, nous tentons d'exposer clairement ce modèle d'équilibre économique général. Les notations, ainsi que la présentation des équations, sont choisies de façon à faciliter la comparaison entre ce modèle et le modèle d'arbitrage. Nous analysons en détail ses hypothèses et ses principales conclusions. En particulier, nous examinons une équation différentielle, permettant de déterminer le prix des actifs financiers.

En spécialisant cette équation au cas de l'actif obligataire sans coupon, on peut exhiber une équation semblable à l'équation de structure par terme obtenue dans le cadre du modèle à K facteurs. Nous comparons alors l'approche par arbitrage et l'approche générale de la structure des taux. Ce faisant, nous isolons précisément l'apport spécifique de l'approche par l'équilibre général dans l'analyse de la hiérarchie des taux.

2.2 Structure de l'économie et comportements : les hypothèses de base

Nous exposons, dans cette sous-section, les hypothèses qui définissent l'environnement économique et les comportements individuels. Un premier groupe d'hypothèses (hypothèses 1 à 4) décrit les opportunités de production offertes aux individus, ainsi que la structure de l'incertitude qui affecte l'économie. Un second groupe (hypothèses 5 et 6) précise le comportement des agents. Enfin, un

²Nous adhérons totalement à l'opinion de Patrick Roger, pour qui « La lecture de deux pages tirées au hasard d'un de ces deux articles constitue, à notre connaissance, le meilleur remède contre l'insomnie » [1991, p.262].

dernier groupe (hypothèses 7 et 8) spécifie les instruments financiers mis à leur disposition, afin qu'ils puissent gérer au mieux les risques économiques.

2.2.1 La sphère réelle : incertitudes sur la production et rôle des firmes

Quatre hypothèses permettent de spécifier la structure productive de l'économie. Cette structure est élémentaire : l'économie ne produit qu'un seul bien, grâce à N technologies stochastiques linéaires, et ce bien constitue en même temps l'unique facteur de production.

La première hypothèse définit l'unique actif physique (le « bien ») considéré.

Hypothèse 1 *Il n'existe qu'un seul bien. Celui-ci peut être soit consommé, soit utilisé comme input dans la production. Toutes les valeurs sont mesurées en unités de ce bien.*

Ainsi, dans cette économie, un unique actif fait à la fois office de bien de consommation, de facteur de production, et de numéraire. Il n'y a donc ni prix relatifs, ni monnaie à proprement parler.³

Les processus de production sont définis de la façon suivante :

Hypothèse 2 *Il existe dans l'économie N technologies pouvant être mises en œuvre pour produire le bien. Ces technologies sont telles que les taux d'accroissement instantanés de chacun des N éléments d'un vecteur d'investissement dans ces N technologies suivent conjointement un processus multidimensionnel d'Itô, à $N + K$ coefficients de diffusion, tel que la matrice de variance-covariance des taux d'accroissement soit définie positive. Les paramètres infinitésimaux de ce processus dépendent du temps et d'un vecteur de K variables d'état.*

Si on note \mathbf{Y} le vecteur $K \times 1$ des variables d'état, et $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}(\mathbf{Y}, t)$ le vecteur $N \times 1$ des montants investis dans ces N processus de production, l'évolution de \mathbf{Q} lorsque les outputs sont continûment réinvestis dans leur processus respectif peut être décrite par la différentielle stochastique

$$\underset{N \times 1}{d\mathbf{Q}(t)} = \underset{N \times N}{\mathbf{I}_Q} \underset{N \times 1}{\boldsymbol{\alpha}_Q(\mathbf{Y}, t)} dt + \underset{N \times N}{\mathbf{I}_Q} \underset{N \times (N+K)}{\boldsymbol{\delta}_Q(\mathbf{Y}, t)} \underset{(N+K) \times 1}{d\mathbf{z}(t)} \quad (2.1)$$

³Dans l'univers décrit par ce modèle, l'offre de monnaie n'a aucun effet réel, et son introduction peut apparaître superflue. Voir, sur ce thème, Cox, Ingersoll et Ross [1985b, section 7, pp.401–405]. De même, les principales conclusions du modèle d'équilibre général ne sont pas perturbées par l'introduction de plusieurs biens. Voir par exemple Breeden [1979], Richard et Sundaresan [1981], Sundaresan [1984], Breeden [1986], Dunn et Singleton [1986].

où

- $I_Q \equiv I_Q(Q)$ désigne une matrice diagonale $N \times N$ dont le i -ième élément diagonal est le i -ième élément du vecteur $Q(Y, t)$, noté $Q_i(Y, t)$;
- $\alpha_Q(Y, t)$ est un vecteur $N \times 1$ dont l'élément général $\{\alpha_{Q,i}(Y, t)\}$ désigne l'espérance du changement de $Q_i(Y, t)$,⁴ c'est-à-dire du taux de rendement physique du i -ième processus ;
- $\delta_Q(Y, t)$ est une matrice $N \times (N + K)$. La matrice carrée $\delta_Q \delta_Q'$, de dimension N , est la matrice de variance-covariance des taux de rendement des processus. Elle est définie positive ;
- $dz(t)$ est un vecteur colonne de $N + K$ processus de Wiener indépendants.

Bien que, pour des raisons de convenance mathématique, l'équation ci-dessus décrit l'évolution d'un vecteur d'investissement continûment renouvelé, rien n'oblige les agents à agir de la sorte. Le système (2.1) représente simplement une description particulière des *opportunités de production* offertes aux investisseurs.

Ainsi définie, la structure productive de l'économie peut être caractérisée de la façon suivante :

- Le bien produit dans cette économie est le seul facteur de production. Le travail n'est pas nécessaire, et le partage travail-loisir ne sera donc pas pris en compte.
- La production est incertaine. À l'instant t , les termes I_Q , α_Q et δ_Q sont connus, mais, $dz(t)$ étant aléatoire, les taux de rendement dQ_i/Q_i des processus de production sont incertains : le flux de production instantané, à l'instant t , subit $N + K$ chocs indépendants, reflétant les $N + K$ incertitudes fondamentales qui affectent l'économie à cet instant.
- Ce modèle permet de prendre en compte une large gamme de processus de production. Les paramètres infinitésimaux α_Q et δ_Q restent ici non-spécifiés. On notera, par exemple, que dQ_i peut prendre une valeur négative, reflétant ainsi une dépréciation aléatoire du capital physique. Toutefois, le système (2.1) étant un processus d'Itô, le capital Q évolue de façon

⁴Pour être précis, il s'agit de l'espérance *par unité de temps*. On omettra cette précision par la suite, chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

continue, et le modèle ne peut donc prendre en compte les conséquences d'éventuelles ruptures dans la trajectoire des taux de rendement physique.⁵

- Le risque induit par ces incertitudes *n'est pas totalement diversifiable*. La matrice $\delta_Q \delta_Q'$ de variance-covariance des taux de rendement des processus étant définie positive, le « portefeuille » des investissements productifs de l'économie restera toujours risqué, quels que soient les choix opérés en la matière.⁶ Cette propriété fort importante signifie que l'économie, dans son ensemble, est affectée par un risque instantané *systématique*, qui devra en conséquence être rémunéré par le marché.
- La technologie de production est de nature linéaire. Plus précisément, on peut dire que la distribution de probabilité des rendements, obtenus sur un investissement dans l'un quelconque des processus, est indépendant du montant investi (α_Q et δ_Q ne dépendent pas de Q). Cette propriété transpose en univers stochastique le concept de rendements d'échelle constants. Ainsi, toute production mise en œuvre se décompose en deux termes indépendants : la quantité investie, d'une part, et le taux de rendement de la technologie choisie, d'autre part. Si le premier terme est bien une variable endogène d'un modèle d'équilibre général, l'hypothèse d'une technologie linéaire permet de regarder le second terme comme un paramètre technologique exogène.
- L'état courant de la technologie est parfaitement résumé par la valeur des K variables d'état. La distribution de probabilité des rendements physiques courants dépend uniquement du niveau des variables d'état à ce moment. Nous dirons que $Y(t)$ représente *l'état de la technologie à l'instant t* .

Une troisième hypothèse spécifie le comportement des variables d'état.

Hypothèse 3 *Les K variables d'état suivent conjointement un processus multidimensionnel d'Itô, dépendant des $N + K$ chocs subis par la technologie, et tel que la matrice de variance-covariance des changements des variables d'état soit semi-définie positive.*

⁵L'extension du modèle d'équilibre général de structure des taux à des processus mixtes Itô et Poisson a été réalisée par Mo Ahn et Thompson [1988].

⁶Si on appelle w un vecteur $N \times 1$ de poids (non tous nuls) d'investissement dans ces N processus, la variance du taux de rendement du portefeuille est $w' \delta_Q \delta_Q' w$. Comme la matrice $\delta_Q \delta_Q'$ est définie positive, cette variance est, par définition, strictement positive. Aucun processus productif n'est redondant, dans le sens où il serait possible de « répliquer » ses paramètres $\delta_{Q,j}$ de « réponse » aux $N + K$ sources d'incertitude, en regroupant de manière appropriée un certain nombre d'autres processus.

On notera ce processus

$$d\mathbf{Y}(t) = \underbrace{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Y}, t)}_{K \times 1} dt + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{Y}, t)}_{K \times 1} d\mathbf{z}(t) \quad (2.2)$$

$K \times (N+K) \quad (N+K) \times 1$

avec $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}' \equiv \boldsymbol{\sigma}_Y^2$ semi-définie positive. Les divers éléments de (2.2) s'interprètent de façon habituelle.

Clairement, cette spécification introduit dans le modèle des *changements technologiques aléatoires*. Tant que $\boldsymbol{\sigma}$ n'est pas une matrice nulle, les paramètres α_Q et δ_Q de la distribution des rendements des processus physiques sont stochastiques. Ainsi, l'évolution aléatoire de \mathbf{Y} détermine les opportunités de production qui seront disponibles, à l'avenir, dans l'économie.

Ces trois premières hypothèses structurent, de manière tout à fait particulière, les risques subis par les investisseurs. L'incertitude sur l'investissement productif est décomposée en deux éléments :

1. l'incertitude sur la production (dans le sens de *output*), ou « incertitude intrapériodique ». À l'instant t , la distribution de probabilité des rendements du capital sur le prochain instant est connue, et l'investisseur subit un aléa instantané sur son investissement, conformément à cette distribution. Le risque est ici représenté par les $N + K$ chocs indépendants, que nous appellerons les « sources d'incertitude ».

Cette incertitude est précisément celle qui est prise en compte par le CAPM monopériodique d'équilibre. Elle sera traitée ici de manière tout à fait similaire : les $N + K$ sources d'incertitude affectent la richesse globale (le « portefeuille de marché ») à travers les décisions optimales des investisseurs. Ce portefeuille, constitué de *tous* les actifs disponibles, est la variable dont l'évolution aléatoire sur le prochain instant représente le risque instantané *non-diversifiable* de l'économie, et, donc, le seul risque rémunéré à l'équilibre. Pour cette raison, la variation instantanée de la richesse est un « facteur de risque » dans ce modèle ;

2. l'incertitude sur la technologie, ou « incertitude intertemporelle ». La distribution de probabilité des rendements évolue, elle-même, de façon aléatoire, sous l'effet des K variables d'état stochastiques. Il s'agit, en quelque sorte, d'une incertitude sur l'incertitude, ou d'une *meta-incertitude*.

Bien qu'elle soit spécifique aux modèles intertemporels, cette incertitude sera traitée selon le même principe que ci-dessus : l'évolution des variables d'état représente un « facteur de risque », parce qu'elle influence l'évolution de la richesse, *via* les comportements optimaux des investisseurs.

On notera toutefois que l'hypothèse 3 impose à la matrice de variance-covariance σ_Y^2 d'être simplement semi-définie positive, et non définie positive.⁷ Ceci autorise une structure « dégénérée » de facteurs technologiques : certains peuvent être instantanément non-stochastiques (les lignes correspondantes de σ sont nulles), et d'autres peuvent l'être par regroupement (on construit ainsi un « état agrégé » parfaitement prévisible à court terme). Les facteurs de risque réellement importants peuvent donc être en nombre inférieur à K .

Au total, nous sommes en présence d'un modèle à $K + 1$ facteurs, qui prend en compte à la fois la production incertaine et les changements technologiques aléatoires. On remarquera que l'évolution des taux de rendement physique est instantanément corrélée avec les changements des variables d'état, par l'intermédiaire de la matrice de covariance $\delta_Q \sigma'$, de dimension $N \times K$.

Nous pouvons maintenant clore cette description de la sphère réelle de l'économie, en définissant les conditions d'accès des individus à ces N processus productifs.

Hypothèse 4 *L'accès aux processus de production est totalement libre pour tous les individus. Ces processus peuvent être mis en œuvre à tout moment, et sans frais.*

De prime abord, cette hypothèse ne semble laisser aucune place aux firmes : l'investissement productif est réalisé directement par des consommateurs-investisseurs, sans l'aide d'aucune structure intermédiaire. En vérité, on peut tout à fait admettre l'existence de firmes maximisatrices, mais, dans la cadre de ce modèle, celles-ci resteraient totalement transparentes, et, en fin de compte, inutiles.

Supposons en effet qu'il existe des firmes, cherchant à maximiser leur valeur de marché, et postulons, sans perte de généralité, que chacune d'entre elles se spécialise dans une seule des N technologies disponibles. Pour se procurer des inputs, chaque firme émet des titres de propriété (des actions), parfaitement divisibles, qui donnent droit à leur détenteur de recevoir une certaine part des outputs obtenus au terme d'une phase de production (de « longueur » dt). Ces actifs « primaires » s'échangent librement sur un marché secondaire d'actions. Dans un environnement parfaitement compétitif, où, en particulier, chaque individu peut créer sa propre firme, l'hypothèse des rendements constants conduit invariablement à la nullité des profits (actuels et espérés) de chaque firme. Sur le marché secondaire, l'équilibre doit donc être tel que l'espérance du rendement « financier »

⁷On a donc $w' \sigma \sigma' w \geq 0$ pour tout vecteur w (de dimension $K \times 1$). Cette condition n'est pas restrictive, car $w' \sigma \sigma' w$ s'interprète comme une variance.

d'une action soit égale à l'espérance du rendement « physique » sur le processus correspondant. Dès lors, la distinction entre action et processus de production devient sans objet, et on peut considérer que les individus investissent en mettant en œuvre eux-mêmes les technologies disponibles.

Ainsi, nous pouvons admettre, sans perte de généralité, qu'il n'existe aucune firme en tant qu'acteur spécifique, ou encore que chaque individu crée ses propres firmes, dont il reste l'unique propriétaire et actionnaire.

2.2.2 Le comportement microéconomique

Ayant admis la transparence des firmes, un seul type d'agent sera considéré dans le cadre de ce modèle : les consommateurs-investisseurs. L'hypothèse suivante confère à chacun d'eux un comportement rationnel standard.

Hypothèse 5 *À tout instant, chaque individu cherche à maximiser l'espérance d'une fonction d'utilité, cumulée jusqu'à la date de sa mort (supposée connue). L'utilité, qui dépend de sa consommation et du niveau des variables d'état à l'instant considéré, est monotone croissante et strictement concave.*

Considérons un individu particulier. D'après l'hypothèse ci-dessus, il cherche à maximiser, à l'instant t et sous sa contrainte de budget, une fonction du type

$$E \left[\int_t^{t'} U [C, \mathbf{Y}, \tau] d\tau \right], \quad (2.3)$$

où E est l'espérance mathématique, conditionnelle à l'information disponible en t , $U [\cdot]$ est la fonction d'utilité, $C(\tau)$ le flux de consommation à l'instant τ , et t' est la date de sa mort.⁸ Comme $U_C > 0$ (l'utilité marginale est toujours positive), cet individu est insatiable. De plus, $U_{CC} < 0$ (l'utilité marginale est strictement décroissante) implique qu'il a de l'aversion pour le risque, quel que soit son niveau de consommation.

La caractéristique la plus marquante de (2.3) est que l'utilité de l'individu sur toute sa durée de vie est additivement séparable dans le temps. Ainsi, l'utilité, à un instant du futur, ne dépend pas di-

⁸On peut consulter Merton [1971, 1973b] pour les variantes suivantes : horizon infini, utilité terminale (legs), et date de décès stochastique.

rectement de la consommation aux autres instants.⁹ Ceci implique en particulier que les décisions passées n'influencent pas les décisions futures, et justifie donc que l'utilité globale, exprimée en (2.3), ne dépende pas de termes antérieurs à t . L'hypothèse de séparabilité additive de la fonction d'utilité est importante, parce qu'elle conduit à privilégier l'analyse du comportement en incertitude, au détriment du comportement de consommation : en effet, sous cette hypothèse, l'aversion pour le risque devient l'unique principe explicatif des substitutions intertemporelles de consommation. L'individu adverse au risque (et donc prêt à payer pour l'éviter) va choisir un plan d'action qui minimise les variations non-anticipées de sa consommation. Il s'agit, en quelque sorte, d'une version stochastique du traditionnel comportement de « lissage intertemporel de consommation ».¹⁰

Ayant caractérisé les comportements individuels, on peut maintenant spécifier la population.

Hypothèse 6 *Il existe un nombre donné d'individus. Ces individus ont des dotations et des préférences identiques. Chacun d'eux admet que l'économie est telle que décrite précédemment, et agit comme price-taker sur tous les marchés.*

Cette hypothèse est importante pour plusieurs raisons.

En premier lieu, elle pose la parfaite homogénéité de la population, du point de vue de ses caractéristiques économiques pertinentes (dotations, préférences et croyances). Il devient alors possible d'utiliser la fiction de « l'individu représentatif » : sans perte de généralité, on peut supposer que l'économie ne comporte qu'un seul individu, dont le comportement est décrit par l'hypothèse 5.

L'homogénéité des individus est bien entendu une hypothèse lourde, parce qu'elle interdit purement et simplement tout échange.¹¹ Dès lors, le marché ne remplit plus sa fonction économique première, à savoir la « mise en cohérence » de plans individuels, incompatibles *ex ante*. En réalité, le seul rôle attribué ici au marché est de *révéler* les prix d'équilibre de l'économie. La signification de ces prix est la suivante : ils sont tels que les individus ne *souhaitent* pas recourir à l'échange, et ne se sentent donc pas contraints par le fait qu'il est impossible d'effectuer le moindre échange.¹²

⁹Bien entendu, elle en dépend indirectement, *via* l'optimisation sous contrainte de budget.

¹⁰Dunn et Singleton [1986] envisagent le cas d'une fonction d'utilité non-séparable.

¹¹Clairement, si tous les individus sont identiques, aucun échange ne peut avoir lieu.

¹²Pour un exposé des conditions qui permettent de résoudre le problème de l'agrégation des comportements individuels, voir par exemple Rubinstein [1974], ou Duffie et Huang [1985]. Pour un modèle d'équilibre général de structure des taux avec agents hétérogènes, voir Breeden [1979 et 1986].

Dans le cadre de l'équilibre général traité ici, l'hypothèse d'homogénéité signifie, en particulier, que la richesse agrégée $W(t)$ est une statistique suffisante pour décrire la répartition de la richesse entre tous les individus (leur nombre est fixe et connu). Ainsi, l'état de l'économie à l'instant t est parfaitement résumé par $W(t)$ et $Y(t)$, les K variables représentatives de l'état de la technologie. En conséquence, les relations définies à l'équilibre général dépendront du triplet (W, Y, t) .

En second lieu, et de façon similaire au modèle à K facteurs exposé dans le chapitre précédent, l'homogénéité des croyances fait de l'hypothèse 6 une hypothèse d'anticipations rationnelles : connaissant le « vrai » modèle de l'économie, les individus insatiables vont établir les meilleures prévisions possibles pour chacune des variables pertinentes, en utilisant les « vraies » distributions de probabilité.

2.2.3 La sphère financière

La sphère financière désigne ici l'ensemble des marchés d'actifs financiers bilatéraux.

La possession d'un tel actif confère à son détenteur le droit de recevoir des paiements donnés, conditionnellement à la réalisation de certains événements à des dates données (ou encore sur des périodes données) du futur. Par « événement », nous entendons ici une configuration des états décrivant l'économie.¹³

Ces actifs sont émis, vendus et achetés par les individus, qui cherchent ainsi à modifier leur exposition aux risques créés par l'incertitude des états qui prévaudront dans le futur. Les actifs financiers assurent une fonction d'allocation, de répartition du risque.

Avant d'aller plus loin, on doit remarquer que les processus de production peuvent également remplir cette fonction d'allocation (au même titre qu'un marché boursier d'actions).

Considérant, d'une part, le vecteur α_Q des espérances des taux de rendement sur les processus physiques, et, d'autre part, la matrice $\delta_Q \delta_Q'$ des covariances de ces mêmes taux, l'investisseur peut jouer sur l'effet de diversification afin d'atteindre une position de risque-rendement instantané satisfaisante. Il se comporte alors comme l'investisseur du CAPM monopériodique. Mais, de plus, les taux de rendement des N processus covarient ici avec les variations aléatoires des K variables technologiques (*via* la matrice $\delta_Q \sigma'$). L'investissement physique constitue de ce fait un instrument

¹³Par exemple, le fait que la richesse globale $W(t)$ soit supérieure à un seuil donné.

de protection contre les risques spécifiquement intertemporels.

Dès lors, on peut s'interroger sur l'utilité même des actifs financiers dans cette économie.

En fait, dans le cadre du modèle présenté ici, on peut être certain que les agents seront tentés de créer des actifs financiers bilatéraux, parce que les processus physiques seuls ne peuvent assurer qu'une protection partielle. En effet, en l'absence d'actifs financiers, les individus ne disposent que de N instruments pour allouer optimalement les risques induits par $N + K$ sources d'incertitude indépendantes (on rappelle que $\delta_Q \delta'_Q$ est de rang plein). Les opportunités de production, assimilables aux opportunités d'investissement en actions, ne permettent pas à un agent de déterminer librement sa politique d'assurance, vis-à-vis de chacune de ces sources d'incertitude : le choix d'un certain degré de protection contre un des $N + K$ risques *limite* les degrés de protection qu'il peut atteindre sur les autres risques. Parce que les risques ne sont pas individuellement assurables, le marché des actions est *incomplet* au sens de Arrow et Debreu.

On postule donc l'existence de ces actifs financiers bilatéraux.

Hypothèse 7 *Il existe des marchés parfaits¹⁴ de titres financiers bilatéraux. Ces titres, créés et achetés par les individus, spécifient en totalité les paiements conditionnels auxquels ils donnent droit. Ces paiements peuvent dépendre de toutes les variables nécessaires pour décrire l'état de l'économie.*

On rappelle que, compte tenu des hypothèses précédentes, l'état de l'économie est parfaitement décrit par le triplet (W, \mathbf{Y}, t) . Si on note $\varphi_{F,i}$ la fonction de paiement, et F_i le prix du i -ème titre, on a $\varphi_{F,i} \equiv \varphi_{F,i}(W, \mathbf{Y}, t)$ et donc $F_i \equiv F_i(W, \mathbf{Y}, t)$. Le vecteur \mathbf{Y} suit un processus multidimensionnel d'Itô. Admettons pour l'instant que la richesse W suive également un processus de ce type (ceci sera confirmé par la suite). Dans ces conditions, et d'après le lemme fondamental du calcul stochastique, F_i suit un processus d'Itô. Il est alors licite de décrire l'évolution de ce prix par une différentielle stochastique de la forme

$$dF_i = (F_i \alpha_{F,i} - \varphi_{F,i}) dt + F_i \underset{1 \times (N+K)(N+K) \times 1}{\delta'_{F,i}} dz(t) \quad (2.4)$$

où $\alpha_{F,i} \equiv \alpha_{F,i}(W, \mathbf{Y}, t)$ est le taux de rendement anticipé sur le titre, et $\delta_{F,i} \equiv \delta_{F,i}(W, \mathbf{Y}, t)$

¹⁴Pour la définition d'un marché parfait, voir l'hypothèse 1 du modèle à K facteurs, page 82.

est un vecteur colonne de dimension $(N + K)$, spécifiant l'effet de chacune des $N + K$ sources d'incertitude.¹⁵ Le scalaire $\delta'_{F,i} \delta_{F,i}$ désigne donc la variance du taux de rendement du i -ième titre.

Il est important de noter que l'équation (2.4) ne signifie en aucun cas que le processus suivi par les prix des actifs financiers est exogène au modèle. Bien que $\varphi_{F,i}$ soit, par définition, fixé par les termes du contrat, le processus stochastique $\alpha_{F,i}$ est, quant à lui, déterminé de façon endogène à l'équilibre général. Considérant la fonction $F_i \equiv F_i(W, \mathbf{Y}, t)$ et le processus joint (W, \mathbf{Y}) , il sera possible d'établir, par application du lemme d'Itô, une relation entre ces paramètres, les dérivées partielles de la fonction de prix F_i , et les paramètres infinitésimaux de (W, \mathbf{Y}) . L'équation (2.4) ne représente donc pas une contrainte, mais une simple notation utile.

On peut se servir de cette notation pour définir un actif particulièrement intéressant. Si on pose $\varphi_{F,j} = 0$ et $\delta_{F,j} = \mathbf{0}$, on obtient un titre ne donnant lieu à aucun paiement, et dont le taux de rendement instantané $dF_j/F_j = \alpha_{F,j} dt$ est absolument certain à l'instant présent. Pour cette raison, le taux de rendement de ce titre sera appelé « taux sans risque » (sous entendu, sans risque *instantané*), ou « taux court », et on notera $r(W, \mathbf{Y}, t) \equiv \alpha_{F,j}(W, \mathbf{Y}, t)$.

Hypothèse 8 *Il existe un marché pour l'emprunt et le prêt instantané au taux r .*

Bien qu'en l'absence de risque de défaut, l'emprunt et le prêt à ce taux soient effectivement sans risque sur le prochain instant, les valeurs futures de r sont, quant à elles, aléatoires : $r(W, \mathbf{Y}, t)$ est un processus stochastique, qui sera déterminé de façon endogène à l'équilibre général.

2.3 L'optimum individuel

L'ensemble des actifs disponibles dans cette économie étant défini, on peut maintenant examiner le problème d'optimisation, résolu par les consommateurs-investisseurs. Sans perte de généralité, on réduit dans un premier temps l'ensemble des opportunités d'investissement disponibles à un sous-ensemble d'actifs non-redondants. Utilisant des notations appropriées, la contrainte budgétaire s'exprime alors très simplement. Le programme d'optimisation permet d'obtenir des conditions du premier ordre, qui révèlent les spécificités de l'analyse intertemporelle.

¹⁵La variation anticipée sur le prix du titre est égale à $F_i \alpha_{F,i} - \varphi_{F,i}$. En ajoutant à cette variation la deuxième source de gain, c'est-à-dire le paiement $\varphi_{F,i}$, on obtient un rendement total $F_i \alpha_{F,i}$, et un taux de rendement $\alpha_{F,i}$.

2.3.1 Définition des opportunités d'investissement

D'après les hypothèses précédentes, chaque individu doit maximiser en t l'espérance de son utilité intertemporelle (l'expression donnée en (2.3)), conditionnée par l'information disponible à cet instant (c'est-à-dire par $W(t)$ et $Y(t)$). Cette maximisation se fait sous une contrainte de budget qui reste encore à préciser.

Le programme d'optimisation permet à un individu de déterminer les décisions suivantes :

- le flux de consommation à l'instant t , noté $C(t)$,
- les montants investis dans les N opportunités de production,
- le montant prêté ou emprunté au taux court,
- les montants utilisés (obtenus) pour l'achat (par la vente) d'actifs financiers.

Cette dernière décision pose un problème non-trivial : combien de titres financiers différents l'individu va-t-il détenir, et quelles sont les caractéristiques propres de chacun de ces titres ?

Compte tenu de l'infinité de titres imaginables, telle qu'en particulier les paiements de certains soient de simples combinaisons linéaires des paiements d'autres titres, ce problème n'a pas, en général, de solution unique. Nous sommes donc conduit à focaliser notre attention sur une solution particulière du problème d'optimisation, c'est-à-dire sur un ensemble particulier d'opportunités. Le choix de cet ensemble est sans conséquence, parce que l'individu est, par définition, indifférent aux diverses solutions générées par son programme d'optimisation.

Construisons un ensemble d'opportunités d'investissement, comportant les N processus de production, ainsi qu'un certain nombre d'actifs financiers. Le nombre et les caractéristiques des titres sont choisis de façon à ce que le vecteur $\delta_{F,i}$ des paramètres de volatilité d'un titre exclu de cet ensemble puisse toujours s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs $\delta_{Q,n}$ et $\delta_{F,k}$ des actifs compris dans cet ensemble (c'est-à-dire de façon à ce que ce titre exclu soit redondant).

Considérant, d'une part, que toute l'incertitude qui affecte l'économie est issue de $N + K$ sources indépendantes, et, d'autre part, qu'aucun des N processus de production n'est redondant (la matrice $\delta_Q \delta_Q'$ est définie positive et donc régulière), il suffit de choisir judicieusement K titres financiers pour engendrer tous les autres actifs. L'ensemble des N processus et des K titres ainsi

sélectionnés est tel que les vecteurs $\delta_{Q,n}$ et $\delta_{F,k}$ soient deux à deux indépendants. Ils forment une « base ».

Ainsi, avec le prêt ou emprunt à taux sans risque, nous considérons que la base constitue l'ensemble des opportunités d'investissement. Les propriétés de cet ensemble sont telles que nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que l'individu compose son portefeuille d'actifs risqués uniquement à partir des opportunités incluses dans cette base.

Pour simplifier l'expression du programme d'optimisation, nous regroupons les processus stochastiques suivis par les K titres financiers de la base, et adoptons la notation suivante pour leur évolution jointe :

$$d\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_F & \boldsymbol{\alpha}_F(W, \mathbf{Y}, t) - \boldsymbol{\varphi}_F(W, \mathbf{Y}, t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \mathbf{I}_F & \boldsymbol{\delta}_F(W, \mathbf{Y}, t) \end{pmatrix} dz(t) \quad (2.5)$$

$\begin{matrix} K \times 1 & K \times K & K \times 1 & K \times 1 & K \times K & K \times (N+K) & (N+K) \times 1 \end{matrix}$

où le terme $\mathbf{I}_F \equiv \mathbf{I}_F(\mathbf{F})$ désigne une matrice diagonale $K \times K$, dont le k -ième élément est F_k , le prix du k -ième titre de la base.

2.3.2 La contrainte budgétaire

Pour exprimer maintenant cette contrainte, nous définissons les vecteurs suivants :

- \mathbf{w}_Q , le vecteur $N \times 1$ des parts de la richesse $W(t)$ de l'individu représentatif, investies dans les N processus productifs ;
- \mathbf{w}_F , le vecteur $K \times 1$ des parts de la richesse $W(t)$ de l'individu représentatif, investies dans les K actifs financiers de la base ;

On regroupe ces deux vecteurs dans

$$\mathbf{w}_{(N+K) \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_Q \\ \mathbf{w}_F \end{bmatrix},$$

le vecteur des poids pour l'investissement risqué. Par complémentarité, le poids affecté à l'actif sans risque est égal à $1 - \mathbf{w}'\mathbf{1}$. On utilisera également

$$\underset{(N+K) \times 1}{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_Q \\ \boldsymbol{\alpha}_F \end{bmatrix},$$

le vecteur des taux de rendement espérés des investissements risqués, et

$$\underset{(N+K) \times K}{\boldsymbol{\delta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_Q \\ \boldsymbol{\delta}_F \end{bmatrix},$$

la matrice des coefficients de diffusion de ces investissements. Ainsi, $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}'$ désigne la matrice de variance-covariance des taux de rendement des $N + K$ investissements risqués, et $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\sigma}'$ la matrice $(N + K) \times K$ de covariance entre ces taux de rendement et les changements des K variables d'état. On notera que $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}'$ est de rang plein et donc inversible.

Aidé de ces notations, on peut exprimer de façon simple la contrainte budgétaire d'un agent. À chaque instant, la richesse de cet agent évolue sous l'effet

1. de son investissement dans les $N + K$ opportunités risquées. Les montants engagés, $\mathbf{w}'W$, évoluent conformément à un processus multidimensionnel de paramètres infinitésimaux $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\delta}$;
2. du montant prêté ou emprunté au taux sans risque r ;
3. du flux de consommation par unité de temps, C , au cours de l'instant t . On doit noter ici que cette définition en terme de flux signifie qu'à l'instant t la richesse $W(t)$ est entièrement partagée entre les $N + K + 1$ opportunités d'investissement, et qu'une part du *flux* des paiements instantanés, générés par ces investissements, est consommée. Le terme C représente donc le « rythme » de consommation.

Sommant ces trois effets, on obtient immédiatement

$$dW = \{\mathbf{w}'\boldsymbol{\alpha} dt + \mathbf{w}'\boldsymbol{\delta} dz\} + \{(1 - \mathbf{w}'\mathbf{1}) r dt\} W - C dt, \quad (2.6)$$

soit, après réarrangements,

$$\frac{dW}{W} = \left\{ \mathbf{w}'(\alpha - r\mathbf{1}) + r - \frac{C}{W} \right\} dt + \{ \mathbf{w}'\delta \} dz. \quad (2.7)$$

Cette équation représente la contrainte budgétaire de l'agent.

2.3.3 Le programme d'optimisation intertemporelle et la solution optimale

Le programme du consommateur s'exprime alors de la façon suivante

$$\max_{\{C, w\}} E_{W, Y, t} \int_t^{t'} U [C, \mathbf{Y}, \tau] d\tau, \quad (2.8)$$

sous les contraintes

$$(2.7), \quad W > 0, \quad \mathbf{w}_Q \geq 0, \quad C \geq 0. \quad (2.9)$$

Ces contraintes imposent l'équilibre budgétaire, la positivité de la richesse agrégée, la non-négativité des investissements productifs et de la consommation.

Sous certaines conditions, le programme (2.8) sous les contraintes (2.9) peut être résolu à l'aide des techniques standards de programmation dynamique stochastique. Si le principe général de l'optimisation stochastique est simple, la justification rigoureuse des résultats obtenus est souvent fort complexe. Afin de nous consacrer à l'essentiel, nous serons amenés ici à émettre des hypothèses *ad hoc*, garantissant l'existence et l'unicité de la solution.¹⁶

Pour résoudre le problème d'optimisation, on procède en trois étapes :

Première étape : construction de l'équation de Bellman

On définit une fonction

$$J(W, \mathbf{Y}, t) \equiv \max_{\{C, w\}} E_{W, Y, t} \int_t^{t'} U [C, \mathbf{Y}, \tau] d\tau. \quad (2.10)$$

¹⁶Le lecteur intéressé trouvera un exposé rigoureux dans Fleming et Rishel [1975].

Cette fonction J rend la valeur maximale de l'objectif à l'instant t , c'est-à-dire le maximum d'utilité cumulée que l'agent peut espérer d'une politique choisie optimalement jusqu'à sa mort. Elle constitue donc une mesure de la *satisfaction* maximale que l'individu peut atteindre à chaque instant. Pour cette raison, la fonction J est appelée *fonction d'utilité indirecte*, ou encore *fonction d'utilité dérivée*.

Considérant cette équation conjointement aux processus suivis par W et \mathbf{Y} (équations (2.7) et (2.2)), on applique le principe d'optimisation de Bellman :

« Une politique optimale est telle que, quels que soient l'état et les décisions initiales, les décisions restant à prendre constituent une politique optimale, en regard de l'état résultant de la première décision. »

Bellman [1957, p.83], cité par Malliaris et Brock [1982, p.108].

De cette manière, on obtient une équation, appelée *équation de Bellman de la théorie du contrôle stochastique*, reliant U , les dérivées partielles de J par rapport au temps et à l'état de l'économie (W, \mathbf{Y}), et les paramètres des processus gouvernant ces états. Cette fonction s'écrit¹⁷

$$0 = \max_{\{C, \mathbf{w}\}} \{U[C, \mathbf{Y}, t] + \mathcal{L}[J]\} \quad (2.11)$$

où \mathcal{L} est le *générateur différentiel* sur les variables d'état W et \mathbf{Y} . Considérant la formule donnée en annexe B.4, on obtient ici

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[J] = & J_t + W J_W \left\{ \mathbf{w}'(\boldsymbol{\alpha} - r\mathbf{1}) + r - \frac{C}{W} \right\} + \frac{1}{2} W^2 J_{WW} \mathbf{w}' \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}' \mathbf{w} + \\ & \mathbf{J}_Y \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\boldsymbol{\sigma}_Y^2 \mathbf{J}_{YY} \right) + \\ & W \mathbf{w}' \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{J}'_{WY}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

où les variables utilisées pour dériver partiellement J sont notées en indice (J_W et J_{WW} sont deux scalaires, \mathbf{J}_Y et \mathbf{J}_{WY} sont deux vecteurs $1 \times K$, \mathbf{J}_{YY} est une matrice $K \times K$), et « tr » désigne l'opérateur de trace.

¹⁷La dérivation de cette équation est donnée en annexe B.4, page 339. On peut consulter également Merton [1969, pp.249–250], Malliaris et Brock [1982, chapitre 2, section 10], ou Roger [1991, chapitre 4, section 4].

Si on se réfère à l'annexe B.4, on voit que \mathcal{L} s'interprète comme l'espérance du changement instantané de J par unité de temps. Dans le cas présent, \mathcal{L} est l'anticipation de l'individu quant à l'évolution de l'utilité de sa richesse optimalement investie. L'équation de Bellman (2.11) signifie donc que les contrôles optimaux maximisent l'utilité de la consommation présente, plus l'espérance de la variation de l'utilité de la richesse, dérivée de la consommation future. On pressent ici un comportement de substitution intertemporelle de consommation.

Examinant (2.11) et (2.12), on note que l'équation de Bellman suppose l'existence de cette fonction J , et de certaines de ses dérivées partielles. Par (2.10), ces conditions sur J peuvent être analysées comme des conditions sur U et sur les contrôles $\{C, \mathbf{w}\}$. Nous poserons simplement

Hypothèse 9 *Les solutions du problème individuel d'optimisation (2.8), sous la contrainte de budget (2.7), et sous la condition $W > 0$, sont les solutions de l'équation de Bellman (2.11).*

Deuxième étape : résolution de l'équation de Bellman en J

Il nous faut maintenant résoudre le problème de maximisation, posé par l'équation de Bellman (2.11), sous les contraintes $\mathbf{w}_Q \geq 0$ et $C \geq 0$. Il s'agit d'un programme classique d'optimisation, sous contraintes inégalitaires, pouvant être résolu par la méthode de Kuhn et Tucker.

Nous poserons, de nouveau, une hypothèse permettant d'éviter certaines justifications mathématiques.

Hypothèse 10 *Il existe une unique solution intérieure $\{J, C, \mathbf{w}\}$ satisfaisant l'équation de Bellman (2.11) sous $\mathbf{w}_Q \geq 0$ et $C \geq 0$.*

Considérant de nouveau (2.11), nous dérivons l'objectif $U + \mathcal{L}$ par rapport aux contrôles $\{C, \mathbf{w}\}$, afin d'obtenir les $1 + N + K$ conditions du premier ordre :

$$U_C - J_W = 0 \tag{2.13}$$

$$(\alpha - r\mathbf{1})W J_W + \delta\delta'\mathbf{w}^*W^2 J_{WW} + \delta\sigma'W J_{WY} = \mathbf{0} \tag{2.14}$$

où $\{C^*, \mathbf{w}^*\}$ désigne les contrôles optimaux, et U_C désigne la dérivée partielle de U par rapport à C , prise au point optimal C^* (c'est-à-dire $U_C(C^*, \mathbf{Y}, t)$).

On résout alors (2.13) et (2.14) en $\{C^*, \mathbf{w}^*\}$. De (2.13) on tire

$$C^* = U_C^{-1}(J_W, \mathbf{Y}, t). \quad (2.15)$$

De plus, $\delta\delta'$ étant inversible, on peut résoudre explicitement (2.14) en $W\mathbf{w}^*$:

$$W\mathbf{w}^* = -\frac{J_W}{J_{WW}} (\delta\delta')^{-1} (\boldsymbol{\alpha} - r\mathbf{1}) - (\delta\delta')^{-1} \delta\boldsymbol{\sigma}' \left(\frac{\mathbf{J}'_{WY}}{J_{WW}} \right). \quad (2.16)$$

On dispose alors des termes intéressants suivants :

$$\mu_W(W, \mathbf{Y}, t) \equiv W \left\{ \mathbf{w}^{*'} (\boldsymbol{\alpha} - r\mathbf{1}) + r \right\} \quad (2.17)$$

$$\sigma_W^2(W, \mathbf{Y}, t) \equiv W^2 \mathbf{w}^{*'} \delta\delta' \mathbf{w}^* \quad (2.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_{WY}(W, \mathbf{Y}, t) \equiv W \mathbf{w}^{*'} \delta\boldsymbol{\sigma}'. \quad (2.19)$$

$1 \times K$

Le terme μ_W désigne le rendement espéré de la richesse optimalement investie, σ_W^2 est la variance du changement de cette richesse, et $\boldsymbol{\sigma}_{WY}$ est le vecteur $K \times 1$ des covariances entre le changement de cette richesse et les K variables d'état.

Les équations (2.15) et (2.16) donnent les contrôles optimaux en fonction des dérivées partielles de J . Pour obtenir $\{C^*, \mathbf{w}^*\}$ uniquement en fonction du temps et des variables fondamentales de l'économie (W, \mathbf{Y}) , il nous faut utiliser de nouveau l'équation de Bellman.

Troisième étape : détermination des contrôles optimaux

Par construction, les contrôles $\{C^*, \mathbf{w}^*\}$ maximisent $U + \mathcal{L}$. Utilisant les notations introduites ci-dessus, l'équation de Bellman s'écrit donc

$$0 = U(C^*, \mathbf{Y}, t) + J_t + (\mu_W - C^*) J_W + \frac{1}{2} \sigma_W^2 J_{WW} + \mathbf{J}_Y \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\boldsymbol{\sigma}_Y^2 \mathbf{J}_{YY} \right) \quad (2.20)$$

$$+ \boldsymbol{\sigma}'_{WY} \mathbf{J}'_{WY},$$

où C^* est donné par (2.15). Cette équation est une équation aux dérivées partielles en la fonction J , soumise à la condition terminale $J(W, \mathbf{Y}, t') = 0$.

Bien que (2.20) ne mène à aucune solution simple, elle peut *en principe* être résolue. On obtient alors une (unique) solution en J . Cette solution, reportée dans (2.15) et (2.16), permet, virtuellement, d'obtenir l'expression des contrôles optimaux en fonction de (W, \mathbf{Y}, t) .

2.3.4 L'interprétation des équations optimales

Pour obtenir une solution fermée intéressante, il est nécessaire d'introduire des hypothèses restrictives, portant sur la structure de l'économie (c'est-à-dire sur les variables d'état, comme dans Merton [1973b]), ou sur les comportements individuels (c'est-à-dire sur la fonction d'utilité, comme dans Merton [1971] ou Breeden [1979]).

Dans le cas général, l'analyse du comportement d'optimisation intertemporelle ne peut être menée qu'à partir d'équations optimales dépendant de la fonction d'utilité indirecte J . Cette analyse est intéressante, parce que la fonction J peut être interprétée en termes économiques. De plus, comme le montrent Cox, Ingersoll et Ross [1985a, lemme 2 p.370], J hérite de certaines propriétés de la fonction d'utilité directe U : notamment, J est une fonction croissante et strictement concave de la richesse W .

La première équation optimale (équation (2.13) ou (2.15)) s'écrit

$$U_C = J_W, \tag{2.21}$$

et est appelée *condition d'enveloppe intertemporelle*. Elle montre que l'optimum individuel est tel que l'utilité marginale de la consommation présente soit égale à l'utilité marginale (indirecte) de la richesse. Mais, examinant la définition donnée en (2.10), on voit que $J(W, \mathbf{Y}, t)$ est l'espérance actualisée, dérivée de la consommation (optimale) jusqu'à la mort. La dérivée partielle J_W s'interprète donc comme l'espérance actualisée de l'utilité marginale de la consommation future.

Ainsi, la condition d'enveloppe (2.21) apparaît comme la marque d'un équilibre dans la substitution entre consommation présente et future. Si, par exemple, $U_C < J_W$, l'individu se trouve dans une situation où l'utilité marginale de la consommation future est supérieure à celle de la

consommation présente. Il a donc intérêt à transférer « une unité » de consommation présente vers le futur, c'est-à-dire à retarder marginalement sa consommation.

Les $N + K$ autres équations optimales (équation (2.14) ou (2.16)) donnent l'expression des parts optimales d'actifs risqués dans la richesse. On écrira (2.16) sous la forme

$$W\mathbf{w}^* = \left(-\frac{J_W}{J_{WW}}\right) (\delta\delta')^{-1} (\boldsymbol{\alpha} - r\mathbf{1}) + (\delta\delta')^{-1} \delta\boldsymbol{\sigma}' \left(-\frac{J'_{WY}}{J_{WW}}\right). \quad (2.22)$$

Le premier terme du membre droit de l'équation ci-dessus est la fonction traditionnelle de demande d'actifs risqués, caractéristique d'un agent maximisateur à horizon court. Pour s'en convaincre, on dérive partiellement, par rapport à W , la condition d'enveloppe (2.21), et on obtient $J_{WW} = U_{CC}C_W$, où C_W désigne la dérivée partielle de C^* par rapport à la richesse. Considérant de plus que $J_W > 0$ et $J_{WW} < 0$, on peut écrire

$$\left(-\frac{J_W}{J_{WW}}\right) = \left(-\frac{U_C}{U_{CC}}\right) \times \frac{1}{C_W} > 0. \quad (2.23)$$

Le terme $-U_C/U_{CC}$ est l'inverse du coefficient de Arrow-Pratt d'aversion absolue pour le risque, appelé *coefficient de tolérance absolue pour le risque*.

Si l'horizon de l'agent est véritablement court, on peut considérer qu'il consomme toute sa richesse sur son horizon (c'est-à-dire que $C_W = 1$). Dans ce cas on retrouve exactement la fonction de demande du CAPM monopériodique. Les différents éléments du premier terme du membre droit de (2.22) s'analysent alors de manière usuelle : *ceteris paribus*, la demande d'actifs risqués

- croît avec la tolérance absolue pour le risque, $-U_C/U_{CC}$;
- croît avec l'espérance du taux de rendement des actifs risqués, en excès du taux sans risque, $\boldsymbol{\alpha} - r\mathbf{1}$;
- décroît avec le risque porté par ces actifs. De manière habituelle en théorie moderne de portefeuille, l'expression de ce risque fait appel au jeu complet des covariances entre les taux de rendement, $\delta\delta'$, et l'inversion de cette matrice dénote l'effet négatif du risque sur les proportions optimales détenues.

Ainsi, l'analyse du premier terme de la fonction de demande d'actifs risqués montre que le modèle intertemporel d'optimisation en temps continu recouvre le CAPM monopériodique, et ceci

de façon particulièrement élégante. En effet, l'équation (2.22) a été obtenue sans l'aide des hypothèses qui limitent l'intérêt du CAPM : l'hypothèse des rendements financiers normaux, ou, alternativement, l'hypothèse de l'utilité quadratique (décroissante au-delà d'un certain seuil).

Cela étant, on doit maintenant s'attendre à ce que le deuxième terme du membre droit de l'équation (2.22) exprime les spécificités de l'analyse intertemporelle. Ce terme comporte les éléments suivants :

- l'inverse de la matrice de variance-covariance des taux de rendement des actifs risqués, $(\delta\delta')^{-1}$. Cet élément s'interprète comme précédemment ;
- la matrice $\delta\sigma'$ des covariances entre les taux de rendement des actifs et les changements des variables d'état (une matrice $(N + K) \times K$) ;
- un vecteur $-\mathbf{J}'_{WY}/J_{WW}$, de dimension $K \times 1$.

On voit que si les éléments de ce dernier vecteur sont positifs (négatifs), les covariances positives (négatives) des actifs avec les états sont « appréciées » par l'individu, dans le sens où les proportions w^* sont influencées positivement. Les raisons de ce comportement apparaissent en dérivant, suivant Merton [1973b], la condition d'enveloppe (2.21) par rapport à \mathbf{Y} . Combinant $J_{WY} = U_{CY} + U_{CC}C_Y$ et $J_{WW} = U_{CC}C_W$, il vient

$$\left(-\frac{J'_{WY}}{J_{WW}} \right) = \left(-\frac{U'_{CY}}{U_{CC}C_W} \right) + \left(-\frac{C'_Y}{C_W} \right). \quad (2.24)$$

Le premier terme du membre droit de (2.24) exprime une première motivation de la demande d'actifs risqués. La présence de ce vecteur $-U'_{CY}/U_{CC}C_W$ est justifiée par la dépendance de la fonction d'utilité $U[C, \mathbf{Y}, t]$ par rapport aux états \mathbf{Y} : *ceteris paribus*, la satisfaction que l'individu éprouve lorsqu'il consomme dépend *intrinsèquement* de l'état dans lequel se trouve l'économie. Comme $U_{CC} < 0$ et $C_W > 0$, le signe des éléments du vecteur sont ceux de U'_{CY} , c'est-à-dire de « l'effet » des changements des variables d'état sur l'utilité marginale de la consommation optimale. Lorsqu'un élément de U'_{CY} est positif, cela signifie qu'une évolution positive de l'état correspondant augmente l'utilité marginale de la consommation, et donc que l'individu apprécie cet état. En conséquence, il va rechercher les actifs dont les taux de rendement covarient positivement avec celui-ci, parce que ces actifs lui procurent un rendement plus élevé lorsque, en même temps, l'utilité de ce supplément est particulièrement forte.

Le second terme du membre droit de (2.24) revêt une importance particulière, du point de vue de l'analyse intertemporelle. Comme $C_W > 0$, le signe de chacun des éléments du vecteur $-C'_Y/C_W$ est l'inverse de l'élément correspondant dans C'_Y . Ainsi, ce terme indique que les covariances positives entre les taux de rendement et les changements des états sont valorisés, lorsque la consommation optimale de l'individu a tendance à chuter, en réponse à une augmentation de ces états (c'est-à-dire si $C'_Y < \mathbf{0}$). Dans ce cas, l'individu demande plus d'actifs corrélés plus positivement, et s'attend donc à recevoir une compensation (sous forme d'une richesse plus forte) contre la baisse de l'utilité due à une baisse imprévue de sa consommation. De même, si $C'_Y > \mathbf{0}$, l'individu demandera *ceteris paribus* plus d'actifs dont les taux de rendement covarient plus négativement avec les variables d'état. En cas de baisse imprévue de \mathbf{Y} , il peut s'attendre à être compensé de la chute de sa consommation par des rendements plus forts.

Agissant ainsi, l'individu se couvre contre une évolution défavorable non-anticipée de sa consommation future. Nous touchons ici à un aspect fondamental de l'analyse intertemporelle : l'individu rationnel considère la protection que peut lui apporter les actifs contre les évolutions défavorables des opportunités d'investissement, gouvernées *in fine* par les variables technologiques \mathbf{Y} . Comme le note Merton [1992, p.487], ce comportement correspond au traditionnel « lissage intertemporel de consommation », transposé dans un univers stochastique : l'individu ne cherche pas à maintenir sa consommation à un niveau constant, mais à minimiser la variabilité non-anticipée de sa consommation au cours du temps.¹⁸ Cette aversion de l'individu à « parier » sur son chemin de consommation est une conséquence naturelle de l'aversion « intrapériodique » $-U_{CC}/U_C > 0$, conduisant à $J_{WW} < 0$ dans (2.24).

Cette interprétation des équations optimales souligne les spécificités du comportement individuel rationnel, dans un environnement où les opportunités d'investissement changent stochastiquement au cours du temps. Nous avons noté, en particulier, que les individus considèrent les actifs comme des instruments de protection contre les évolutions imprévues de ces opportunités. On doit donc s'attendre à ce que les prix d'équilibre de ces actifs dépendent des paramètres spécifiquement intertemporels.

Pour examiner ceci, nous devons définir les conditions d'équilibre de l'économie.

¹⁸Sur ce sujet, voir également Breeden [1979, p.282].

2.4 L'optimum collectif

Les comportements individuels doivent être maintenant agrégés, de façon à définir un équilibre collectif. Sous hypothèse d'homogénéité, la procédure d'agrégation est triviale. Nous illustrons dans un premier temps le processus de tâtonnement qui conduit à l'équilibre économique général. Puis nous étudions la valeur d'équilibre du taux d'intérêt, du rendement anticipé des actifs financiers, et les primes associées aux facteurs de risque de l'économie. Enfin, nous examinons une équation fondamentale permettant d'évaluer le prix d'équilibre de n'importe quel actif financier.

2.4.1 L'équilibre économique général

À ce stade de l'exposé, nous disposons des conditions nécessaires et suffisantes de l'optimum individuel. Ces conditions ont été obtenues en stipulant que l'agent « *price-taker* » déterminait sa consommation, son investissement financier et productif (C , w_F et w_Q), en considérant comme donnés les taux de rendement espérés sur les opportunités d'investissement (r , α_F et α_Q).

Mais, si les performances $\alpha_Q(W, Y, t)$ attendues sur la production sont effectivement exogènes, la rentabilité espérée des actifs financiers doit être déterminée de façon endogène.

Pour boucler le modèle, il nous faut maintenant exprimer des conditions nécessaires et suffisantes de l'optimum collectif. Dans cette économie peuplée d'individus identiques, la demande globale nette d'actifs financiers risqués est exprimée par le vecteur $w_F W$. À l'équilibre, la demande nette doit être nulle pour chacun de ces actifs. Ceci s'exprime de manière très simple par $w_F = \mathbf{0}$. De même, sur le marché des prêts et emprunts, l'équilibre s'écrit $1 - w' \mathbf{1} = 0$, soit encore $w' \mathbf{1} = 1$. Combinant ces deux conditions, il vient immédiatement $w'_Q \mathbf{1} = 1$.

Ainsi, dans le cadre de ce modèle, l'équilibre économique général est atteint lorsque *toute la richesse est investie dans la production*.¹⁹ Cette propriété est directement liée à l'hypothèse d'homogénéité, qui rend sous-optimale tout échange d'actifs bilatéraux.

Comme conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre général, nous retiendrons les équations

$$w_F = \mathbf{0} \tag{2.25}$$

¹⁹Bien entendu, cette proposition doit être interprétée dans le cadre d'un équilibre *ex ante* : l'équilibre est atteint lorsque les agents *souhaitent* investir toutes leur richesse dans la production.

$$\mathbf{w}'_Q \mathbf{1} = 1, \quad (2.26)$$

qui permettent, conjointement à la condition d'optimalité (2.14), de déterminer les taux de rendement des actifs financiers, r et α_F .

Ce bouclage est représenté dans le schéma n°9. Sur ce schéma, les flèches n'indiquent aucun lien de causalité entre les divers éléments du modèle. En effet, l'économie étant toujours à l'équilibre, toutes les variables y sont déterminées simultanément. Toutefois, la liaison circulaire entre la rentabilité financière espérée (r , α_F) et les décisions individuelles (C , w_Q , w_F) suggère un processus de type « tâtonnement walrassien ». Comme dans tous les modèles de ce type, la convergence de ce processus dépend, de façon cruciale, des anticipations formées par les individus pour décider de leurs actions, et notamment ici de α_F . On voit ici apparaître clairement le rôle fondamental joué par l'hypothèse des anticipations rationnelles : elle assure que les prévisions α_F des agents correspondent exactement aux valeurs qui prévaudront à l'équilibre, si bien que la partie gauche de la liaison circulaire représentée sur le schéma concourt effectivement à la convergence du processus. De plus, ayant supposé l'existence et l'unicité de la solution du programme d'optimisation, nous pouvons conclure à l'existence d'un unique équilibre général.

Armé des conditions (2.25) et (2.26), nous pouvons maintenant déterminer la valeur d'équilibre du taux d'intérêt instantané, ainsi que le prix et le taux de rendement des divers actifs financiers.

2.4.2 Le taux d'intérêt instantané

Introduisant les conditions d'équilibre (2.25) et (2.26) dans (2.17), (2.18) et (2.19), on obtient les moments du processus de la richesse optimalement investie :

$$\mu_W(W, \mathbf{Y}, t) = W \mathbf{w}_Q^* \alpha_Q \quad (2.27)$$

$$\sigma_W^2(W, \mathbf{Y}, t) = W^2 \mathbf{w}_Q^* \delta_Q \delta_Q' \mathbf{w}_Q^* \quad (2.28)$$

$$\sigma'_{WY}(W, \mathbf{Y}, t) = W \mathbf{w}_Q^* \delta_Q \sigma'. \quad (2.29)$$

Le taux d'intérêt instantané s'exprime en fonction de ces moments.

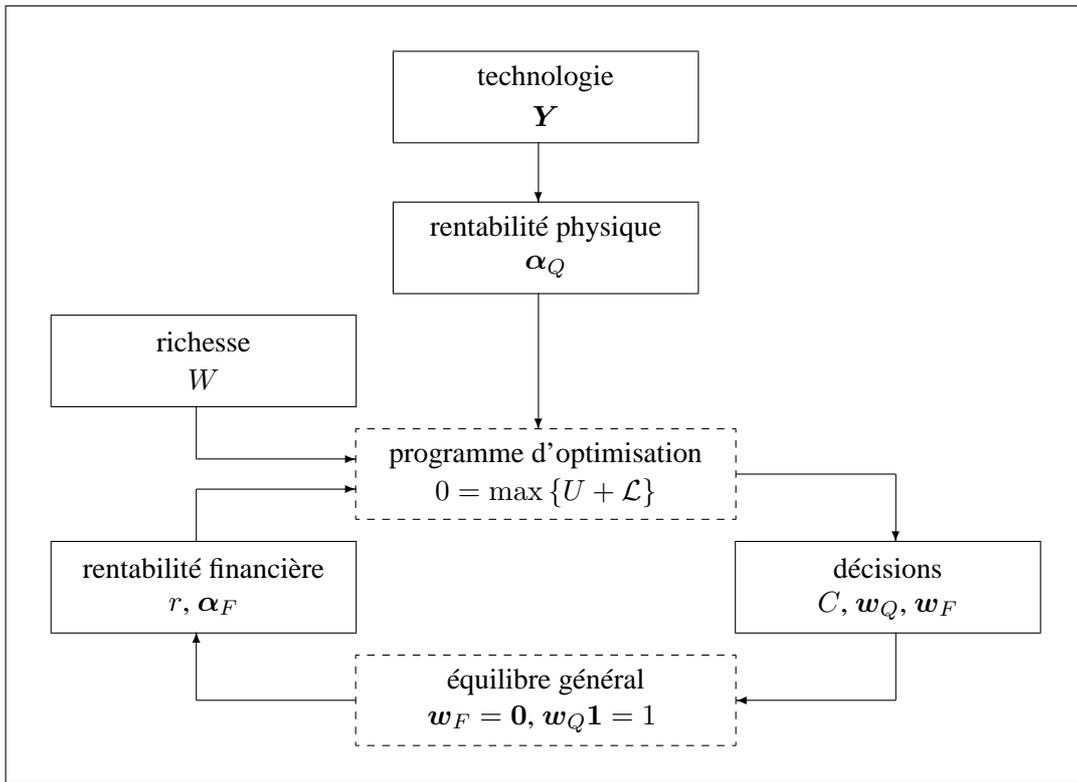


Schéma n°9 : Structure logique du modèle d'équilibre général

Théorème 1 *Le taux d'intérêt instantané d'équilibre r est donné par*

$$rW = \mu_W - \left(-\frac{J_{WW}}{J_W} \right) \times \sigma_W^2 + \sigma'_{WY} \times \left(-\frac{J'_{WY}}{J_W} \right). \quad (2.30)$$

Preuve :

On introduit la condition d'équilibre $w_F = \mathbf{0}$ dans le système des équations optimales (2.14). Les N premières équations s'expriment alors comme

$$(\alpha_Q - r\mathbf{1}) W J_W + \delta_Q \delta'_Q w_Q^* W^2 J_{WW} + \delta_Q \sigma' W J'_{WY} = \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

Prémultipliant cette équation par $w_Q^{*\prime}$, puis utilisant la condition d'équilibre $w_Q' \mathbf{1} = 1$, on obtient (2.30).

CQFD.

Tous les termes du membre droit de (2.30) dépendent du vecteur \mathbf{Y} , qui évolue aléatoirement au cours du temps. Le taux d'intérêt d'équilibre est donc stochastique.

L'équation (2.30) est particulièrement intéressante, dans la mesure où elle fait intervenir μ_W , le rendement espéré sur l'investissement productif. On peut ainsi étudier la relation entre la production et le taux d'intérêt.

Dans un cadre monopériodique, on s'attendrait à ce que l'espérance du taux de rendement sur l'investissement physique soit toujours supérieure au taux d'intérêt, de façon à inciter les entrepreneurs à accepter les risques d'une production incertaine. Le deuxième terme du membre droit de l'équation (2.30) montre en effet que l'individu reçoit une prime correspondant à l'incertitude sur la production. Cette prime dépend, d'une part, de l'amplitude du risque de production (mesuré par la variance $\sigma_W^2 > 0$), et, d'autre part, de l'aversion que les individus ont à supporter ce risque (mesurée par le coefficient d'aversion absolue pour le risque, $-J_{WW}/J_W > 0$, exprimé en terme d'utilité indirecte).

Dans une perspective intertemporelle, un effet supplémentaire vient perturber cette relation simple entre production (instantanément risquée) et taux d'intérêt (instantanément non-risqué). L'investissement productif permet aux individus de se couvrir contre le risque d'une évolution défavorable imprévue de la technologie, ou, au contraire, aggrave l'exposition à ce risque. Dans (2.30), le terme σ'_{WY} , vecteur des covariances entre les rendements productifs optimaux et les changements des variables d'état, mesure la protection offerte par l'investissement productif contre les effets néfastes des variations de chacun des paramètres technologiques. Le vecteur $-\mathbf{J}'_{WY}/J_W$ détermine le signe des covariances recherché par l'individu adverse au risque : si, par exemple, $\mathbf{J}'_{WY} > \mathbf{0}$, l'utilité (indirecte) marginale de la richesse optimalement investie croît avec les variables d'état, et, *ceteris paribus*, les covariances positives entre le rendement de la production et les variables d'état sont appréciées. Si, de plus, $\sigma'_{WY} > \mathbf{0}$, alors le dernier terme du membre droit de (2.30) est positif, et constitue donc une prime négative sur l'investissement, payée par le producteur pour bénéficier d'une protection contre les changements défavorables imprévus de la technologie. Ainsi, même si le risque « intrapériodique » sur la production est fort, les préférences des individus et la structure de l'économie peuvent être tels que la couverture contre le risque « intertemporel », offerte par l'investissement physique, soit jugée si intéressante que l'espérance du rendement productif devienne inférieure au taux d'intérêt instantanément non-risqué.

Cet effet spécifiquement intertemporel perturbe-t-il significativement l'interprétation standard du taux d'intérêt ? Le corollaire suivant montre que ce n'est pas le cas.

Corollaire 1 *Le taux d'intérêt instantané d'équilibre est également donné par*

$$r = -\frac{\mathcal{L}[J_W]}{J_W}. \quad (2.32)$$

Preuve :

On différencie l'équation de Bellman (2.11), en utilisant l'expression de $\mathcal{L}[J]$ donnée en (2.12). Il vient

$$\begin{aligned} 0 = & J_{tW} + W J_{WW} \left\{ \mathbf{w}' (\boldsymbol{\alpha} - r \mathbf{1}) + r - \frac{C}{W} \right\} + J_W \{ \mathbf{w}' (\boldsymbol{\alpha} - r \mathbf{1}) + r \} + \\ & \frac{1}{2} W^2 J_{WWW} \mathbf{w}' \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}' \mathbf{w} + W J_{WW} \mathbf{w}' \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}' \mathbf{w} + \\ & \mathbf{J}_{YW} \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\boldsymbol{\sigma}_Y^2 \mathbf{J}_{YYW} \right) + W \mathbf{w}' \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{J}'_{WWY} + \mathbf{w}' \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{J}'_{WY}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

La définition de l'opérateur \mathcal{L} , donnée page 334, permet alors d'écrire

$$0 = \mathcal{L}[J_W] + J_W \{ \mathbf{w}' (\boldsymbol{\alpha} - r \mathbf{1}) + r \} + W J_{WW} \mathbf{w}' \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}' \mathbf{w} + \mathbf{w}' \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{J}'_{WY}, \quad (2.34)$$

soit, après réarrangements,

$$0 = \mathcal{L}[J_W] + \frac{\mathbf{w}'}{W} \left\{ (\boldsymbol{\alpha} - r \mathbf{1}) W J_W + \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\delta}' \mathbf{w} W^2 J_{WW} + \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\sigma}' W \mathbf{J}'_{WY} \right\} + r J_W. \quad (2.35)$$

L'équation (2.14) indique directement que le terme entre accolades est nul, et (2.32) suit immédiatement.

CQFD.

Le taux d'intérêt instantané est l'opposé du taux de croissance anticipé de l'utilité marginale de la richesse, et apparaît bien comme une « récompense », offerte aux individus pour qu'ils acceptent

de modifier leur plan intertemporel de consommation. Si, par exemple, $\mathcal{L}[J_W]/J_W$ augmente, la richesse future devient relativement plus attirante que la richesse présente, et, *ceteris paribus*, l'individu qui s'abstient de consommer aujourd'hui est moins lésé (car il pourra, plus tard, consommer avec une satisfaction accrue). En conséquence, le prix accordé par le marché à son geste peut baisser.

L'expression du taux d'intérêt d'équilibre donnée en (2.32) est donc parfaitement en accord avec l'analyse standard de l'intérêt.

2.4.3 Rendement anticipé des actifs financiers et primes de facteur

Le rendement sur un actif financier, espéré au-delà du taux sans risque, peut être exprimé en fonction des préférences et des variables fondamentales sous-jacentes W et Y .

Théorème 2 *Le rendement espéré sur l'actif financier i est donné par*²⁰

$$(\alpha_{F,i} - r) F_i = F_{iW} \lambda_W + \underset{(1 \times K)(K \times 1)}{\mathbf{F}_{iY}} \lambda_Y \quad (2.36)$$

avec

$$\lambda_W \equiv \left[\left(-\frac{J_{WW}}{J_W} \right) \sigma_W^2 + \underset{(1 \times K)}{\boldsymbol{\sigma}'_{WY}} \left(-\frac{\mathbf{J}'_{WY}}{J_W} \right) \right] \quad (2.37)$$

$$\lambda_Y \equiv \left[\left(-\frac{J_{WW}}{J_W} \right) \underset{(K \times 1)}{\boldsymbol{\sigma}_{WY}} + \underset{(K \times K)}{\boldsymbol{\sigma}_Y^2} \left(-\frac{\mathbf{J}'_{WY}}{J_W} \right) \right] \quad (2.38)$$

Preuve :

Dans un premier temps, comme dans la preuve de théorème 1, on introduit la condition d'équilibre $\mathbf{w}_F = \mathbf{0}$ dans le système des équations optimales (2.14). Mais on s'intéresse ici aux K dernières

²⁰Dans (2.36), F_{iW} est la dérivée partielle de la fonction de prix de l'actif i par rapport à la richesse W , et \mathbf{F}_{iY} est le vecteur $1 \times K$ des dérivées partielles par rapport aux variables d'état.

équations

$$(\alpha_F - r\mathbf{1}) W J_W + \delta_F \delta'_Q \mathbf{w}_Q^* W^2 J_{WW} + \delta_F \sigma' W J'_{WY} = 0. \quad (2.39)$$

Prémultipliant cette équation par \mathbf{I}_F , la matrice diagonale du prix des actifs financiers de la base, on obtient

$$\mathbf{I}_F (\alpha_F - r\mathbf{1}) = -(\mathbf{I}_F \delta_F) \delta'_Q \mathbf{w}_Q^* W \frac{J_{WW}}{J_W} - (\mathbf{I}_F \delta_F) \sigma' \frac{J'_{WY}}{J_W}. \quad (2.40)$$

Dans un deuxième temps, on exprime $\mathbf{I}_F \delta_F$, en appliquant le lemme d'Itô au processus du taux de rendement des actifs financiers de la base, (2.5). Comme $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(W, \mathbf{Y}, t)$, il nous faut utiliser les processus de W et de \mathbf{Y} . La dynamique de la richesse est donnée en (2.7), celle des variables d'état en (2.2). Le lemme conduit alors à

$$\mathbf{I}_F \delta_F = \mathbf{F}_W W \mathbf{w}' \delta + \mathbf{F}_Y \sigma, \quad (2.41)$$

soit, utilisant la condition d'équilibre $\mathbf{w}_F = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{I}_F \delta_F = \mathbf{F}_W W \mathbf{w}_Q^* \delta_Q + \mathbf{F}_Y \sigma. \quad (2.42)$$

On introduit maintenant cette expression dans (2.40), ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_F (\alpha_F - r\mathbf{1}) &= -\mathbf{F}_W \left(W^2 \mathbf{w}_Q^* \delta_Q \delta'_Q \mathbf{w}_Q^* \right) \frac{J_{WW}}{J_W} \\ &\quad - \mathbf{F}_Y \left(W \sigma \delta'_Q \mathbf{w}_Q^* \right) \frac{J_{WW}}{J_W} \\ &\quad - \mathbf{F}_W \left(W \mathbf{w}_Q^* \delta_Q \sigma' \right) \frac{J'_{WY}}{J_W} \\ &\quad - \mathbf{F}_Y \sigma \sigma' \frac{J'_{WY}}{J_W}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

On reconnaît, entre parenthèses, les moments du processus de la richesse optimalement investie, tels qu'ils sont donnés en (2.27), (2.28) et (2.29). Utilisant d'autre part la notation $\sigma \sigma' \equiv \sigma_Y^2$, il vient

$$\mathbf{I}_F (\alpha_F - r\mathbf{1}) = -\mathbf{F}_W \sigma_W^2 \left(\frac{J_{WW}}{J_W} \right) - \mathbf{F}_Y \sigma_{WY} \left(\frac{J_{WW}}{J_W} \right) \quad (2.44)$$

$$-\mathbf{F}_W \boldsymbol{\sigma}'_{WY} \left(\frac{\mathbf{J}'_{WY}}{J_W} \right) - \mathbf{F}_Y \boldsymbol{\sigma}_Y^2 \left(\frac{\mathbf{J}'_{WY}}{J_W} \right),$$

soit encore

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_F(\boldsymbol{\alpha}_F - r\mathbf{1}) &= \mathbf{F}_W \left[\left(-\frac{J_{WW}}{J_W} \right) \sigma_W^2 + \boldsymbol{\sigma}'_{WY} \left(-\frac{\mathbf{J}'_{WY}}{J_W} \right) \right] + \\ &\quad \mathbf{F}_Y \left[\left(-\frac{J_{WW}}{J_W} \right) \boldsymbol{\sigma}_{WY} + \boldsymbol{\sigma}_Y^2 \left(-\frac{\mathbf{J}'_{WY}}{J_W} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Utilisant les notations introduites dans le théorème, on écrit finalement

$$\mathbf{I}_F(\boldsymbol{\alpha}_F - r\mathbf{1}) = \mathbf{F}_W \lambda_W + \mathbf{F}_Y \lambda_Y. \quad (2.46)$$

Pour un actif quelconque i de la base, on retrouve bien l'équation (2.36).

Il reste à démontrer que cette équation s'applique également aux actifs qui ne sont pas dans la base. Soit \bar{F} le prix d'un actif hors-base. Les flux de paiements de cet actif redondant peuvent être répliqués par un portefeuille composé uniquement d'actifs de la base, et on peut *a fortiori* considérer que ce portefeuille comporte également l'actif sans risque. Soit \bar{w}_Q et \bar{w}_F les proportions en actifs physiques et financiers de ce portefeuille, et $\bar{w}_r \equiv 1 - \bar{w}'_Q \mathbf{1} - \bar{w}'_F \mathbf{1}$ la proportion d'actif sans risque. Le vecteur \mathbf{Q} mesure l'investissement « unitaire » dans chacun des processus de production. Le vecteur \mathbf{F} désigne toujours le vecteur des prix des titres de la base. L'unité d'investissement au taux sans risque est 1.

À l'équilibre, le prix et le rendement espéré de l'actif hors-base est déterminé par $\bar{F} = \bar{w}'_Q \mathbf{Q} + \bar{w}'_F \mathbf{F} + \bar{w}_r$ et $\bar{\alpha} \bar{F} = \bar{w}'_Q \boldsymbol{\alpha}_Q \mathbf{Q} + \bar{w}'_F \boldsymbol{\alpha}_F \mathbf{F} + \bar{w}_r r$, soit encore

$$\bar{F} = \bar{w}'_Q (\mathbf{Q} - \mathbf{1}) + \bar{w}'_F (\mathbf{F} - \mathbf{1}) + 1 \quad (2.47)$$

$$(\bar{\alpha} - r) \bar{F} = \bar{w}'_Q \mathbf{I}_Q (\boldsymbol{\alpha}_Q - r\mathbf{1}) + \bar{w}'_F \mathbf{I}_F (\boldsymbol{\alpha}_F - r\mathbf{1}). \quad (2.48)$$

Le terme $\mathbf{I}_F(\boldsymbol{\alpha}_F - r\mathbf{1})$ est donné en (2.46). Pour obtenir $\mathbf{I}_Q(\boldsymbol{\alpha}_Q - r\mathbf{1})$, on reprend l'équation (2.31) utilisée dans la démonstration du théorème 1. Prémultipliée par \mathbf{I}_Q puis réarrangée, cette

équation s'écrit

$$\mathbf{I}_Q (\alpha_Q - r\mathbf{1}) = (\mathbf{I}_Q \delta_Q) \delta'_Q \mathbf{w}_Q^* W \left(-\frac{J_{WW}}{J_W} \right) + (\mathbf{I}_Q \delta_Q) \boldsymbol{\sigma}' \left(-\frac{J_{WY}}{J_W} \right). \quad (2.49)$$

Par Itô, on obtient $\mathbf{I}_Q \delta_Q = \mathbf{Q}_Y \boldsymbol{\sigma}$. Introduisant ce résultat dans l'équation ci-dessus, il vient

$$\mathbf{I}_Q (\alpha_Q - r\mathbf{1}) = \mathbf{Q}_Y \boldsymbol{\lambda}_Y. \quad (2.50)$$

L'équation (2.48) se réécrit donc

$$(\bar{\alpha} - r) \bar{F} = \bar{\mathbf{w}}'_Q \mathbf{Q}_Y \boldsymbol{\lambda}_Y + \bar{\mathbf{w}}'_F \mathbf{I}_F (\mathbf{F}_W \lambda_W + \mathbf{F}_Y \boldsymbol{\lambda}_Y). \quad (2.51)$$

On dérive maintenant (2.47) par W puis par \mathbf{Y} . On obtient $\bar{F}_W = \bar{\mathbf{w}}'_F \mathbf{F}_W$ et $\bar{F}_Y = \bar{\mathbf{w}}'_Q \mathbf{Q}_Y + \bar{\mathbf{w}}'_F \mathbf{F}_Y$. Introduisant ces expressions dans (2.51), il vient

$$(\bar{\alpha} - r) \bar{F} = \bar{F}_W \lambda_W + \bar{F}_Y \boldsymbol{\lambda}_Y. \quad (2.52)$$

L'équation (2.36) s'applique donc bien à n'importe quel actif contingent.

CQFD.

Examinant le membre droit de (2.36), on distingue

- les termes F_{iW} et F_{iY} , qui dépendent des caractéristiques contractuelles de l'actif i ;
- les termes λ_W et $\boldsymbol{\lambda}_Y$, qui dépendent des préférences $(-J_{WW}/J_W, -J_{WY}/J_W)$ et des données structurelles de l'économie $(\sigma_W^2, \sigma_Y^2, \sigma_{WY})$. Ces termes ne dépendent pas de l'actif considéré.

Le théorème 2 établit donc que le taux de rendement anticipé sur un actif i , au-delà du taux sans risque (c'est-à-dire la *prime instantanée* sur l'actif i), est une combinaison linéaire de sa sensibilité aux mouvements des variables fondamentales W et \mathbf{Y} . La sensibilité est mesurée par les termes F_{iW}/F_i et F_{iY}/F_i . Les coefficients de cette combinaison, λ_W et $\boldsymbol{\lambda}_Y$, apparaissent alors

naturellement comme les primes « unitaires », offertes à l'équilibre par le marché pour les $K + 1$ facteurs de risque de cette économie.

Avant d'étudier plus en détail ces primes de facteur, on examine le corollaire suivant :

Corollaire 2 *À l'équilibre, le taux de rendement espéré, au-delà du taux sans risque, sur un actif financier, est égal à l'opposé de la covariance de son taux de rendement avec le taux de variation de l'utilité marginale de la richesse :*

$$\alpha_{F,i} - r = -\frac{1}{dt} \text{Cov} \left[\frac{dF_i + \varphi_{F,i} dt}{F_i}, \frac{dJ_W}{J_W} \right] \quad (2.53)$$

Preuve :

Dans un premier temps, on cherche à exprimer le terme $dJ_W \equiv dJ_W(W, \mathbf{Y}, t)$. La dynamique de la richesse (2.7) s'écrit, à l'équilibre

$$dW = \{\mu_W - C^*\} dt + W \{w_Q^* \delta_Q\} dz. \quad (2.54)$$

La dynamique de \mathbf{Y} est donnée par (2.2). Par Itô, on obtient donc immédiatement

$$dJ_W = \mathcal{L}[J_W] dt + \left\{ J_{WW} W w_Q^* \delta_Q + J_{WY} \sigma \right\} dz. \quad (2.55)$$

Dans un deuxième temps, on considère le processus (2.4) sous la forme

$$\frac{dF_i + \varphi_{F,i} dt}{F_i} = \alpha_{F,i} dt + \delta'_{F,i} dz. \quad (2.56)$$

Utilisant les règles habituelles du calcul stochastique, ces deux dernières équations impliquent

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{dt} \text{Cov} \left[\frac{dF_i + \varphi_{F,i} dt}{F_i}, \frac{dJ_W}{J_W} \right] \\ & = -\frac{1}{dt} \text{E} \left[\left[\delta'_{F,i} dz \right] \times \left[\left\{ \frac{J_{WW}}{J_W} W w_Q^* \delta_Q + \frac{J_{WY}}{J_W} \sigma \right\} dz \right] \right] \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{dt} \mathbb{E} \left[\delta'_{F,i} \times [dz dz'] \times \left[W \frac{J_{WW}}{J_W} \delta'_Q w_Q^* + \sigma' \frac{J'_{WY}}{J_W} \right] \right] \\
 &= -\frac{1}{dt} \times \delta'_{F,i} \times \mathbf{I} dt \times \left[W \frac{J_{WW}}{J_W} \delta'_Q w_Q^* + \sigma' \frac{J'_{WY}}{J_W} \right] \\
 &= \left(\frac{-W J_{WW}}{J_W} \right) \delta'_{F,i} \delta'_Q w_Q^* + \delta'_{F,i} \sigma' \left(\frac{-J'_{WY}}{J_W} \right).
 \end{aligned}$$

L'équation (2.39), obtenue au cours de la démonstration du théorème 2, nous permet d'affirmer que ce dernier terme est bien égal à $\alpha_{F,i} - r$.

CQFD.

Ce corollaire est l'expression d'un principe largement utilisé dans les modèles de prix d'actifs financiers : l'évaluation d'un titre dépend de ses paiements anticipés, mais aussi du caractère plus ou moins désirable des situations dans lesquelles sont délivrés ces paiements. Ainsi, considérant deux actifs ayant des paiements anticipés identiques, le premier sera préféré au second s'il a tendance à payer plus, lorsqu'une unité supplémentaire de richesse à investir apporte une plus grande satisfaction, et à payer moins, lorsque cette unité apporte une plus faible satisfaction.²¹

Dans le cadre du modèle intertemporel de Cox, Ingersoll et Ross, le surcroît de satisfaction, induit par l'investissement d'une unité de richesse supplémentaire, est mesuré par $dJ(W, \mathbf{Y}, t)$, l'utilité marginale de la richesse. Dans (2.53), le terme en covariance mesure la plus ou moins grande tendance d'un actif à délivrer des paiements additionnels dans des situations où l'utilité marginale accordée à ces paiements s'accroît. Si ce terme augmente, la distribution des paiements de l'actif est, *ceteris paribus*, d'avantage appréciée par les individus, et son taux de rendement excédentaire d'équilibre doit donc diminuer.

Le corollaire suivant montre que les primes, exprimées dans le théorème 2, émanent de ce principe.

²¹Pour un exposé détaillé sur le sujet, voir notamment Breeden [1979, pp.277–279].

Corollaire 3 À l'équilibre, les primes des facteurs sont données par :

$$\lambda_W = -\frac{1}{dt} \text{Cov} \left[dW, \frac{dJ_W}{W} \right] \quad (2.58)$$

$$\underset{(K \times 1)}{\lambda_Y} = -\frac{1}{dt} \text{Cov} \left[dY, \frac{dJ_W}{W} \right]. \quad (2.59)$$

Preuve :

La méthode est similaire à celle utilisée dans la démonstration du corollaire 2. Les processus suivis à l'équilibre par W et J_W , décrits en (2.54) et (2.55), permettent d'écrire

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{dt} \text{Cov} \left[dW, \frac{dJ_W}{W} \right] \quad (2.60) \\ & = -\frac{1}{dt} \text{E} \left[\left[W \mathbf{w}_Q^* \delta_Q dz \right] \times \left[\left\{ \frac{J_{WW}}{J_W} W \mathbf{w}_Q^* \delta_Q + \frac{J_{WY}}{J_W} \boldsymbol{\sigma} \right\} dz \right] \right] \\ & = -\frac{1}{dt} \text{E} \left[\left[W \mathbf{w}_Q^* \delta_Q \right] \times [dz dz'] \times \left[\frac{J_{WW}}{J_W} W \delta_Q' \mathbf{w}_Q^* + \boldsymbol{\sigma}' \frac{J'_{WY}}{J_W} \right] \right] \\ & = \left(\frac{-W J_{WW}}{J_W} \right) W^2 \mathbf{w}_Q^* \delta_Q \delta_Q' \mathbf{w}_Q^* + W \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{w}_Q^* \delta_Q \left(\frac{-J'_{WY}}{J_W} \right) \\ & \equiv \left(\frac{-W J_{WW}}{J_W} \right) \sigma_W^2 + \boldsymbol{\sigma}'_{WY} \left(\frac{-J'_{WY}}{J_W} \right) \\ & \equiv \lambda_W. \end{aligned}$$

De même, utilisant le processus de Y donné par (2.2) :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{dt} \text{Cov} \left[d\mathbf{Y}, \frac{dJ_W}{W} \right] & (2.61) \\
 & = -\frac{1}{dt} \text{E} \left[\boldsymbol{\sigma} dz \times \left[\left\{ \frac{J_{WW}}{J_W} W \mathbf{w}_Q^* \delta_Q + \frac{J_{WY}}{J_W} \boldsymbol{\sigma} \right\} dz \right] \right] \\
 & = \left(\frac{-W J_{WW}}{J_W} \right) W \boldsymbol{\sigma} \delta_Q' \mathbf{w}_Q^* + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}' \left(\frac{-J'_{WY}}{J_W} \right) \\
 & \equiv \left(\frac{-W J_{WW}}{J_W} \right) \boldsymbol{\sigma}_{WY} + \boldsymbol{\sigma}_Y^2 \left(\frac{-J'_{WY}}{J_W} \right) \\
 & \equiv \boldsymbol{\lambda}_Y.
 \end{aligned}$$

CQFD.

Ce corollaire montre que la propension d'un actif à délivrer des paiements dans les états appréciés se décompose, *in fine*, en une combinaison linéaire des caractéristiques techniques de cet actif, dont chaque coefficient mesure la propension d'un état fondamental de l'économie à croître en même temps que l'utilité marginale de la richesse. Ainsi, par exemple, si $\boldsymbol{\lambda}_Y > \mathbf{0}$, une augmentation des variables représentatives de l'état de la technologie tend à s'accompagner d'une hausse de l'utilité marginale de la richesse. Dans ce cas, un actif i tel que $F_{iY} > \mathbf{0}$ est relativement apprécié des investisseurs, et l'équation (2.36) montre que son rendement anticipé est relativement faible.

Le corollaire suivant complète cette analyse des primes de facteur.

Corollaire 4 À l'équilibre, les primes des facteurs sont données par

$$\lambda_W = \mu_W - W r \quad (2.62)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_Y = \mathbf{I}_{\hat{F}} (\boldsymbol{\alpha}_{\hat{F}} - r \mathbf{1}) \quad (2.63)$$

où $\alpha_{\hat{F}}$ désigne un vecteur de taux de rendement espérés sur K titres sans paiement contractuel, de prix \hat{F} , tels que $\hat{F} = Y$, et où $I_{\hat{F}}$ est une matrice diagonale dont le k -ième élément est le prix du k -ième de ces actifs.

Preuve :

L'équation (2.62) s'obtient simplement par rapprochement du taux d'intérêt d'équilibre (2.30), donné dans le théorème 1, et de la prime λ_W (2.37), donnée dans le théorème 2.

De plus, introduisant $d\hat{F} = dY$ et $\varphi_{\hat{F}} = \mathbf{0}$ dans l'équation (2.53) du corollaire 2, il vient

$$\lambda_Y = -\frac{1}{dt} \text{Cov} \left[d\hat{F}, \frac{dJ_W}{W} \right]. \quad (2.64)$$

Procédant de même avec l'équation (2.58) du corollaire 3, on obtient

$$I_{\hat{F}} (\alpha_{\hat{F}} - r\mathbf{1}) = -\frac{1}{dt} \text{Cov} \left[d\hat{F}, \frac{dJ_W}{W} \right]. \quad (2.65)$$

CQFD.

Ainsi, λ_W est l'espérance du rendement excédentaire anticipé sur la richesse optimalement investie. De même λ_Y est égal au rendement excédentaire anticipé sur K actifs, construits de telle façon que la valeur du k -ième actif soit identique à la k -ième variable d'état.

Ce corollaire établit un lien direct entre l'APT et l'équation (2.36) du théorème 2, donnant le rendement excédentaire espéré des actifs financiers. Dans un cadre d'équilibre d'arbitrage, Ross [1976] définit la prime sur le j -ième facteur (non-spécifié) comme l'espérance du rendement excédentaire sur un titre, ou un portefeuille, soumis exclusivement au risque de ce j -ième facteur. Les $K + 1$ termes λ_W et λ_Y s'interprètent bien comme des primes de facteur, au sens de l'APT. Toutefois, elles sont ici obtenues dans un cadre d'équilibre général, et sont donc exprimées en fonction des paramètres fondamentaux de l'économie.

2.4.4 L'équation fondamentale d'évaluation des actifs contingents

Le théorème fondamental suivant permet d'évaluer le prix d'équilibre des actifs financiers.

Théorème 3 *Le prix de n'importe quel actif contingent, de prix F , satisfait à l'équation différentielle partielle :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F_{WW}\sigma_W^2 + F_W(\mu_W - C^* - \lambda_W) + \frac{1}{2}\text{tr}(\sigma_Y^2 \mathbf{F}_{YY}) + \mathbf{F}_Y(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}_Y) \\ + \mathbf{F}_{WY}\boldsymbol{\sigma}_{WY} - rF + F_t + \varphi_F = 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

L'expression de r est, par exemple, donnée par l'équation (2.62) du corollaire 4, et les primes λ_W et λ_Y par les équations (2.37) et (2.38) du théorème 2.

Preuve :

Considérant la dynamique d'équilibre de la richesse (2.54) et des états (2.2), on applique le lemme d'Itô sur le processus de $F(W, \mathbf{Y}, t)$. Il vient

$$\begin{aligned} \alpha_F F - \varphi_F = \frac{1}{2}F_{WW}\sigma_W^2 + F_W(\mu_W - C^*) + \frac{1}{2}\text{tr}(\sigma_Y^2 \mathbf{F}_{YY}) + \mathbf{F}_Y\boldsymbol{\mu} + \\ \mathbf{F}_{WY}\boldsymbol{\sigma}_{WY} + F_t. \end{aligned} \quad (2.67)$$

L'équation (2.36) nous donne la valeur de $\alpha_F F$ sous la forme

$$\alpha_F F = rF + F_W\lambda_W + \mathbf{F}_Y\boldsymbol{\lambda}_Y. \quad (2.68)$$

Introduisant cette expression dans (2.67), on retrouve facilement (2.66).

CQFD.

L'équation (2.66), appelée *équation fondamentale d'évaluation des actifs contingents*, fournit donc le prix courant des actifs financiers, en fonction des variables essentielles de l'économie : l'état de la technologie, la richesse, le taux d'intérêt, la consommation et les préférences individuelles. Le théorème 3 est si puissant qu'il justifie à lui seul la position privilégiée du modèle de Cox, Ingersoll et Ross dans la littérature financière standard. En fait, jamais auparavant une équation de prix véritablement opérationnelle n'avait été obtenue dans un cadre si général.

Avec l'équation (2.66), Cox, Ingersoll et Ross réalisent une performance peu commune : allier généralité théorique et applicabilité.

Du point de vue des applications empiriques, les potentialités du modèle de Cox, Ingersoll et Ross découlent de la grande généralité de l'équation de prix (2.66). Elle peut être appliquée à la quasi-totalité des titres financiers.

Dans ce modèle, un titre financier est défini par les trois éléments suivants :

1. la fonction de paiements $\varphi_F(W, \mathbf{Y}, t)$;
2. les conditions terminales ;
3. les conditions aux bornes.

Ces éléments contractuels sont négociés par les deux parties, lors de la création du titre contingent. D'une manière générale, la fonction prix $F(W, \mathbf{Y}, \tau)$ d'un actif financier, négocié en t et d'échéance s , est définie sur un ensemble $\mathcal{O} \times [t, s)$, où $\mathcal{O} \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}^K$ est un ensemble ouvert.²² Les conditions limites 2 et 3 ci-dessus s'expriment à l'aide de deux fonctions Λ et Γ , telles que

$$F(W, \mathbf{Y}, s) = \Lambda(W(s), \mathbf{Y}(s)), \quad W(s), \mathbf{Y}(s) \in \mathcal{O} \quad (2.69)$$

$$F(W, \mathbf{Y}, \tilde{\tau}) = \Gamma(W(\tilde{\tau}), \mathbf{Y}(\tilde{\tau})), \quad W(\tilde{\tau}), \mathbf{Y}(\tilde{\tau}) \in \overline{\mathcal{O}}, \quad (2.70)$$

où $\overline{\mathcal{O}}$ désigne l'ensemble des points accessibles de la frontière de \mathcal{O} , et $\tilde{\tau}$ le temps du premier passage de (W, \mathbf{Y}) dans $\overline{\mathcal{O}}$. L'ensemble \mathcal{O} , spécifié sur le contrat, est donc un sous-ensemble de toutes les valeurs possibles de la richesse et des K variables d'état, c'est-à-dire de toutes les situations envisageables de l'économie dans le futur. Il définit une « région », dans laquelle le prix $F(W, \mathbf{Y}, \tau)$ va évoluer pendant un certain temps. Il est possible qu'à un moment (aléatoire) $\tilde{\tau}$ le prix atteigne la frontière $\overline{\mathcal{O}}$ de cette région \mathcal{O} . Comme \mathcal{O} est un ensemble ouvert, cela signifie que le prix a *quitté* la région.

En résumé, les paiements totaux sur un actif sont tels que :

- durant la vie de ce titre, et tant que les variables fondamentales (W, \mathbf{Y}) restent dans la région définie par \mathcal{O} , le détenteur de l'actif reçoit les flux de paiements φ_F ;

²²la fonction prix est définie uniquement pour une richesse strictement positive.

- si (W, \mathbf{Y}) quitte cette région avant l'échéance s , le détenteur reçoit, au moment $\tilde{\tau}$ du passage, un paiement Γ ;
- si, par contre, (W, \mathbf{Y}) reste dans la région pendant toute la vie du titre, il reçoit un paiement Λ , à échéance.

Ces spécifications, très générales, permettent d'appliquer (2.66) à des obligations avec ou sans coupon, à des options, des contrats à terme, ou toute combinaison de ces titres de base. Pour ce faire, on doit résoudre (2.66) sous les conditions limites (2.69) et (2.70), correspondant au titre que l'on cherche à évaluer.²³

2.5 La structure des taux à l'équilibre

Nous utilisons cette procédure pour déterminer le prix d'équilibre des actifs obligataires, supports de la structure par terme des taux d'intérêt. Spécialisant (2.66) au cas des bons sans coupon, nous obtenons une *équation fondamentale de structure par terme*. Par comparaison avec l'équation de structure par terme, issue du modèle à K facteurs, nous pouvons évaluer l'apport de l'approche par l'équilibre général. De plus, nous précisons l'interprétation « économique » de la structure des taux.

2.5.1 L'équation fondamentale de structure par terme

Soit $P(t, s)$ le prix en t d'un bon d'échéance s , ne délivrant aucun coupon, de valeur faciale unitaire, et exempt de tout risque de défaut. Dans le cadre du modèle d'équilibre général, ce prix dépend de la situation de l'économie en t , décrite par la valeur de W et de \mathbf{Y} à cet instant. Pour exprimer cette dépendance, on notera ce prix $P(W, \mathbf{Y}, t, s)$.

Les paiements contractuels, générés par ce titre, sont particulièrement simples : une unité de compte (ici une unité de bien de consommation) est livrée à échéance. On pose donc

- $\mathcal{O} = (0, \infty) \times \mathbb{R}^K$: il n'existe aucune condition limite portant sur la situation économique ;

²³L'existence et l'unicité de la solution de ce problème ne peuvent être obtenues qu'au prix d'hypothèses supplémentaires fort complexes. Pour un énoncé de ces hypothèses, voir Cox, Ingersoll et Ross [1985a, note 21]. Pour une démonstration, voir Friedman [1975, p.138].

- $\varphi_F(W, \mathbf{Y}, \tau) = 0$ dans l'équation différentielle (2.66) : le bon ne donne lieu à aucun paiement intermédiaire ;
- $\Lambda(W(s), \mathbf{Y}(s)) = 1$ dans (2.69) : le bon paye une unité à échéance, quelle que soit la situation économique à cet instant.

La fonction $\Gamma(W(\tilde{\tau}), \mathbf{Y}(\tilde{\tau}))$ ne nous intéresse pas, car le prix du bon ne peut pas quitter la région \mathcal{O} .

On obtient alors immédiatement le théorème fondamental suivant :

Théorème 4 *Le prix $P(W, \mathbf{Y}, t, s)$ d'un bon sans coupon satisfait à l'équation différentielle partielle :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P_{WW}\sigma_W^2 + P_W(\mu_W - C^* - \lambda_W) + \frac{1}{2}\text{tr}(\sigma_Y^2 P_{YY}) + P_Y(\mu - \lambda_Y) \\ + P_{WY}\sigma_{WY} - rP + P_t = 0, \end{aligned} \quad (2.71)$$

sous la condition terminale $P(W, \mathbf{Y}, s, s) = 1$.

L'équation différentielle (2.71) est l'équation fondamentale de structure par terme.

2.5.2 Équilibre général et équilibre d'arbitrage

Cette formule, obtenue dans le cadre d'un équilibre général, peut être comparée avec l'équation de structure par terme du modèle d'arbitrage, c'est-à-dire avec²⁴

$$\frac{1}{2}\text{tr}(\sigma_Y^2 P_{YY}) + P_Y(\mu - \lambda_Y) - rP + P_t = 0, \quad (2.72)$$

où \mathbf{Y} est un vecteur de variables d'état, non-spécifiées.

Considérant que, dans cette dernière équation, la richesse W peut être l'une des variables d'état du vecteur \mathbf{Y} , la forme générale de l'équation d'arbitrage (2.72) est identique à celle de l'équation d'équilibre général (2.71) : les paramètres de diffusion des processus suivis par les états, ainsi que

²⁴Il s'agit de l'équation (3.29), donnée dans le théorème 2, page 94.

les diverses dérivées partielles du prix par rapport aux états et au temps, interviennent de façon similaire. La variable W est donc intégrée dans (2.71) comme une variable d'état ordinaire, à ceci près que sa dynamique est endogène au modèle d'équilibre général.

Une différence semble toutefois subsister : le terme multipliant la dérivée partielle P_W du prix par rapport à la richesse est de la forme $\mu_W - C^* - \lambda_W$ dans l'équation générale (2.71), alors que, pour une variable d'état Y_i , le terme correspondant est de la forme $\mu_{Y_i} - \lambda_{Y_i}$ dans l'équation d'arbitrage (2.72). Cette différence n'est qu'apparente : examinant le processus stochastique suivi par la richesse à l'équilibre (équation (2.54) page 185) on voit que $\mu_W - C^*$ est précisément le paramètre de tendance de dW , et joue donc le même rôle que μ_{Y_i} dans l'équation d'arbitrage.

Ceci nous conduit à penser que la « valeur ajoutée » de l'approche d'équilibre général de la structure des taux doit être analysée à partir des équations qui précisent la valeur des paramètres de l'équation différentielle (2.71), et notamment à partir de

$$r = \frac{1}{W} (\mu_W - \lambda_W) \quad (2.73)$$

$$\lambda_W \equiv \left[\left(-\frac{J_{WW}}{J_W} \right) \sigma_W^2 + \sigma'_{WY} \left(-\frac{J'_{WY}}{J_W} \right) \right] \quad (2.74)$$

$$\lambda_Y \equiv \left[\left(-\frac{J_{WW}}{J_W} \right) \sigma_{WY} + \sigma_Y^2 \left(-\frac{J'_{WY}}{J_W} \right) \right]. \quad (2.75)$$

Le modèle d'équilibre général détermine de façon endogène les primes de risque des $K + 1$ facteurs, λ_W et λ_Y . Dans le cadre du modèle d'arbitrage à K facteurs, ces primes restent parfaitement exogènes. On peut établir une correspondance plus étroite entre ces deux modèles en exprimant ces primes sous la forme

$$\lambda_W = \{W \mathbf{w}_Q^* \delta_Q\} \times \lambda_z \quad (2.76)$$

$$\lambda_Y = \{\sigma\} \times \lambda_z \quad (2.77)$$

avec

$$\lambda_z \equiv \left[\left(-\frac{J_{WW}}{J_W} \right) W \delta_Q' \mathbf{w}_Q^* + \sigma' \left(-\frac{J'_{WY}}{J_W} \right) \right]. \quad (2.78)$$

$(N+K) \times 1$

On retrouve ici le vecteur λ_z du modèle d'arbitrage, c'est-à-dire le vecteur des primes unitaires d'équilibre, associées aux sources fondamentales d'incertitude. Dans l'expression de λ_W , le vecteur $Ww_Q^* \delta_Q$, de dimension $1 \times (N + K)$, s'interprète donc comme le vecteur des « quantités » de chacun des $N + K$ risques supportés par la richesse optimalement investie.

Ainsi, les prix de marché des risques qui affectent l'économie sont parfaitement spécifiés. Ils dépendent des caractéristiques essentielles de l'économie : technologie, richesse et préférences.

Avant d'interpréter plus précisément le théorème 4, il est important de souligner que les équations (2.73) à (2.75) consacrent la supériorité *per se* du modèle d'équilibre général. En effet, ces équations établissent une relation entre les états fondamentaux W et Y , les primes de facteur λ_W et λ_Y associées à ces états, et le taux d'intérêt instantané r . De ce fait, elles interdisent de spécifier *indépendamment* les états pertinents, les paramètres des processus gouvernant ces états, et les primes de risque correspondantes, *comme nous avons pu le faire dans le cadre du modèle d'équilibre d'arbitrage*. L'argument formel de Cox, Ingersoll et Ross (exposé dans le chapitre précédent), démontrant que ces spécifications arbitraires pouvaient conduire à des modèles inconsistants, ne s'applique tout simplement pas au modèle d'équilibre général.

Comparativement à l'équilibre d'arbitrage, l'approche par l'équilibre général possède l'immense avantage de garantir *a priori* la viabilité de l'équilibre économique, c'est-à-dire l'absence d'opportunité d'arbitrage.

2.5.3 Le prix d'équilibre des bons sans coupon

On peut maintenant tirer parti des équations (2.73) à (2.75) pour interpréter, en termes économiques, le théorème 4. Les correspondances établies ci-dessus entre l'équation d'équilibre général et l'équation d'équilibre d'arbitrage permettent d'utiliser directement la preuve du corollaire 1, page 95, pour démontrer le corollaire similaire suivant :

Corollaire 5 *Le prix $P(W, Y, t, s)$, solution de (2.71) sous $P(W, Y, s, s) = 1$, est*

$$P(W, Y, t, s) = E_{W, Y, t} [\exp \{-\varrho(W, Y, t, s)\}] \quad (2.79)$$

avec

$$\varrho(W, Y, t, s) = \int_t^s r(W, Y, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_t^s \lambda_z'(W, Y, \tau) \lambda_z(W, Y, \tau) d\tau +$$

$$\int_t^s \lambda'_z(W, \mathbf{Y}, \tau) dz(\tau).$$

Disposant d'une relation entre r et λ_z , cette formule d'actualisation peut être maintenant précisée à l'aide du théorème fondamental suivant :

Théorème 5 *Le prix $P(W, \mathbf{Y}, t, s)$, solution de (2.71) sous $P(W, \mathbf{Y}, s, s) = 1$, est*

$$P(W, \mathbf{Y}, t, s) = E_{W, \mathbf{Y}, t} \left[\frac{J_W(W, \mathbf{Y}, s)}{J_W(W, \mathbf{Y}, t)} \right]. \quad (2.80)$$

Preuve :

On écrit

$$\begin{aligned} \frac{J_W(W, \mathbf{Y}, s)}{J_W(W, \mathbf{Y}, t)} &= \exp \{ \ln J_W(W, \mathbf{Y}, s) - \ln J_W(W, \mathbf{Y}, t) \} \\ &= \exp \left\{ \int_t^s dJ_W(W, \mathbf{Y}, \tau) \right\}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

puis on cherche à exprimer la dynamique de $\ln J_W(W, \mathbf{Y}, \tau)$ à l'aide du lemme d'Itô. On note cette dynamique sous la forme

$$d \ln J_W = \beta dt + \xi' dz. \quad (2.82)$$

Considérant les processus (2.2) et (2.54), il vient

$$\beta = \frac{\mathcal{L}[J_W]}{J_W} - \frac{1}{2} \left[\sigma_W^2 \left(\frac{J_{WW}}{J_W} \right)^2 + 2\sigma'_{WY} \left(\frac{J_{WW}}{J_W} \right) \left(\frac{J'_{WY}}{J_W} \right) + \text{tr} \left(\sigma_Y^2 \left(\frac{J_{WY}}{J_W} \right) \left(\frac{J'_{WY}}{J_W} \right) \right) \right] \quad (2.83)$$

$$\xi = \left[\left(\frac{J_{WW}}{J_W} \right) W \delta'_Q w_Q^* + \sigma' \left(\frac{J'_{WY}}{J_W} \right) \right]. \quad (2.84)$$

Utilisant, d'une part, l'expression de λ_z donnée en (2.78), et, d'autre part, l'expression du taux d'intérêt d'équilibre fournie par le corollaire 1, page 180, la dynamique de $\ln J_W(W, \mathbf{Y}, \tau)$ s'écrit

$$d \ln J_W(W, \mathbf{Y}, \tau) = \left\{ -r(W, \mathbf{Y}, \tau) - \frac{1}{2} \lambda'_z(W, \mathbf{Y}, \tau) \lambda_z(W, \mathbf{Y}, \tau) \right\} d\tau + \left\{ \lambda'_z(W, \mathbf{Y}, \tau) \right\} dz(\tau). \quad (2.85)$$

Introduisant ce résultat dans (2.81), on obtient

$$\frac{J_W(W, \mathbf{Y}, s)}{J_W(W, \mathbf{Y}, t)} = \exp \{-\varrho(W, \mathbf{Y}, t, s)\}, \quad (2.86)$$

où $\varrho(W, \mathbf{Y}, t, s)$ est défini dans le corollaire 5. Prenant, à gauche et à droite de cette équation, l'espérance conditionnelle à l'information (W, \mathbf{Y}) disponible en t , ce corollaire implique directement (2.80).

CQFD.

Le théorème 5 énonce que le prix courant d'un bon sans coupon est égal à l'espérance de l'utilité marginale de la richesse, à l'échéance du titre, divisée par l'utilité marginale de la richesse, à l'instant présent, soit, en d'autres termes, à l'espérance du taux marginal de substitution entre richesse présente et richesse future. Ainsi, la valeur présente d'un titre, livrant une unité de compte dans le futur, témoigne d'un équilibre des choix de substitution intertemporelle de consommation, opérés par l'individu représentatif. Étant donnée sa situation présente, cet individu compare

- le supplément de satisfaction qu'il peut espérer obtenir de cette unité, touchée à échéance ;
- le supplément de satisfaction qu'il pourrait obtenir s'il touchait cette unité dès maintenant.

Lorsque le rapport de ces deux mesures est égal au prix du titre, l'individu ne ressent plus le besoin d'acheter ou de vendre l'obligation, parce qu'une telle opération laisserait inchangée la satisfaction qu'il attend de son plan intertemporel de consommation et d'investissement. Le titre obligataire apparaît ici comme un *media* des échanges entre consommation présente et consommation future.

Considérant le corollaire 1, exprimant le taux d'intérêt instantané comme l'opposé de l'espérance du taux de croissance anticipé de l'utilité marginale, le taux d'intérêt « long » $R(W, \mathbf{Y}, t, s) \equiv -\ln P(W, \mathbf{Y}, t, s)/(s - t)$ s'interprète clairement comme l'extension naturelle de la notion de taux d'intérêt sur un intervalle de temps « infiniment court », à un intervalle de longueur $s - t$ quelconque. Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross étend l'analyse standard de l'intérêt à un univers dynamique, et montre que les principes qui expliquent le taux d'intérêt « sans risque » s'appliquent également à tous les autres taux d'intérêt. Dans ce modèle, le taux « court » s'interprète de la même façon que les taux plus longs.

2.6 Conclusion

Ainsi s'achève cette présentation du modèle intertemporel de Cox, Ingersoll et Ross. Comme nous l'avons vu, il s'agit bien d'un modèle d'équilibre général, car seules la population, la technologie et les dotations sont exogènes. Tous les autres éléments ont été déterminés de manière endogène : richesse, taux d'intérêt, taux de rendement et prix des actifs financiers. Du point de vue de l'analyse de la structure des taux, le résultat le plus important a été présenté dans le théorème 3. Il s'agit d'une équation différentielle partielle, pouvant être appliquée à la quasi-totalité des actifs financiers, et dont la résolution fournit le prix d'équilibre d'un actif, en fonction des données exogènes de l'économie. Lorsque l'actif considéré est le bon sans coupon, cette équation devient une *équation fondamentale de structure par terme*.

Ayant utilisé des notations appropriées, nous avons pu aisément comparer l'approche par l'équilibre d'arbitrage, exposée dans le chapitre précédent, avec cette approche beaucoup plus générale. Nous avons d'abord constaté une très grande similitude des équations de structure par terme obtenues. L'apport spécifique de l'équilibre général a pu alors être associé à la détermination endogène du taux d'intérêt instantané, et des primes de risque des facteurs fondamentaux de l'économie (richesse et technologie). De ce fait, et contrairement à l'équilibre d'arbitrage, l'équilibre général permet

- de garantir *a priori* la cohérence du modèle obtenu, c'est-à-dire l'absence d'opportunité d'arbitrage à l'équilibre. L'approche générale ne possède donc pas le « talon d'Achille » de l'approche par arbitrage ;
- d'analyser la structure des taux en fonction de facteurs économiques aussi essentiels que la richesse, la technologie, les préférences individuelles ou encore les anticipations. Dans le cadre du modèle d'équilibre général, le prix d'équilibre d'un bon est égal à l'espérance du taux marginal de substitution entre richesse présente et richesse à l'échéance du bon considéré. Ce résultat est parfaitement compatible avec l'analyse standard du phénomène de l'intérêt.

Ainsi, le modèle de Cox, Ingersoll et Ross réalise ce qui avait été présenté comme une *nécessité* à la fin du chapitre précédent : immerger la structure des taux dans un cadre d'analyse dépassant les frontières de la théorie financière, et incluant notamment la production, la consommation et l'épargne.

Section 3 Le modèle d'équilibre à un facteur de la structure des taux

3.1 Introduction

À l'instar du modèle d'arbitrage à K facteurs, le modèle d'équilibre général de Cox, Ingersoll et Ross débouche sur une équation de structure par terme, dont la résolution mène, en principe, à une fonction donnant explicitement le taux d'intérêt en fonction de la maturité. Pour obtenir une telle solution fermée dans le cadre du modèle d'arbitrage, il nous a fallu spécifier les facteurs déterminants de la structure des taux, préciser leur dynamique, et choisir la forme des primes unitaires associées à chacun de ces facteurs. Par exemple, nous avons pu construire un modèle, dans lequel le seul facteur était le taux d'intérêt instantané, et la prime unitaire de risque de taux était constante.

Dans le cadre du modèle d'équilibre général, les primes de facteur sont déterminées de façon endogène. La dynamique du taux court est également déterminée par l'équilibre, et r ne peut être directement identifié à un facteur exogène. Pour obtenir une solution fermée d'équilibre général, il est nécessaire de spécifier :

1. les technologies de production disponibles, ainsi que les caractéristiques de l'incertitude qui les affecte ;
2. les préférences individuelles.

Concrètement, le premier point implique qu'il faut fixer le nombre de technologies, N , et de variables d'état, K , expliciter les paramètres $\alpha_Q(\mathbf{Y}, t)$ et $\delta_Q(\mathbf{Y}, t)$ de la dynamique de \mathbf{Q} , ainsi que les paramètres $\mu(\mathbf{Y}, t)$ et $\sigma(\mathbf{Y}, t)$ de la dynamique de \mathbf{Y} . Le deuxième point indique qu'il est nécessaire de préciser la fonction d'utilité $U(C, \mathbf{Y}, t)$.

Les techniques de résolution d'équations différentielles partielles étant ce qu'elles sont, toutes les spécifications de l'incertitude technologique et des préférences ne mènent pas à des solutions fermées. Pour obtenir une expression explicite de structure des taux, il faut donc atteindre un degré « suffisant » de simplification. Dans quelle mesure les simplifications requises appauvrissent-elles le modèle général initial ? Quelles sont les particularités de ces modèles par rapport à ceux issus du modèle d'arbitrage à K facteurs ?

Pour tenter de répondre à ces questions, nous examinons dans cette section un modèle explicite d'équilibre général de structure des taux. De ce point de vue, la littérature est abondante. Nous choisissons ici d'exposer le plus célèbre d'entre eux : le modèle à un facteur de Cox, Ingersoll et Ross [1985b]. Trois raisons principales justifient ce choix.

En premier lieu, ce modèle ne comporte qu'un seul facteur, et sa formalisation reste légère. Mathématiquement plus complexes, les modèles à deux facteurs sont plus performants du point de vue empirique, mais ne nous éclairent pas d'avantage sur les simplifications apportées aux préférences et aux dynamiques. En second lieu, le seul facteur déterminant la structure des taux dans ce modèle est le taux d'intérêt instantané. Ceci nous permettra de comparer aisément ce modèle avec ceux présentés dans le chapitre précédent. Enfin, en dernier lieu, la dynamique du taux court s'avère être une dynamique de type « racine carrée », particulièrement riche.

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans un premier temps, nous analysons les contraintes imposées sur les préférences individuelles. Cox, Ingersoll et Ross supposent que la fonction d'utilité est de type logarithmique. Plutôt que d'examiner directement les simplifications induites par cette spécification, nous choisissons de contraindre « par étapes » la fonction d'utilité. Partant d'une fonction d'utilité totalement générale, chaque étape ajoute une contrainte significative à la précédente, jusqu'à obtenir, *in fine*, la fonction d'utilité postulée par Cox, Ingersoll et Ross. Ceci nous permet d'associer à chaque contrainte des simplifications bien identifiées, et donc de mettre en valeur l'appauvrissement progressif du modèle d'équilibre général. Dans un deuxième temps, nous ajoutons à ces contraintes les hypothèses concernant les processus de production, en procédant de façon similaire. Le modèle complet de Cox, Ingersoll et Ross est ainsi construit, et nous pouvons discuter de la structure des taux obtenue.

3.2 Contraintes sur les préférences

Formellement, Cox, Ingersoll et Ross posent que la fonction d'utilité de l'individu représentatif est de la forme

$$U(C, \mathbf{Y}, \tau) = e^{-\rho\tau} \ln(C(\tau)). \quad (3.1)$$

Cette spécification est obtenue au terme de quatre étapes significatives.

3.2.1 La fonction d'utilité est indépendante des états

On pose

$$U(C, \mathbf{Y}, \tau) = U(C, \tau). \quad (3.2)$$

Cette simplification signifie que la satisfaction de l'individu ne dépend plus directement de l'état de la technologie. L'évolution de \mathbf{Y} concerne l'individu uniquement parce qu'elle conditionne sa consommation optimale.

Soit σ_{CW} , σ_{CY} et σ_{CF} les covariances des changements de la consommation optimale C^* avec, respectivement, la richesse W , les variables technologiques \mathbf{Y} , et le rendement d'un actif contingent quelconque de prix F . On obtient le résultat important suivant :

Proposition 1 *Lorsque la fonction d'utilité est décrite par (3.2), les primes de facteur sont données par*

$$\lambda_W = \left(-\frac{U_{CC}}{U_C} \right) \sigma_{CW} \quad (3.3)$$

$$\lambda_Y = \left(-\frac{U_{CC}}{U_C} \right) \sigma_{CY} \quad (3.4)$$

et le rendement espéré sur n'importe quel actif contingent satisfait à

$$(\alpha_F - r) F = \left(-\frac{U_{CC}}{U_C} \right) \sigma_{CF}. \quad (3.5)$$

Preuve :

Dans un premier temps, on exprime les variables σ_{CW} et σ_{CY} , nouvellement introduites. Pour cela, nous devons calculer le coefficient de diffusion σ_C de la consommation optimale $C^* = C^*(W, \mathbf{Y}, \tau)$. D'après l'équation (2.54) page 185, le coefficient de diffusion de la richesse W est, à l'équilibre, $W w_Q^* \delta_Q$. Celui de \mathbf{Y} est σ . Le lemme d'Itô permet d'écrire

$$\underset{1 \times (N+K)}{\sigma'_C} = C_W W w_Q^* \delta_Q + C_Y \sigma. \quad (3.6)$$

D'où

$$\begin{aligned}\sigma_{CW} &= (C_W W \mathbf{w}_Q^* \delta_Q + \mathbf{C}_Y \boldsymbol{\sigma}) \times (W \delta'_Q \mathbf{w}_Q^*) \\ &= C_W \sigma_W^2 + \boldsymbol{\sigma}'_{WY} \mathbf{C}'_Y\end{aligned}\quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}'_{CY} &= (C_W W \mathbf{w}_Q^* \delta_Q + \mathbf{C}_Y \boldsymbol{\sigma}) \times \boldsymbol{\sigma}' \\ &= C_W \boldsymbol{\sigma}'_{WY} + \mathbf{C}_Y \sigma_Y^2.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Prémultipliant ces équations par $-U_{CC}/U_C$, il vient

$$\left(-\frac{U_{CC}}{U_C}\right) \sigma_{CW} = \left(-\frac{U_{CC} C_W}{U_C}\right) \sigma_W^2 + \boldsymbol{\sigma}'_{WY} \left(-\frac{U_{CC} \mathbf{C}'_Y}{U_C}\right)\quad (3.9)$$

$$\left(-\frac{U_{CC}}{U_C}\right) \boldsymbol{\sigma}_{CY} = \left(-\frac{U_{CC} C_W}{U_C}\right) \boldsymbol{\sigma}_{WY} + \sigma_Y^2 \left(-\frac{U_{CC} \mathbf{C}'_Y}{U_C}\right).\quad (3.10)$$

Dans un deuxième temps, on exprime les coefficients $-U_{CC} C_W / U_C$ et $-U_{CC} \mathbf{C}'_Y / U_C$. D'une manière générale, la condition d'enveloppe $J_W = U_C$ implique $J_{WW} = U_{CC} C_W$, $\mathbf{J}_{WY} = U_{CY} + U_{CC} \mathbf{C}_Y$, et donc

$$\left(-\frac{J_{WW}}{J_W}\right) = -\frac{U_{CC} C_W}{U_C}\quad (3.11)$$

$$\left(-\frac{\mathbf{J}'_{WY}}{J_W}\right) = -\frac{U_{CC} \mathbf{C}'_Y}{U_C} - \frac{\mathbf{U}'_{CY}}{U_C}.\quad (3.12)$$

Dans le cas présent, on a $\mathbf{U}'_{CY} = \mathbf{0}$ car l'utilité est indépendante de \mathbf{Y} . Introduisant ceci dans (3.11) et (3.12), les équations (3.9) et (3.10) impliquent bien (3.3) et (3.4), compte tenu des expressions de λ_W et λ_Y données dans le théorème 2.

Pour obtenir (3.5), on remarque que la démonstration de ce théorème indique que le coefficient de diffusion du rendement de l'actif contingent de prix F est $W F_W \mathbf{w}_Q^* \delta_Q + \mathbf{F}_Y \boldsymbol{\sigma}$. Utilisant (3.6), il vient

$$\begin{aligned}
 \sigma_{CF} &= (C_W W w_Q^* \delta_Q + C_Y \sigma) \times (W F_W \delta_Q' w_Q^* + \sigma' F_Y') \\
 &= F_W (C_W \sigma_W^2 + \sigma_{WY}' C_Y') + F_Y (C_W \sigma_{WY} + \sigma_Y^2 C_Y') \\
 &= F_W \sigma_{CW} + F_Y \sigma_{WY}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

On multiplie alors les deux membres de cette dernière égalité par $-U_{CC}/U_C$. Utilisant (3.9) et (3.10), le membre droit obtenu est précisément $F_W \lambda_W + F_Y \lambda_Y$. Le théorème 2 confirme alors (3.5).

CQFD.

Cette proposition montre que l'autonomie de la fonction d'utilité, par rapport aux états, place la consommation agrégée au cœur du problème de l'évaluation des rendements d'équilibre des actifs financiers. La prime d'équilibre, sur un facteur quelconque, est égal à la covariance entre la consommation et ce facteur, multipliée par le coefficient d'aversion absolue pour le risque, $-U_{CC}/U_C > 0$. Ainsi, par exemple, l'équation (3.3) indique que la prime λ_W est positive si la richesse covarie positivement avec la consommation optimale. Dès lors, si un actif F est tel que $F_W > 0$, sa détention amplifie les variations de la consommation, et représente de ce point de vue un danger pour l'individu. Le théorème 2 montre bien que le marché offre une compensation sur cet actif, sous forme d'un supplément de rendement espéré. En somme, (3.3) et (3.4) indiquent que le risque attaché à une variable fondamentale de l'économie se mesure en terme de variations conjointes avec la consommation. L'équation (3.5) est parfaitement conforme à ce principe. Elle montre que la covariance du rendement d'un actif avec la consommation suffit à déterminer son rendement espéré d'équilibre : si, par exemple, cet actif tend à délivrer des paiements instantanés élevés lorsque la consommation est faible ($\sigma_{CF} < 0$), il constitue une protection contre le risque de consommation. Dès lors, son taux de rendement espéré doit être inférieur au taux sans risque, et d'autant plus que l'aversion absolue pour le risque est élevée.

On voit que l'indépendance de la fonction d'utilité vis-à-vis des variables d'état simplifie considérablement le problème de l'évaluation des actifs financiers : il n'est plus nécessaire de considérer $K + 1$ caractéristiques de cet actif (la covariance de son rendement avec la richesse et les K variables d'état), mais une seule (la covariance de son rendement avec la consommation). Le modèle obtenu est un modèle du type « CAPM intertemporel avec consommation » (ICCAPM), comme celui de Breeden et Litzenberger [1978], et de Breeden [1979].

3.2.2 Le taux d'impatience est constant

Combinant la contrainte posée par l'hypothèse précédente et la constance du taux d'impatience, on écrit

$$U(C, \tau) = e^{-\rho\tau} u(C(\tau)), \quad (3.14)$$

où $\rho > 0$ désigne le taux de préférence pure pour le présent, appelé encore « taux d'impatience ». Le terme ρ désigne le taux utilisé par l'individu pour actualiser l'utilité de la consommation future. La constance de ρ s'interprète de la façon suivante. Considérons un individu cherchant à évaluer une consommation à l'instant τ . Le facteur d'actualisation, appliqué à $u(C(\tau))$, est $\eta \equiv e^{-\rho\tau}$. Si maintenant l'individu évalue une consommation deux fois plus lointaine, il appliquera un facteur égal à η^2 . Ainsi, la dépréciation de l'utilité avec le temps, due à la préférence pour le présent, se fait au même taux pour chaque portion de temps de longueur identique. Avec un taux d'impatience constant, l'individu ne marque aucune préférence particulière pour certains instants futurs.

Soit μ_C et σ_C^2 l'espérance et la variance du changement de la consommation optimale par unité de temps. On démontre la proposition suivante.

Proposition 2 *Lorsque la fonction d'utilité est décrite par (3.14), le taux d'intérêt instantané d'équilibre est*

$$r = \rho + \left(-\frac{U_{CC}}{U_C}\right) \mu_C - \frac{1}{2} \left(\frac{U_{CCC}}{U_C}\right) \sigma_C^2. \quad (3.15)$$

Preuve :

À l'instar de la fonction d'utilité, l'utilité marginale est indépendante des états : $U_C = U_C(C, \tau)$.

Par Itô, on obtient donc

$$\mathcal{L}[U_C] = U_{C\tau} + \mu_C U_{CC} + \frac{1}{2} \sigma_C^2 U_{CCC}. \quad (3.16)$$

Introduisant la condition d'enveloppe $U_C = J_W$ dans l'expression du taux d'intérêt fournie par le corollaire 1, il vient

$$r = \left(-\frac{U_{C\tau}}{U_C}\right) + \left(-\frac{U_{CC}}{U_C}\right) \mu_C - \frac{1}{2} \left(\frac{U_{CCC}}{U_C}\right) \sigma_C^2. \quad (3.17)$$

De (3.14), on tire $U_C = e^{-\rho\tau} u_C$, $U_{C\tau} = -\rho\tau e^{-\rho\tau} u_C$, et donc $-U_{C\tau}/U_C = \rho$. Combinée avec (3.17), cette dernière égalité implique (3.15).

CQFD.

Si, comme Breeden [1986], on suppose que le coefficient d'aversion absolue pour le risque décroît avec le niveau de la consommation (ce qui est raisonnable), la proposition 2 permet d'analyser fort simplement les liens entre taux d'intérêt, préférence pour le présent, et consommation.

En premier lieu, (3.15) indique que le taux d'intérêt d'équilibre est relié positivement au taux d'impatience. En effet, plus la préférence pour le présent est forte, plus le taux d'intérêt doit être fort afin d'inciter les individus à retarder leur consommation dans le temps. En second lieu, le taux d'intérêt apparaît positivement lié à la croissance anticipée de la consommation. Si une forte croissance est anticipée, on s'attend à une faible utilité marginale de la consommation (car $U_{CC} < 0$). La consommation « demain » est donc peu attirante, et les agents qui retardent leur consommation exigent une compensation. En dernier lieu, le taux d'intérêt est relié négativement à la variance de l'évolution de la consommation. Ceci provient du fait que la décroissance de l'aversion absolue pour le risque implique $U_{CCC} > 0$.²⁵ Un individu à aversion absolue pour le risque décroissante, constatant une forte volatilité de la consommation, s'attend à une forte utilité marginale de la consommation, et peut donc se contenter d'un taux d'intérêt faible. En effet, la forte incertitude qui plane sur la consommation future est, en soi, une raison de retarder sa consommation.

3.2.3 L'utilité est isoélastique

On pose

$$U(C, \tau) = e^{-\rho\tau} \left[\frac{C(\tau)^\gamma - 1}{\gamma} \right] \tag{3.18}$$

avec $0 < \gamma < 1$. La caractéristique essentielle des fonctions d'utilité isoélastiques est d'exhiber un coefficient d'aversion relative pour le risque constant : on a $U_C = e^{-\rho\tau} C^{\gamma-1}$, $U_{CC} = (\gamma - 1) e^{-\rho\tau} C^{\gamma-2}$,

²⁵Le coefficient d'aversion absolue est $AAR \equiv -U_{CC}/U_C$. Sa décroissance avec C s'écrit $AAR_C < 0$. On déduit alors $AAR_C < 0 \iff -(U_{CCC}U_C - U_{CC}^2)/U_C^2 < 0 \iff -U_{CCC}U_C + U_{CC}^2 < 0 \iff -U_{CCC}U_C < 0 \iff -U_{CCC} > 0$ car $U_C > 0$. En définitive, le coefficient (U_{CCC}/U_C) dans (3.15) est positif.

et le coefficient d'aversion relative est donc

$$\left(-\frac{CU_{CC}}{U_C}\right) = 1 - \gamma. \quad (3.19)$$

La principale conséquence de (3.18) est la suivante.

Proposition 3 *Lorsque la fonction d'utilité est décrite par (3.18), les parts optimales d'actifs risqués, les primes des facteurs technologiques, ainsi que le taux d'intérêt instantané, ne dépendent plus de la richesse.*

Preuve :

Ceci provient du fait que la fonction d'utilité indirecte J , solution de l'équation différentielle partielle issue de l'équation de Bellman, prend la forme caractéristique suivante :²⁶

$$J(W, \mathbf{Y}, \tau) = f(\mathbf{Y}, \tau)U(W, \tau) + g(\mathbf{Y}, \tau) \quad (3.20)$$

où f et g désignent deux fonctions qui ne dépendent pas de W . On calcule alors $J_W = fe^{-\rho\tau}W^{\gamma-1}$, $J_{WW} = f(\gamma-1)e^{-\rho\tau}W^{\gamma-2}$, $\mathbf{J}_{WY} = \mathbf{f}_Y e^{-\rho\tau}W^{\gamma-1}$ et donc

$$\left(-\frac{J_W}{J_{WW}}\right) = \frac{W}{1-\gamma} \quad (3.21)$$

$$\left(-\frac{\mathbf{J}'_{WY}}{J_{WW}}\right) = \frac{\mathbf{f}'_Y}{f} \times \frac{W}{1-\gamma}. \quad (3.22)$$

Introduisant ces valeurs dans l'équation des parts optimales, on obtient

$$\mathbf{w}^* = \frac{1}{1-\gamma} (\delta\delta')^{-1} (\boldsymbol{\alpha} - r\mathbf{1}) + \frac{1}{1-\gamma} (\delta\delta')^{-1} \delta\boldsymbol{\sigma}' \frac{\mathbf{f}'_Y}{f}, \quad (3.23)$$

et \mathbf{w}^* est bien indépendant de W . Introduisant maintenant $(-J_{WW}/J_W) = (\gamma-1)W$ et $(-\mathbf{J}'_{WY}/J_W) = -\mathbf{f}'_Y/f$ dans l'expression de $\boldsymbol{\lambda}_Y$ donnée par le théorème 2, il vient

$$\boldsymbol{\lambda}_Y = (\gamma-1) \mathbf{w}_Q^* \delta_Q \boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}_Y^2 \frac{\mathbf{f}'_Y}{f}. \quad (3.24)$$

²⁶Voir, par exemple, Cass et Stiglitz [1970], Hakansson [1970] ou Merton [1971].

À l'équilibre, la propriété d'indépendance concerne également les primes des facteurs \mathbf{Y} . Enfin, utilisant le théorème 1, le taux d'intérêt instantané s'écrit

$$r = \mathbf{w}_Q^* \alpha_Q - (\gamma - 1) \mathbf{w}_Q^* \delta_Q \delta_Q' \mathbf{w}_Q^* - \mathbf{w}_Q^* \delta_Q \sigma' \frac{\mathbf{f}'_Y}{f}. \quad (3.25)$$

CQFD.

Ainsi, quel que soit son niveau de richesse, l'individu consacre la même part de ses ressources à chacun des actifs risqués. Cette indépendance entre le comportement de placement et la richesse se propage à des variables essentielles du modèle.

L'intérêt de ces simplifications apparaît lorsqu'on examine l'équation fondamentale de structure par terme, livrée par le théorème 4. On constate que le prix $P(W, \mathbf{Y}, t, s)$ d'un bon sans coupon dépend de la richesse W , dans la mesure où r et λ_Y en dépendent.²⁷ Ce n'est pas le cas ici, et on peut donc poser $P(W, \mathbf{Y}, t, s) \equiv P(\mathbf{Y}, t, s)$, ce qui implique $P_W = 0$, $P_{WW} = 0$ et $\mathbf{P}'_{WY} = \mathbf{0}$. L'équation fondamentale de structure par terme s'écrit donc

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_Y^2 \mathbf{P}_{YY}) + \mathbf{P}_Y (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}_Y) - rP + P_t = 0. \quad (3.26)$$

Ainsi, lorsque la fonction d'utilité est isoélastique, le facteur W sort de l'équation de structure par terme, et on retrouve exactement l'équation issue du modèle d'arbitrage à K facteurs. De ce fait, la prime de terme sur un bon s'exprime par²⁸

$$\Phi(\mathbf{Y}, t, s) = \frac{1}{P} \{ \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\lambda}_Y \}. \quad (3.27)$$

3.2.4 L'utilité est logarithmique

L'utilité logarithmique

$$U(C, \tau) = e^{-\rho\tau} \ln(C(\tau)) \quad (3.28)$$

²⁷On rappelle que les paiements contractuels associés à un bon ne dépendent pas de l'état de l'économie.

²⁸Il s'agit de l'équation (3.25) du modèle à K facteurs. On rappelle que $\mathcal{L}[P] = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_Y^2 \mathbf{P}_{YY}) + \mathbf{P}'_Y \boldsymbol{\mu} + P_t$ est, par définition, l'espérance du changement instantané de P par unité de temps. L'équation (3.26) s'écrit donc sous la forme $\mathcal{L}[P] - \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\lambda}_Y - rP = 0$, soit encore $\mathcal{L}[P]/P - r = \{ \mathbf{P}_Y \boldsymbol{\lambda}_Y \}/P$. Le membre gauche de cette dernière égalité est le taux de rendement espéré sur le bon, au-delà du taux sans risque, ce qui est bien la définition de la prime instantanée Φ .

constitue un cas limite de l'utilité isoélastique (3.18). Il suffit de poser $\gamma \rightarrow 0$. En théorie, le choix de cette fonction d'utilité est discutable, du fait que le logarithme n'est pas borné supérieurement, et n'échappe donc pas à des paradoxes du type « Saint-Petersbourg ».²⁹ Pourtant, ce type de fonction est largement utilisé en finance, du fait qu'il simplifie considérablement les modèles. En réalité, la quasi-totalité des modèles de structure des taux, issus du modèle d'équilibre général de Cox, Ingersoll et Ross, postulent que l'utilité est logarithmique.³⁰

À l'instar de l'utilité isoélastique, l'utilité logarithmique exhibe un coefficient d'aversion relative pour le risque constant. Il est, ici, égal à l'unité :

$$\left(-\frac{CU_{CC}}{U_C} \right) = 1. \quad (3.29)$$

De plus, la solution en J est de la forme³¹

$$J(W, \mathbf{Y}, \tau) = f(\tau) \ln(W(\tau)) + g(\mathbf{Y}, \tau), \quad (3.30)$$

²⁹La fonction d'utilité logarithmique est soumise au paradoxe suivant : considérons un jeu de pile ou face répété, qui donne x_n francs si pile sort pour la première fois au n -ième coup. Cette loterie l est évaluée par l'individu rationnel suivant le critère de l'espérance de l'utilité :

$$U(l) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} u(x_n).$$

Si $u(\cdot)$ n'est pas bornée, on peut construire une loterie telle que $u(x_n) = 2^n$, et on trouve alors $U(l) = +\infty$. Les agents sont prêts à donner une infinité de francs pour cette loterie.

³⁰De ce point de vue, le modèle de Sundaresan [1983] constitue une exception. Sundaresan pose que l'utilité est une exponentielle, de la forme

$$U(C, \tau) = e^{-\rho\tau} \left\{ \frac{-e^{\gamma C}}{\gamma} \right\},$$

où $\gamma > 0$ est le coefficient d'aversion absolue pour le risque. Ce choix pose également problème : lorsque C tend vers 0, $u'(C)$ ne tend pas vers l'infini. De ce fait, les cas de consommation non-positive ne peuvent être exclus.

³¹Lorsque J est de la forme (3.30), l'équation en J s'écrit

$$0 = e^{-\rho\tau} (-\rho\tau + \ln W - \ln f) + f_\tau \ln W + g_\tau + f \left(w^* (\alpha - r1) + r \right) - e^{-\rho\tau} \\ - \frac{1}{2} (-f) w^* \delta \delta' w^* + g'_Y \mu + \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma_Y^2 g_{YY}),$$

soit

$$0 = \{e^{-\rho\tau} + f_\tau\} \ln W + A$$

où A est un terme indépendant de W . Pour que cette équation soit vérifiée, on doit avoir $\{e^{-\rho\tau} + f_\tau\} = 0$ et $A = 0$. L'équation (3.31) est la solution de l'équation $f_\tau = -e^{-\rho\tau}$, sous la condition terminale $f(t') = 0$.

avec

$$f(\tau) = \frac{1}{\rho} \left\{ e^{-\rho\tau} - e^{-\rho t'} \right\}. \quad (3.31)$$

La conséquence essentielle de l'utilité logarithmique apparaît en posant $\gamma = 0$ et $\mathbf{f}_Y = \mathbf{0}$ dans l'équation (3.23) des parts optimales. On obtient l'expression très simple

$$\mathbf{w}^* = (\delta\delta')^{-1} (\boldsymbol{\alpha} - r\mathbf{1}). \quad (3.32)$$

On voit que le terme exprimant la demande d'actifs motivée par le soucis de se protéger contre les risques technologiques, disparaît. Ainsi, l'individu ne se préoccupe plus du risque spécifiquement intertemporel, et agit comme s'il allait mourir prochainement. En d'autres termes, l'individu à utilité logarithmique est caractérisé par un horizon ne dépassant pas l'instant présent : il est, en quelque sorte, « myope », ou, tout du moins, *neutre vis-à-vis du risque technologique*.

Sa politique de consommation est également fort simple. Utilisant la condition d'enveloppe, on montre facilement que

$$C^*(\tau) = \left\{ \frac{\rho}{1 - e^{-\rho(t'-\tau)}} \right\} W(\tau). \quad (3.33)$$

On reconnaît la solution d'un modèle de portefeuille en temps continu, développé par Merton [1969, équations (28) et (29) pp.250–251]. Dans ce modèle, Merton utilise une fonction logarithmique, mais ne prend en compte aucune incertitude intertemporelle. Ceci montre que l'hypothèse d'utilité logarithmique conduit à un appauvrissement significatif de l'analyse intertemporelle.³²

Le taux d'intérêt d'équilibre (3.25) s'écrit maintenant

$$r = \mathbf{w}^{*'} \boldsymbol{\alpha}_Q - (\gamma - 1) \mathbf{w}_Q^{*'} \boldsymbol{\delta}_Q \boldsymbol{\delta}'_Q \mathbf{w}_Q^*. \quad (3.34)$$

³²Comme nous l'avons signalé, Sundaresan [1983] pose une fonction d'utilité exponentielle, qui n'implique aucune myopie de la part des individus. Mais, comme Merton, son modèle ne prend pas en compte l'incertitude intertemporelle.

En combinant (3.32), exprimée à l'équilibre, et cette dernière équation, on peut calculer le taux d'intérêt en fonction uniquement des paramètres technologiques :

$$r = \left(\frac{\mathbf{1}' (\delta_Q \delta_Q')^{-1} \alpha_Q - 1}{\mathbf{1}' (\delta_Q \delta_Q')^{-1} \mathbf{1}} \right). \quad (3.35)$$

De même, le vecteur des primes λ_Y est

$$\lambda_Y = w^* \delta_Q \sigma'. \quad (3.36)$$

3.3 Contraintes sur la technologie

Trois hypothèses relatives à la technologie permettent d'obtenir le modèle à un facteur de Cox, Ingersoll et Ross.

3.3.1 Il existe une seule variable d'état

Lorsque $K = 1$, le vecteur \mathbf{Y} se réduit à une variable Y . Sa dynamique est notée

$$dY(t) = \mu_Y(Y, t) dt + \sigma_Y(Y, t) dz(t). \quad (3.37)$$

$1 \times (N+1) \quad (N+1) \times 1$

Dans le cas général, cette spécification conduit à un modèle de structure des taux à deux facteurs : la richesse et cet état Y . Toutefois, l'hypothèse de l'utilité isoélastique élimine W des facteurs explicatifs de la structure des taux.³³

³³Les modèles d'équilibre général à deux facteurs sont assez rares. On peut citer le modèle « taux court et inflation » de Cox, Ingersoll et Ross [1985b], et le modèle « taux court et volatilité du taux court » de Longstaff et Schwartz [1992].

3.3.2 La moyenne et la variance du taux de rendement physique sont proportionnelles à l'état

Conservant l'hypothèse précédente, la dynamique du rendement des processus productifs s'écrit sous la forme :

$$dQ(t) = \underset{N \times 1}{I_Q} \underset{N \times N N \times 1}{\bar{\alpha}_Q} Y dt + \underset{N \times N N \times (N+1)}{I_Q} \underset{(N+1) \times 1}{\bar{\delta}_Q} \sqrt{Y} dz(t) \quad (3.38)$$

où le vecteur $\bar{\alpha}_Q$ et la matrice $\bar{\delta}_Q$ sont composés uniquement de constantes. On suppose, en outre, que $\bar{\alpha}_Q$ et $\bar{\delta}_Q$ sont tels que $\mathbf{1}' (\bar{\delta}_Q \bar{\delta}_Q')^{-1} \bar{\alpha}_Q > 1$. Comme le notent Cox, Ingersoll et Ross, la spécification (3.38) assure que, ni l'espérance, ni la variance des taux de rendement sur l'investissement physique, ne domineront les choix de portefeuille pour de grandes valeurs de Y .³⁴

Croisons maintenant les hypothèses précédentes. Nous admettons donc, d'une part, que la fonction d'utilité de l'individu représentatif est de la forme $e^{-\rho\tau} \ln(C(\tau))$, et, d'autre part, que la moyenne et la variance des taux de rendement des processus physiques sont proportionnels à l'unique variable d'état.

On montre alors que le taux d'intérêt est *proportionnel* à Y . Pour cela, on introduit $\alpha_Q = \bar{\alpha}_Q Y$ et $\delta_Q = \bar{\delta}_Q \sqrt{Y}$ dans (3.35), et on obtient

$$r = \bar{r} \times Y \quad \text{avec} \quad \bar{r} = \left(\frac{\mathbf{1}' (\bar{\delta}_Q \bar{\delta}_Q')^{-1} \bar{\alpha}_Q - 1}{\mathbf{1}' (\bar{\delta}_Q \bar{\delta}_Q')^{-1} \mathbf{1}} \right) > 0. \quad (3.39)$$

Le coefficient \bar{r} est une constante. Cette stricte proportionnalité entre r et Y nous permet d'identifier le risque dû aux variations de Y , et le risque de taux d'intérêt, dans l'esprit du modèle d'arbitrage à un facteur exposé dans le chapitre précédent. Pour montrer que la correspondance est étroite, on calcule $P_Y = \bar{r} P_r$ et $P_{YY} = \bar{r}^2 P_{rr}$. Introduisant les notations de proportionnalité $\sigma^2 \equiv \bar{r}^2 \sigma_Y^2$, $\mu \equiv \bar{r} \mu_Y$ et $\lambda_r \equiv \bar{r} \lambda_Y$, l'équation fondamentale de structure par terme s'écrit

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} + (\mu - \lambda_r) P_r - r P + P_t = 0, \quad (3.40)$$

ce qui est *exactement* l'équation de structure par terme du modèle d'arbitrage, dans lequel le seul facteur est le taux d'intérêt instantané.

³⁴Des spécifications plus complexes sont proposées par Sundaresan [1984] et Longstaff [1989].

3.3.3 La variable d'état suit un processus « racine carrée »

Dans ce cas, la dynamique (3.37) s'écrit

$$dY(t) = \bar{\kappa} (\bar{\theta} - Y(t)) dt + \underbrace{\bar{\sigma}'}_{1 \times (N+1)} \underbrace{\sqrt{Y(t)} dz(t)}_{(N+1) \times 1}, \quad (3.41)$$

où $\bar{\kappa}, \bar{\theta}$ désignent des constantes strictement positives, et où $\bar{\sigma}$ est un vecteur $(N+1) \times 1$, constant. Comme r est proportionnel à Y , on doit s'attendre à ce que la dynamique de r suive également un processus de ce type. D'après (3.39) et (3.40), on peut en effet écrire

$$dr = \kappa (\theta - r) dt + \sigma \sqrt{r} dz, \quad (3.42)$$

avec $\kappa \equiv \bar{\kappa} > 0$, $\theta \equiv \bar{r}\bar{\theta} > 0$, et z désigne un processus de Wiener unidimensionnel, tel que $\sigma dz \equiv \sqrt{r} \bar{\sigma}' dz(t)$. On retrouve donc le processus du taux court décrit dans le chapitre précédent, mais dérivé ici *de façon endogène*.

Toutefois, le modèle obtenu est différent : la prime unitaire λ_r , associée au risque de taux, n'est pas ici constante, mais proportionnelle au niveau du taux d'intérêt. Pour le montrer, on constate, dans un premier temps, que la prime λ_Y , associée au facteur Y , est proportionnelle à Y . En effet, comme $\sigma_Y(Y, t) = \bar{\sigma} \sqrt{Y}$, l'équation (3.36) permet d'écrire

$$\lambda_Y = \bar{\lambda} \times Y \quad \text{avec} \quad \bar{\lambda} = \left((\bar{\alpha}'_Q - \bar{r}\mathbf{1}') (\bar{\delta}_Q \bar{\delta}'_Q)^{-1} \bar{\delta}_Q \bar{\sigma}' \right). \quad (3.43)$$

Combinant maintenant la notation $\lambda_r \equiv \bar{r}\lambda_Y$ avec $\lambda_Y = \bar{\lambda}Y$ et $r = \bar{r}Y$, il vient

$$\lambda_r = \bar{\lambda} \times r. \quad (3.44)$$

Pour confirmer que λ_r représente bien la prime unitaire de risque de taux, on utilise $P_Y = \bar{r}P_r$ pour exprimer (3.27) sous la forme

$$\Phi(r, t, s) = \bar{\lambda} \times r \times \frac{P_r}{P}. \quad (3.45)$$

Comme $(dP/P)/(dr/r) \equiv rP_r/P$, cette équation signifie que la prime de terme instantanée sur un bon est proportionnelle à l'élasticité du prix de ce bon par rapport au taux d'intérêt.

Nous disposons donc d'un modèle d'équilibre général de structure des taux, dans lequel les paramètres κ , θ et σ du processus suivi par le taux court, ainsi que le coefficient de proportionnalité $\bar{\lambda}$ de la prime de risque de taux, s'expriment en fonction des paramètres technologiques, exogènes à l'économie. Clairement, ce modèle détermine, de façon endogène, les différents paramètres qu'il nous a fallu spécifier pour obtenir un modèle d'arbitrage explicite. Si on conserve uniquement l'équation de structure par terme (3.40), la dynamique du taux (3.42), et la forme de la prime unitaire (3.44), on obtient un modèle tout à fait similaire à un modèle d'arbitrage, mais consistant avec un équilibre général, et garantissant l'absence, à l'équilibre, d'opportunité de gain sans risque.³⁵

3.4 Analyse de la solution fermée

Ce modèle d'équilibre général à prime proportionnelle peut être analysé suivant une démarche identique à celle mise en œuvre pour examiner un modèle d'arbitrage.³⁶ Pour cela, il nous faut résoudre l'équation différentielle partielle

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r P_{rr}(\kappa(\theta - r) - \bar{\lambda}r)P_r - rP + P_t = 0 \quad (3.46)$$

sous la condition terminale $P(r, s, s) \equiv 1$. Adaptant la preuve donnée en annexe A.3, page 147, on obtient aisément

$$P(r, t, s) = \exp \{A(T)r + B(T)\}, \quad (3.47)$$

avec

$$\begin{aligned} A(T) &= \frac{-2(e^{vT} - 1)}{C(T)} \\ B(T) &= \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \ln \left\{ \frac{2v \exp \left\{ \frac{\kappa + \bar{\lambda} + v}{2} T \right\}}{C(T)} \right\} \end{aligned} \quad (3.48)$$

³⁵Ceci laisse entrevoir la possibilité d'une démarche « inverse », consistant à chercher des spécifications d'équilibre général, qui permettent de retrouver un modèle d'arbitrage donné. Ainsi, Campbell [1986] expose un modèle d'équilibre, qui justifie le modèle d'arbitrage à un facteur de Vasicek [1977].

³⁶Pour des tests empiriques du modèle à un facteur de Cox, Ingersoll et Ross, voir Brown et Dybvig [1986] et Longstaff [1989].

$$\begin{aligned} C(T) &= (\kappa + \bar{\lambda} + v)(e^{vT} - 1) + 2v \\ v &= \sqrt{(\kappa + \bar{\lambda})^2 + 2\sigma^2}, \end{aligned}$$

où $T \equiv s - t$ désigne la maturité du bon.

Examinant le signe de ces divers éléments, ainsi que leurs dérivées par rapport aux paramètres significatifs du modèle, on exhibe un certain nombre de relations intéressantes. En premier lieu, on obtient³⁷

$$P_r < 0 \qquad P_t > 0 \qquad P_T < 0. \qquad (3.49)$$

La relation $P_r < 0$ indique que le prix $P(r, s, t)$ d'un bon est une fonction décroissante du taux court. La relation $P_t > 0$ montre que le prix d'un bon (au départ inférieur à sa valeur faciale unitaire) va croître durant toute sa vie, jusqu'à rejoindre la valeur 1 à maturité. L'inégalité $P_T < 0$ indique que la structure des prix est uniformément décroissante avec la maturité.

En second lieu, on obtient

$$P_\theta < 0 \qquad P_\kappa > 0 \quad \text{si } r > \theta \qquad P_\kappa < 0 \quad \text{si } r < \theta. \qquad (3.50)$$

La première relation ci-dessus est liée au fait que θ s'interprète comme le niveau « moyen » du taux court. Les deux suivantes sont également issues des caractéristiques dynamiques du processus racine carrée : si, par exemple, le taux court est au-dessus de sa valeur moyenne θ , il aura tendance à y retourner, et ceci d'autant plus vite que κ est grand. Dans ce cas, plus κ est grand, plus la chute du taux est brutale, et le prix réagit donc positivement.

La dynamique du taux de rendement instantané sur un bon est décrite par

$$\frac{dP}{P} = \left\{ 1 + \bar{\lambda}A(T) \right\} r(t) dt + A(T)\sqrt{r(t)} \sigma dz. \qquad (3.51)$$

La variabilité du taux de rendement décroît avec le taux court, jusqu'à être nulle lorsque $r(t) = 0$. De plus, comme $A'(T) < 0$, cette variabilité décroît avec la maturité T .

³⁷Par exemple, $P_r < 0$ est déduit de $P_r = A(T)P$, $A(0) = 0$ et $A'(T) = -4v^2Te^{vT} < 0$ pour $T > 0$.

L'examen de la structure des taux $R(r, t, s) \equiv -\ln \{P(r, t, s)\} / T$ montre que celle-ci part, à gauche, de $r(t)$, et atteint un niveau $R(r, t, \infty) = 2\kappa\theta / (\kappa + \bar{\lambda} + v)$, constant, pour les maturités très lointaines. Si le taux court $r(t)$ est inférieur à $R(r, t, \infty)$, la structure des taux est monotone croissante. Si $r(t)$ est supérieur à $\kappa\theta / (\kappa + \bar{\lambda})$, elle est monotone décroissante. Si $r(t)$ se situe entre ces deux seuils, la structure est en cloche.

Jusqu'ici, nous nous sommes bornés à interpréter la solution fermée en des termes économique-ment neutres, comme nous l'avons fait lors de l'analyse des modèles d'arbitrage. L'apport spécifique de l'approche par l'équilibre général est maintenant examiné.

En premier lieu, on note que les relations de proportionnalité impliquent

$$\lambda_r = \bar{\lambda}r = \frac{1}{dt} \text{Cov} \left[dr, \frac{dW}{W} \right]. \quad (3.52)$$

Ainsi, la prime unitaire de risque de taux est égale à la covariance, par unité de temps, entre le changement du taux d'intérêt et le taux de variation de la richesse optimalement investie. Le signe de $\bar{\lambda}$ détermine le signe de cette covariance. Ceci permet d'interpréter l'équation (3.45), qui indique que la prime de terme Φ est positive pour tous les bons, si et seulement si le coefficient $\bar{\lambda}$ est négatif. En effet, comme P_r/P est négatif, $\bar{\lambda} < 0$ implique que les bons offrent de forts taux de rendement instantané lorsque la richesse est forte, et de faibles taux lorsque la richesse est faible. Dans ce cas, détenir des bons aggrave les risques, et les individus adverses au risque demanderont une prime positive, sous forme d'un supplément de rendement anticipé, pour accepter de les incorporer dans leurs portefeuilles.

À l'aide de la solution fermée, on montre également que

$$P_{\bar{\lambda}} > 0. \quad (3.53)$$

D'après (3.52), une forte valeur du paramètre de risque $\bar{\lambda}$ reflète une forte covariance entre taux d'intérêt et richesse. Si $\bar{\lambda}$ est effectivement élevé, $P_r < 0$ implique qu'il est plus probable que le prix des bons soient forts lorsque la richesse est faible, et donc fortement désirée. Enfin, on peut analyser

$$P_{\sigma^2} > 0. \quad (3.54)$$

Une forte volatilité du taux court révèle une grande incertitude sur la consommation future. Comme $U_{CCC} > 0$ lorsque $U(C, \tau) = e^{-\rho\tau} \ln(C)$, l'interprétation de Breeden [1986] exposée précédemment est valide : l'individu adverse au risque est disposé à payer plus cher un flux certain.

3.5 Conclusion

Cette section a été consacrée à l'étude du modèle d'équilibre général à un facteur de Cox, Ingersoll et Ross, dans l'optique de mettre en valeur la portée des diverses simplifications requises pour obtenir une solution fermée de structure des taux.

Pour cela, nous avons d'abord examiné l'hypothèse portant sur les préférences, à savoir l'hypothèse d'une fonction d'utilité logarithmique, à taux d'impatience constant. Progressant pas à pas, nous avons analysé les diverses conséquences de cette hypothèse. Dans un premier temps, posant l'autonomie de la fonction d'utilité par rapport aux variables d'état, nous avons montré que la covariance d'un actif avec la consommation caractérisait complètement cet actif, dans le sens où cette covariance s'avérait suffisante pour calculer son rendement espéré d'équilibre. Ainsi, l'autonomie de la fonction d'utilité place la consommation agrégée au centre du problème de l'évaluation. Dans un deuxième temps, nous avons ajouté à cette spécification la constance du taux d'impatience. Le taux d'intérêt instantané s'est avéré directement lié à ce taux d'impatience, ainsi qu'aux paramètres de la dynamique de la consommation. Dans un troisième temps, nous avons postulé que la fonction d'utilité était isoélastique. Dans ce cas, la politique de répartition de la richesse, décidée par un individu, est indépendante du niveau de ses ressources. Cette propriété s'est propagée dans le modèle, à un tel point que la structure des taux s'est avérée, elle-même, indépendante de la richesse. Dans un quatrième temps, la spécification finale de Cox, Ingersoll et Ross a été imposée. Sous hypothèse d'utilité logarithmique, le comportement des agents a pu être qualifié de comportement myope, du fait que ceux-ci décidaient de leur politique sans prendre en compte l'incertitude technologique, pertinente au-delà de l'instant présent. De ce fait, ce type de fonction d'utilité a été associé à un appauvrissement substantiel du modèle intertemporel d'équilibre économique général.

Nous avons ensuite examiné les hypothèses de Cox, Ingersoll et Ross relatives à la structure de l'incertitude de l'économie. Nous avons ainsi imposé que l'espérance et la variance des taux de rendement sur la production soient proportionnels à une unique variable d'état. Cette propriété de proportionnalité s'est étendue à un certain nombre de variables significatives, et il a été possible de

montrer que le facteur déterminant de la structure des taux, dans cette économie, était finalement le taux d'intérêt instantané. Supposant alors que la variable d'état obéissait à un processus de type « racine carrée », nous avons constaté, d'une part, que la prime unitaire de risque de taux était proportionnelle au niveau de taux court, et, d'autre part, que la dynamique de ce taux était également du type « racine carrée ».

Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross a ainsi montré qu'il pouvait générer, de façon endogène, des spécifications qui, dans le cadre de l'approche examinée dans le chapitre précédent, avaient été fixées arbitrairement. L'avantage du modèle à un facteur de Cox, Ingersoll et Ross est qu'il est consistant avec un équilibre général, et garantit l'absence de toute opportunité d'arbitrage. De plus, l'analyse de la solution fermée obtenue a montré qu'une interprétation économique de la structure des taux était possible.

Section 4 Un réexamen des théories traditionnelles, à la lumière de l'équilibre général

4.1 Introduction

Le modèle d'équilibre économique général place la structure des taux dans un environnement économique complet. Il montre comment la hiérarchie des taux résulte du comportement d'agents économiques rationnels, dans un univers où l'incertitude affecte à la fois la production et la technologie. Peut-on utiliser ces résultats pour analyser les théories traditionnelles de la structure des taux ?

Concernant la théorie pure des anticipations, on rappelle que le modèle d'arbitrage à K facteurs a permis de montrer que seule la version « locale » de cette théorie, affirmant la nullité des primes de terme instantanées, était susceptible d'être valide dans le cadre d'un équilibre économique. Les hypothèses de cette théorie, présentées au chapitre 1, sont parfaitement compatibles avec celles du modèle de Cox, Ingersoll et Ross. Nous pouvons donc utiliser ce cadre général de travail, afin d'examiner la validité de l'hypothèse locale. Dans la mesure où nous avons montré que la théorie des anticipations niait les fondements économiques de la hiérarchie des taux, on doit s'attendre à des conclusions plutôt négatives.

Concernant les théories traditionnelles avec prime, comme la théorie de Hicks ou de Modigliani et Sutch, on peut raisonnablement être plus optimiste : ces théories reconnaissent explicitement que les comportements individuels d'investissement influencent la structure des taux. Mais le modèle de Cox, Ingersoll et Ross est-il pour autant susceptible d'autoriser un réexamen complet de ces théories ? Nous verrons que quelques précautions s'imposent.

Dans cette section, nous examinons successivement la théorie pure des anticipations, puis les théories avec prime. Pour ce faire, nous nous référons essentiellement aux travaux de Cox, Ingersoll et Ross [1981], mais, également, à ceux de Merton [1973b].

4.2 La théorie pure des anticipations

Suivant Cox, Ingersoll et Ross [1981], nous examinons la validité de l'hypothèse locale des anticipations, dans le cadre du modèle d'équilibre économique général. Cet examen est parfaitement

justifié, du fait que les résultats obtenus par la théorie des anticipations ne sont, en aucun cas, liés à des hypothèses contradictoires avec celles du modèle général. Nous exprimons l'hypothèse locale pour une fonction d'utilité isoélastique, puis, comme cas particulier, examinons la fonction d'utilité linéaire. Ceci nous permet de déterminer, si, comme beaucoup l'ont affirmé, la théorie des anticipations est une conséquence naturelle de la neutralité vis-à-vis du risque. La réponse étant négative, nous cherchons à savoir si des conditions particulières, différentes de la neutralité, permettent de valider l'hypothèse locale.

4.2.1 Hypothèse locale des anticipations et utilité isoélastique

Dans le cadre du modèle général, l'information disponible à un instant donné est représentée par le couple (W, \mathbf{Y}) . Toutefois, nous savons que, lorsque l'utilité est isoélastique, le taux d'intérêt instantané, ainsi que l'ensemble de la structure des taux, sont indépendants de la richesse W . L'hypothèse locale, affirmant que le prix courant d'un bon est égal à l'espérance d'une unité de numéraire, actualisée au taux court, s'exprime donc sous la forme

$$P(\mathbf{Y}, t, s) = \mathbf{E}_{\mathbf{Y}, t} \left[\exp \left\{ - \int_t^s r(\mathbf{Y}, \tau) d\tau \right\} \right]. \quad (4.1)$$

Cette hypothèse est associée à la nullité des primes de terme instantanées. Dans le cas isoélastique, ces primes s'expriment par

$$\Phi(\mathbf{Y}, t, s) = \frac{P_Y}{P} \left\{ \left(- \frac{J_{WW}}{J_W} \right) \sigma_{WY} + \sigma_Y^2 \left(- \frac{J'_{WY}}{J_W} \right) \right\}. \quad (4.2)$$

Cette expression indique que la prime sur un bon se décompose en deux éléments. Un premier élément est une prime, offerte par le marché en fonction des capacités du bon à protéger contre l'évolution instantanée non-anticipée de la richesse optimalement investie (le portefeuille de marché). Un deuxième élément, spécifique aux modèles intertemporels, est lié au potentiel de protection offert par le bon contre les variations non-anticipées des opportunités de production.

4.2.2 Théorie pure et neutralité vis-à-vis du risque

Avant d'examiner les conséquences de la neutralité, on combine l'équation différentielle partielle en J (2.20) et l'équation du taux d'intérêt (2.30), extraites du modèle d'équilibre général. Il vient

$$0 = U(C^*, \mathbf{Y}, t) + J_t + (rW - C^*) J_W - \frac{1}{2} \sigma_W^2 J_{WW} + \mathbf{J}_Y \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\boldsymbol{\sigma}_Y^2 \mathbf{J}_{YY} \right). \quad (4.3)$$

Un individu est neutre vis-à-vis du risque lorsque sa fonction d'utilité est linéaire en la consommation. On écrira

$$U(C, t) = f(t)C(t). \quad (4.4)$$

Le coefficient d'aversion relative pour le risque $-CU_{CC}/U_C$ est bien nul.

Malgré les apparences, la fonction ci-dessus est difficile à étudier, du fait qu'elle n'est pas strictement concave. Dans ces conditions, le programme d'optimisation de l'individu représentatif ne mène pas forcément à une solution intérieure, telle qu'il consomme une quantité finie strictement positive du bien. Deux « solutions de coin » sont susceptibles d'apparaître : l'individu peut décider de ne pas consommer sur le prochain instant, ou encore de consommer toute sa richesse sur cet instant.

Étudions dans un premier temps le cas d'une solution intérieure. La condition d'enveloppe $J_W = U_C$ est ici respectée. Avec l'utilité donnée en (4.4), elle s'écrit $J_W = f$. Intégrant cette équation par rapport à W , on obtient la forme générale de la fonction J :

$$J(W, \mathbf{Y}, t) = f(t)W + g(\mathbf{Y}, t). \quad (4.5)$$

Cette équation implique $J_{WW} = 0$, $\mathbf{J}'_{WY} = \mathbf{0}$ et donc, par (4.2), $\Phi(\mathbf{Y}, t, s) = 0$. L'hypothèse locale des anticipations est bien valide. Toutefois, on montre qu'il s'agit en fait d'un cas trivial.

Introduisant les dérivées partielles $J_t = f_t W + g_t$, $J_W = f$ et $J_{WW} = 0$ dans l'équation différentielle partielle (4.3), on obtient après réarrangements

$$0 = \{f_t + rf\} W + \left\{ g_t + \mathbf{J}_Y \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\boldsymbol{\sigma}_Y^2 \mathbf{J}_{YY} \right) \right\}, \quad (4.6)$$

où les deux termes entre accolades sont indépendants de la richesse. Cette équation implique, en particulier, $f_t + rf = 0$, c'est-à-dire

$$r(\mathbf{Y}, t) = -\frac{f_t(t)}{f(t)}. \quad (4.7)$$

La fonction $f(t)$ étant indépendante des états \mathbf{Y} , cette dernière équation ne peut être satisfaite qu'à la condition que le taux d'intérêt soit non-stochastique, c'est-à-dire que $r(\mathbf{Y}, t) \equiv r(t)$. Ce résultat permet de résoudre (4.1) sous la forme

$$P(\mathbf{Y}, t, s) = \frac{f(s)}{f(t)}, \quad (4.8)$$

ce qui montre que les prix des bons sont également non-stochastiques : $P(\mathbf{Y}, t, s) \equiv P(t, s)$. Il est naturel que l'hypothèse locale soit vérifiée, dans un univers où la structure des taux est déterministe. On peut même affirmer que *toutes* les versions de la théorie des anticipations sont valides, parce qu'équivalentes. La situation décrite ici est, en quelque sorte, dégénérée, et la structure des taux relève finalement d'un simple principe d'arbitrage.

Pour illustrer le caractère trivial de cette situation, on peut, par exemple, imposer la constance du taux d'impatience, c'est-à-dire $f(t) = e^{-\rho t}$. On obtient immédiatement $r = \rho$, $P = e^{-\rho(s-t)}$ et donc $R = \rho$. La structure des taux est, dans ce cas, parfaitement plate.

Il nous reste maintenant à étudier les solutions de coin. Lorsque ce type de solution prévaut, l'individu se comporte de la façon suivante : pendant un certain laps de temps, il s'abstient de consommer et investit toute sa richesse, puis, à un moment qui dépend de l'état de l'économie, il décide de renverser sa politique, c'est-à-dire de consommer toute sa richesse en un seul instant. Le programme de l'individu détermine ici le moment précis de ce « changement de coin ». Il s'agit d'un problème de *temps d'arrêt optionnel*, qui peut être résolu à l'aide des techniques standards en la matière.³⁸ La solution de ce problème ne nous intéresse pas directement, et, suivant Cox, Ingersoll et Ross [1981], nous préférons examiner un problème connexe plus simple, mais suffisant pour statuer sur la validité de l'hypothèse locale.

Dans ce problème, le moment du renversement de politique est directement déterminé par la fonction d'utilité de l'investisseur. Imaginons que l'individu, neutre vis-à-vis du risque, ne souhaite

³⁸Voir Malliaris et Brock [Chapitre 1, section 8, et chapitre 2, section 13], et Roger [Chapitre 4, section 3.2].

consommer qu'à l'instant t' de sa mort. Sa fonction d'utilité est de la forme

$$U(C, t) = \begin{cases} C(t) & \text{si } t = t' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.9)$$

On pose donc $U = 0$ et $C^* = 0$ dans l'équation en J (4.3), et on obtient

$$0 = J_t + rW J_W - \frac{1}{2} \sigma_W^2 J_{WW} + \mathbf{J}_Y \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\boldsymbol{\sigma}_Y^2 \mathbf{J}_{YY} \right). \quad (4.10)$$

À l'instant t' , l'individu consomme toute sa richesse. La condition terminale permettant de déterminer la fonction J est donc $J(W, \mathbf{Y}, t') = W$. La fonction d'utilité J est alors de la forme³⁹

$$J(W, \mathbf{Y}, t) = f(\mathbf{Y}, t)W, \quad (4.11)$$

et la condition terminale sur $f(\mathbf{Y}, t)$ est donc $f(\mathbf{Y}, t') = 1$. Comme $J_{WW} = 0$, la prime de terme (4.2) se réduit à

$$\Phi(\mathbf{Y}, t, s) = \frac{P_Y}{P} \left\{ \boldsymbol{\sigma}_Y^2 \left(-\frac{J'_{WY}}{J_W} \right) \right\}. \quad (4.12)$$

Ceci montre que l'agent, neutre vis-à-vis du risque, ne se préoccupe pas du risque lié au portefeuille de marché, mais ne néglige pas, pour autant, le risque de changement des opportunités d'investissement. Contrairement à l'agent à fonction d'utilité logarithmique, l'agent à fonction d'utilité linéaire ne fait preuve d'aucune myopie de ce point de vue.

Pour montrer qu'il n'y a aucune raison de penser que la prime est nulle, on résout (4.10). Introduisant les dérivées partielles de (4.11) dans (4.10), on obtient alors l'équation différentielle en f suivante :

$$\frac{1}{2} \text{tr} \left(\boldsymbol{\sigma}_Y^2 \mathbf{f}_{YY} \right) + \mathbf{f}_Y \boldsymbol{\mu} + r f = 0. \quad (4.13)$$

Pour résoudre cette équation sous $f(\mathbf{Y}, t') = 1$, on peut, par exemple, utiliser la preuve du théorème 1 du modèle K facteurs. Comme $J_W = f$, on écrira finalement

$$J_W(W, \mathbf{Y}, t) = \mathbb{E}_{Y,t} \left[\exp \left\{ \int_t^{t'} r(\mathbf{Y}, \tau) d\tau \right\} \right]. \quad (4.14)$$

³⁹Il s'agit de la forme générale de la solution pour une fonction isoélastique, dans laquelle on a posé $g(Y, t) = 0$. Cette égalité peut être facilement démontrée, en résolvant l'équation différentielle correspondante sous $g(Y, t') = 0$.

L'utilité marginale de la richesse est donc égale, à chaque instant, à l'espérance du rendement terminal d'une unité de numéraire continûment réinvestie au taux court. Appliquant maintenant le corollaire 2 du modèle d'équilibre général au cas des bons sans coupon, il vient

$$\Phi(\mathbf{Y}, t, s) = -\frac{1}{dt} \text{Cov} \left[\frac{dP}{P}, \frac{dJ_W}{J_W} \right]. \quad (4.15)$$

La prime de terme est égale à l'opposé de la covariance par unité de temps entre le taux de rendement du bon et le taux de croissance de la valeur terminale espérée d'une unité investie au taux court, entre l'instant t et la date de consommation t' . L'équation (4.14) nous indique qu'il n'y a aucune raison particulière de penser que cette covariance est nulle, sauf à admettre que le taux d'intérêt instantané évolue de façon déterministe.

Ces résultats montrent clairement que, dans un univers véritablement incertain, l'hypothèse locale des anticipations ne peut, en aucun cas, être considérée comme une conséquence naturelle de la neutralité vis-à-vis du risque.

4.2.3 Les conditions de validité de la théorie pure sans hypothèse de neutralité

Comme la neutralité vis-à-vis du risque ne mène pas directement à l'hypothèse locale, on peut être tenté de chercher des conditions qui permettent de l'obtenir. Cox, Ingersoll et Ross [1981] exhibent deux situations telles que les primes de terme soient uniformément nulles.

Dans la première situation, la fonction d'utilité est indépendante des états, et la consommation est localement certaine. La proposition 1 de la section précédente indique que, lorsque la fonction d'utilité est autonome par rapport aux états, le rendement espéré sur un actif, au-delà du taux sans risque, est proportionnel à sa covariance avec la consommation agrégée :

$$(\alpha_F - r) F = \left(-\frac{U_{CC}}{U_C} \right) \sigma_{CF}. \quad (4.16)$$

Si la variation instantanée de la consommation est déterministe, la covariance σ_{CF} est nulle, et la prime de terme également. Toutefois, on ne voit pas quelles conditions pourraient rendre la consommation localement certaine.

Dans la deuxième situation, la fonction d'utilité est logarithmique, et les rendements sur le capital

physique ne sont pas corrélés avec les changements des variables d'état. Sous hypothèse d'utilité logarithmique, on sait que les primes associées aux états sont

$$\lambda_Y = w^{*'} \delta_Q \sigma', \quad (4.17)$$

et que ces primes sont les seules à intervenir dans Φ . Dès lors, si $\delta_Q \sigma' = \mathbf{0}$, les primes de terme sont nulles. Ce cas n'est pas réellement intéressant, dans la mesure où il fait disparaître la composante de risque spécifiquement intertemporelle.

Ainsi, ces deux situations sont obtenues sous des conditions non-triviales.⁴⁰

4.3 Les théories avec prime

Nous examinons maintenant les théories avec prime, comme la théorie de Hicks ou de Modigliani et Sutch. Un premier point indique que le modèle de Cox, Ingersoll et Ross est susceptible de réexaminer le comportement d'habitat, prêté par ces deux théories aux investisseurs. Un deuxième point montre que le risque spécifiquement intertemporel conduit les individus à se comporter d'une façon qui n'était pas prévue par ces théories.

4.3.1 Le comportement d'habitat

Dans le cadre des théories traditionnelles de la structure des taux, les primes sont conditionnées par la distribution des habitats sur l'échelle des maturités. On rappelle que, suivant Modigliani et Sutch, l'habitat d'un agent prêteur désigne la longueur de la période de temps pendant laquelle il dispose de fonds dont il n'a pas besoin, et l'habitat d'un agent emprunteur désigne la période sur laquelle il souhaite disposer d'un financement. Pour un prêteur par exemple, avoir un habitat égal à T signifie que, si les rendements espérés sur diverses stratégies sont identiques, ce prêteur achètera exclusivement des bons de maturité T , considérés comme « sûrs ». Toutefois, si le marché offre des primes suffisamment intéressantes sur les bons de maturité différente de T , il peut accepter d'acquérir ces bons, c'est-à-dire de quitter temporairement son habitat.

Hicks affirme que la préférence pour la liquidité confère aux prêteurs un habitat plutôt court, et

⁴⁰De plus, comme le montrent Mo Ahn et Thompson [1988, p.162], ces conditions n'impliquent plus le respect de l'hypothèse locale lorsqu'on prend en compte le risque de saut, négligé par Cox, Ingersoll et Ross.

que la nécessité de financer, de façon stable, un processus productif long, confère aux emprunteurs un habitat plutôt long. Bien que cette « faiblesse constitutionnelle » puisse être réduite par l'action de spéculateurs, qui accepteront d'emprunter court pour prêter long, ceux-ci exigeront une rémunération, pour être compensé des risques encourus par cette activité de transformation. De ce fait, Hicks conclut que la prime de terme sur un bon croît avec la maturité de ce bon, et donc que la structure des taux est structurellement croissante. Modigliani et Sutch, quant à eux, refusent l'idée d'une distribution des habitats aussi élémentaire. Pour eux, prêteurs et emprunteurs sont caractérisés par des habitats très divers, et la structure des primes peut donc prendre des formes très variées.

Dans quelle mesure le modèle d'équilibre général peut-il nous aider à réexaminer ces théories ? Compte tenu du fait que le modèle de Cox, Ingersoll et Ross est soumis à l'hypothèse d'homogénéité des individus, il n'est pas susceptible d'être utilisé pour examiner directement les conclusions de Hicks, c'est-à-dire la croissance des primes de terme. En effet, Hicks obtient ce résultat en confrontant des individus caractérisés par des comportements *a priori* contradictoires. De plus, les hypothèses relatives à la technologie font qu'il est impossible de modéliser un processus de production « long », nécessitant un financement stable. En réalité, on ne peut, comme Cox, Ingersoll et Ross, prétendre réinterpréter la théorie de Hicks à partir d'un modèle où tous les individus sont caractérisés par un habitat court. D'une manière générale, les théories traditionnelles avec prime s'expriment assez mal dans le cadre du modèle d'équilibre général.

Cela dit, ces théories peuvent être réexaminées du point de vue de ce qui fait la force du modèle général, à savoir l'analyse des comportements en incertitude. En particulier, on peut s'interroger sur le comportement attribué par ces théories à un prêteur caractérisé par un habitat spécifique. Dans le cadre d'un équilibre intertemporel, est-il raisonnable d'affirmer qu'un prêteur, adverse au risque, préférera toujours, à rendements espérés identiques, acquérir des bons dont la maturité correspond à son habitat ?

Pour examiner cette question, on suppose que l'individu représentatif, adverse au risque, ne souhaite consommer qu'à un instant précis du futur, qui définit strictement son habitat. Cet individu peut évaluer le risque et le rendement des stratégies en bons de diverses maturités. En particulier, il peut comparer la stratégie consistant à acquérir un bon correspondant à son habitat, et la stratégie consistant à réinvestir continûment, au taux court, jusqu'à la date de consommation. D'après la théorie de Modigliani et Sutch, le rendement espéré du bon correspondant à l'habitat doit être inférieur à celui de tous les autres. C'est ce que nous allons examiner maintenant, à travers un

exemple proposé par Cox, Ingersoll et Ross [1981].

4.3.2 Habitat et risque intertemporel

Comme précédemment, l'individu souhaite consommer uniquement à un instant t' . De plus, nous supposons pour simplifier que sa fonction d'utilité est de type isoélastique :

$$U(C, t) = \begin{cases} C(t)^\gamma / \gamma & \text{si } t = t' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.18)$$

où $1 - \gamma$ est égal au coefficient d'aversion relative pour le risque. Il n'existe qu'une seule technologie de production. Pour isoler les effets spécifiquement intertemporels, on admet également que les rendements instantanés du processus de production sont sans risque sur le moment présent, mais varie stochastiquement au cours du temps. De ce fait, l'économie est exclusivement soumise aux risques technologiques, et les primes offertes sur les bons ne peuvent provenir (comme dans le CAPM monopériodique) d'une quelconque covariance de leurs rendements avec le portefeuille de marché. Pour modéliser ceci, on posera, par exemple,

$$dQ(t) = Q(t)\alpha_Q(Y, t) dt, \quad (4.19)$$

où Y est une variable qui évolue conformément à un processus d'Itô. À l'équilibre, la richesse est totalement investie dans ce processus sans risque, et le taux d'intérêt sur l'investissement financier à court terme, « concurrent » de l'investissement productif, doit être égal au taux de rendement α_Q . Comme, par ailleurs, la consommation optimale C^* est nulle pour $t < t'$, la dynamique d'équilibre de la richesse est

$$dW = rW dt. \quad (4.20)$$

L'état courant de cette économie est parfaitement décrit par la richesse W et le taux de rendement α_Q , soit, de manière équivalente, par (W, r) . Le taux $r = \alpha_Q$ étant indépendant de la richesse, sa dynamique peut être représentée par la différentielle stochastique

$$dr(t) = \mu(r, t) dt + \sigma(r, t) dz(t). \quad (4.21)$$

La fonction d'utilité dérivée de la richesse dépend de l'information disponible. On écrira ici $J \equiv J(W, r, t)$. Utilisant ces spécifications, on adapte facilement (4.10). L'équation en J de l'individu à utilité terminale est donc

$$0 = J_t + rW J_W + J_r \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 J_{rr}. \quad (4.22)$$

Sous la condition terminale $J(W, r, t') = W^\gamma / \gamma$, la solution est de la forme $J(W, r, t) = f(r, t) W^\gamma / \gamma$. Introduisant les dérivées partielles de J dans (4.22), l'équation différentielle à résoudre est finalement

$$0 = J_t + \gamma r f + f_r \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 f_{rr}, \quad (4.23)$$

sous $f(r, t') = 1$. La solution f est donnée par

$$f(r, t) = \mathbb{E}_{r,t} \left[\exp \left\{ \gamma \int_t^{t'} r(\tau) d\tau \right\} \right]. \quad (4.24)$$

Ce résultat nous permet d'examiner le signe des primes de terme. En effet, en l'absence de risque de marché, cette prime est ici uniquement liée au risque de taux d'intérêt. Comme $J_{Wr} / J_W = f_r / f$, on a

$$\Phi(r, t, s) = -\frac{P_r}{P} \times \frac{f_r}{f} \times \sigma^2. \quad (4.25)$$

Par (4.24), on voit que $f > 0$ et que f_r est de même signe que γ . Comme $P > 0$ et $P_r < 0$, on conclut que le signe de la prime de terme instantanée sur n'importe quel bon est égale au signe du paramètre d'aversion γ .

Lorsque $\gamma = 0$, la fonction d'utilité est logarithmique. Comme nous l'avons montré précédemment, ce type de fonction caractérise un individu neutre vis-à-vis du risque intertemporel. Dans la situation présente, il n'y a pas de risque de marché, et l'agent juge donc équivalentes la stratégie d'investissement court renouvelé et la stratégie d'achat en bons de maturité $t' - t$, dans la mesure où leurs rendements espérés sont égaux. Ceci contredit la théorie de l'habitat, car le logarithme est une fonction concave, et l'individu est donc bien adverse au risque. Pour les individus dont l'aversion relative $1 - \gamma$ reste positive, mais inférieure à l'unité, les conclusions sont même inverses par

rapport à celles de la théorie de Modigliani et Sutch : comme $\gamma > 0$, les primes Φ sont positives, ce qui indique que l'individu préfère, à rendement espéré équivalent, le risque d'un investissement renouvelé à la certitude d'un bon de maturité égale à la date de consommation. Cet individu est attiré par le risque intertemporel. Seul le cas $\gamma < 0$, caractéristique d'un individu fortement adverse au risque, implique un comportement conforme à celui prédit par la théorie traditionnelle.

Clairement, ces résultats corroborent ceux obtenus précédemment, et montrent que le risque intertemporel est différent du risque instantané :

- Le risque instantané, ou risque de marché, est de nature additive : dans un portefeuille, les covariances instantanées, qui définissent le risque, s'ajoutent. La neutralité vis-à-vis de ce risque est exprimée par la fonction d'utilité linéaire ($\gamma = 1$), et l'aversion par une fonction « plus concave » que la fonction linéaire, c'est-à-dire tout simplement concave ($\gamma < 1$).
- Le risque intertemporel est de nature multiplicative : le risque d'un portefeuille se compose géométriquement lorsqu'il est détenu pendant plusieurs périodes. La neutralité vis-à-vis de ce risque multiplicatif est exprimée par la fonction d'utilité logarithmique ($\gamma = 0$), et l'aversion par une fonction plus concave que le logarithme ($\gamma < 0$).

De ceci, on déduit qu'il n'est pas possible d'être à la fois neutre vis-à-vis du risque de marché, et neutre vis-à-vis du risque technologique.⁴¹

L'exemple étudié ci-dessus montre clairement que la volonté de consommer à un instant précis du futur ne suffit pas à justifier qu'un individu soit prêt à accepter un rendement espéré plus faible que le taux sans risque sur le bon livrant, de façon certaine, un flux de paiement à cet instant. Pour obtenir un comportement conforme à celui évoqué par la théorie de l'habitat, il faut ajouter que cet individu manifeste une forte aversion pour le risque, suffisante pour le conduire à se protéger contre le risque de taux d'intérêt.⁴²

4.4 Conclusion

Dans cette section, le modèle d'équilibre général a été invoqué afin de réexaminer les théories traditionnelles de la structure des taux.

⁴¹Ceci explique les conclusions négatives obtenues lors de l'examen de la théorie des anticipations.

⁴²Ceci avait été initialement suggéré par Merton [1973b].

En premier lieu, la théorie pure des anticipations, déjà réduite à une version « locale » au terme d'un premier réexamen, conduit dans le chapitre précédent, a été sérieusement mise à mal. D'une part, il est apparu que, contrairement à une opinion largement répandue jusque dans les années soixante-dix, la proposition centrale de la théorie pure des anticipations ne pouvait être considérée comme une conséquence naturelle de la neutralité vis-à-vis du risque. Dans un cadre d'équilibre général intertemporel, un individu neutre vis-à-vis du risque de marché n'est pas neutre vis-à-vis du risque technologique. Cet individu va donc considérer la protection que les bons peuvent lui apporter contre l'éventualité d'une variation des opportunités d'investissement, et, de ce fait, les primes de terme ne seront, en général, pas nulles. D'autre part, il est apparu que des conditions, portant sur les préférences ou la dynamique de certaines variables de l'économie, pouvaient justifier l'hypothèse locale. Toutefois, ces conditions sont loin d'être triviales. En fin de compte, la théorie des anticipations peut être déclarée invalide en général. Ceci n'est pas étonnant, dans la mesure où les travaux de Cox, Ingersoll et Ross ont montré que la structure des taux relevait de considérations réellement économiques. La théorie des anticipations, tentant de couper ce lien économique en utilisant (abusivement) le principe d'arbitrage, s'est, en quelque sorte, engagée dans une impasse.

En second lieu, les théories traditionnelles avec prime ont été analysées. Ayant admis que le modèle de Cox, Ingersoll et Ross ne pouvait accueillir directement ces théories fondées sur la diversité des comportements, nous avons simplement réexaminé, dans un contexte intertemporel, le comportement d'habitat évoqué par la théorie de Modigliani et Sutch. De ce point de vue, il a été montré qu'un habitat de consommation devait être associé à une forte aversion pour le risque, pour pouvoir justifier qu'un individu accepte une rémunération espérée plus faible sur le bon correspondant à la date de consommation.

Section 5 Conclusion du chapitre 3

Nous avons présenté dans ce chapitre une approche de la structure des taux, fondée sur l'équilibre économique.

Dans un premier temps, le modèle d'équilibre général de Cox, Ingersoll et Ross [1985a] a été examiné. Dans ce modèle, les seules données exogènes sont les dotations initiales, les préférences individuelles et les technologies de production. Toutes les autres variables sont déterminées par l'équilibre entre offre et demande sur les divers marchés : la richesse, l'investissement, la consommation, et la valeur de tous les actifs financiers. Concernant la structure des taux, plusieurs résultats importants ont été obtenus. En premier lieu, une équation fondamentale d'évaluation des actifs financiers a été exhibée, puis spécialisée au cas des bons sans coupon. Une *équation fondamentale de structure par terme* a été ainsi obtenue. Ceci a permis de montrer que l'approche par l'équilibre général conduisait à des résultats formellement comparables à ceux obtenus au terme de l'approche par arbitrage. Toutefois, dans le modèle d'équilibre général, la dynamique du taux court, ainsi que les primes de facteur, s'expriment en fonction des variables fondamentales de l'économie, ce qui garantit la consistance du modèle. En second lieu, une interprétation économique des taux d'intérêt a été proposée sur la base d'une relation indiquant que le prix d'équilibre d'un bon sans coupon était égal à l'espérance du taux marginal de substitution entre richesse présente et richesse à échéance du bon. Un bon représente un moyen mis à la disposition des individus, afin de substituer de la consommation à divers instants, et la structure des taux courante reflète une situation telle que les individus ne ressentent plus le besoin d'opérer de telles substitutions.

Après avoir examiné ce modèle général, nous avons, dans un deuxième temps, opéré certaines particularisations, permettant de résoudre formellement l'équation fondamentale de structure par terme, et ainsi d'obtenir une solution explicite de structure des taux. Suivant Cox, Ingersoll et Ross [1985b], nous avons étudié un modèle d'équilibre général, dans lequel l'unique facteur pertinent pour déterminer la structure des taux s'avérait être le taux instantané. Ainsi, l'approche générale a montré qu'elle pouvait engendrer des modèles de structure des taux formellement similaires aux modèles explicites issus du modèle d'arbitrage à K facteurs, mais économiquement fondés. Toutefois, les hypothèses nécessaires à l'obtention d'une solution fermée, et en particulier les hypothèses concernant les préférences, ont été jugées responsables d'un appauvrissement significatif du modèle d'origine.

Enfin, le modèle d'équilibre général a été utilisé afin de réexaminer les théories traditionnelles de la structure des taux. En premier lieu, il a été montré que la théorie pure des anticipations était, dans le cas général, invalide. Ce résultat de Cox, Ingersoll et Ross [1981] est fondamental : il affirme l'inconsistance d'une théorie de la structure des taux qui a dominé la recherche pendant plusieurs décennies. Plus généralement, il souligne qu'il est illusoire de vouloir couper la structure des taux de ses fondements économiques réels. En second lieu, il a été montré qu'une réinterprétation du concept d'habitat, sous-jacent aux théories avec prime, était nécessaire. Toutefois, le modèle d'équilibre général ne s'est pas avéré susceptible de réexaminer véritablement ces approches.

En conclusion, nous pouvons attribuer à la théorie de l'équilibre général de la structure des taux le mérite de mettre en valeur, de façon claire et précise, le rôle joué par les actifs obligataires dans la gestion individuelle des risques. À partir du moment où on accepte l'idée selon laquelle une obligation puisse être utilisée à cette fin, et à moins de se porter explicitement en faux contre au moins une de ses hypothèses, le modèle de Cox, Ingersoll et Ross est le modèle pertinent en matière de structure des taux.

Chapitre 4

Structure des taux et incertitude économique : effet richesse et effet information en économie d'échange et de production

Section 1 Introduction

Les chapitres précédents ont témoigné des profonds bouleversements intervenus dans le champ théorique de la structure par terme des taux d'intérêt.

Jusqu'à la fin des années soixante-dix, deux approches « traditionnelles » cohabitent. D'un côté, la théorie des anticipations, dominante, affirme que les prévisions des investisseurs constituent le facteur déterminant essentiel, voire unique, de la hiérarchie des taux. De l'autre, diverses théories nuancent ou réfutent cette proposition, en soutenant que l'aversion pour le risque, manifestée par la plupart des agents, crée des préférences pour certaines maturités. La théorie de la segmentation affirme que ces préférences sont si fortes que les anticipations des agents ne jouent plus aucun rôle ; les théories des primes de terme, comme la théorie de la prime de liquidité ou la théorie de l'habitat préféré, moins extrêmes, soutiennent que l'aversion pour le risque est un facteur explicatif supplémentaire. Ces théories des primes sont toutes fondées sur l'idée que chaque agent est concerné par un horizon temporel spécifique.

Au cours des années quatre-vingts, trois contributions majeures de Cox, Ingersoll et Ross viennent perturber significativement ce paysage. En premier lieu, ces auteurs créent un modèle très général d'évaluation par arbitrage des bons sans coupon, pour montrer que cette approche est, en réalité, insuffisante pour aborder, d'un point de vue théorique, le problème de la structure des taux. En second lieu, Cox, Ingersoll et Ross proposent le premier modèle microéconomique d'équilibre général des taux d'intérêt, et parviennent à exhiber des équations reliant ces taux aux comportements individuels et aux variables fondamentales de l'économie. En dernier lieu, ils développent, à l'aide de ces deux modèles, une critique percutante de la théorie des anticipations, qui tend à montrer que les prévisions des investisseurs ne peuvent constituer le seul facteur explicatif de la structure par terme.

En somme, il apparaît que la structure des taux ne peut être traitée comme un problème purement financier, et relève au contraire d'une analyse véritablement économique.

Cette conclusion fondamentale souligne, en particulier, qu'il est important d'étudier avec soin l'attitude des agents vis-à-vis des actifs supports des taux d'intérêt, en fonction, d'une part, de la nature de l'incertitude qui affecte l'économie, et, d'autre part, des caractéristiques propres du comportement des agents.

Dans cette optique, le problème théorique central posé par la structure des taux est celui de la détermination des primes, exigées par les individus pour détenir les bons de diverse maturité.

Ceci conduit à s'interroger sur les raisons pour lesquelles un individu, adverse au risque, manifeste une préférence pour certaines maturités, et, au contraire, une répulsion pour d'autres. Cette question simple revient ainsi, grâce à Cox, Ingersoll et Ross, au cœur du débat.

Doit-on pour autant en conclure que les travaux de ces auteurs valident l'approche des théories traditionnelles des primes de terme ? Sans doute pas, car ce serait, en effet, négliger un enseignement essentiel de l'analyse microéconomique intertemporelle : les bons sont utilisés par les individus pour gérer au mieux leur consommation présente et future. Ils permettent de répartir *par substitution* le risque de consommation dans le temps. Or, les théories traditionnelles, comme la théorie de la prime de liquidité ou de l'habitat préféré, supposent que chaque individu se focalise totalement sur le risque de consommation à *un instant précis du futur*. De ce fait, ces théories sont incapables de prendre en compte l'effet, sur la structure des taux, des substitutions intertemporelles de consommation.

Pour conserver intact cet effet, il nous faut, au contraire, admettre qu'un individu envisage de consommer pendant toute sa vie, et se sent, en conséquence, concerné par le risque de consommation à chaque instant du futur.

Ainsi, plutôt que de travailler à partir de restrictions sur les préférences, Cox, Ingersoll et Ross nous invitent à étudier le problème des primes en relation avec l'environnement économique, et, en particulier, avec la structure de l'incertitude qui caractérise cet environnement. La question pertinente s'exprime alors de la façon suivante : comment l'environnement économique conditionne-t-il les préférences d'un individu quant aux différents titres supports de la structure des taux ? Plus précisément, on se demande s'il est possible d'exhiber des environnements particuliers, qui permettraient de justifier qu'un individu, adverse au risque et souhaitant consommer à tous moments, marque une préférence pour certaines maturités.

Ce problème, apparemment théorique, peut être interprété de façon très concrète. Imaginons, par exemple, qu'on puisse, dans un environnement économique empiriquement plausible, démontrer que cet individu est particulièrement attiré par les maturités courtes. Si cet agent représente bien la population dans son ensemble, on peut être sûr que les obligations longues se verront affectées d'une prime positive. Dans ce cas, nous disposerions d'un argument tendant à montrer que

la structure des taux est *structurellement croissante*. Potentiellement, cette approche permet donc d'obtenir des propositions très concrètes, comparables à celles qui sont avancées par les théories traditionnelles des primes, mais intégrant les effets des substitutions intertemporelles de consommation.

Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, qui inspire une telle démarche, est-il pour autant un instrument d'analyse idéal en la matière ? On pourrait le penser, dans la mesure où ce modèle s'est montré très général, et en même temps capable de générer une grande variété de modèles explicites. Pourtant, deux remarques nous incitent à modérer cet *a priori* positif.

La première remarque, d'ordre méthodologique, a trait aux difficultés intrinsèques d'une analyse des primes dans le cadre formel du modèle d'équilibre général.

Ce modèle est en effet construit dans l'objectif de faciliter l'obtention d'une solution explicite de structure des taux. Le calcul stochastique est bien adapté à cet objectif. Il permet notamment d'associer l'obtention d'une solution fermée à la résolution d'équations différentielles partielles et ordinaires. Ainsi, pour créer un modèle explicite de structure des taux, il suffit de particulariser le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, de telle façon à ce qu'il devienne possible de résoudre ces équations, à l'aide de techniques mathématiques standards.

Hélas, ces techniques étant ce qu'elles sont, les particularisations requises sont importantes. Les modèles explicites, présentés dans le troisième chapitre, montrent bien que les difficultés formelles conduisent à émettre des hypothèses restrictives *à la fois* sur les processus stochastiques qui gouvernent l'évolution des variables d'état, et sur la forme de la fonction d'utilité de l'individu représentatif. Ainsi, par exemple, Cox, Ingersoll et Ross parviennent à une solution, dans le cadre d'un modèle à un facteur, en admettant que l'unique variable d'état suit un processus « racine carrée », *et* que la fonction d'utilité est logarithmique. De ce fait, les primes obtenues résultent à la fois des restrictions imposées à la structure de l'incertitude (le processus « racine carrée »), et de la forme précise imposée aux préférences individuelles (l'utilité logarithmique, synonyme de *myopie*).

Dans ces conditions, il devient difficile de tirer des conclusions un tant soit peu générales en matière de primes. Parce qu'il permet d'obtenir aisément des solutions fermées, l'outil formel utilisé par Cox, Ingersoll et Ross se prête bien aux applications empiriques, mais s'avère mal commode lorsqu'il s'agit d'étudier la détermination des primes. Or, nous n'avons pas réellement

besoin de ces solutions fermées. Il nous suffit de construire un cadre de travail dans lequel nous pouvons définir un certain nombre de primes, et discuter de leur signe.

La deuxième remarque concerne les processus productifs. Dans le modèle de Cox, Ingersoll et Ross, les aléas sont spécifiés de manière extrêmement générale : ils concernent à la fois la production et la technologie à venir. Par contre, la fonction de production est supposée linéaire, c'est-à-dire à rendements marginaux constants. Ainsi, le modèle d'équilibre général ne peut pas prendre en compte les effets de rendements d'échelle sur les décisions d'investissement, et donc sur la structure des taux.

De nouveau, cette restriction est imputable au choix de l'outil de modélisation. Tout simplement, parce que le calcul stochastique ne permet pas d'obtenir des résultats significatifs pour une spécification non-linéaire des fonctions de production.

Ces deux remarques nous incitent à penser que le calcul stochastique n'est pas bien adapté à une démarche visant à analyser les préférences des individus quant aux divers bons sans coupon, en fonction de l'incertitude qui affecte l'économie. Nous quittons donc le cadre formel du modèle de Cox, Ingersoll et Ross, pour lui préférer un modèle en temps discret, extrêmement simple, mais plus conforme à nos besoins.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Suite à cette introduction, nous présentons dans une deuxième section notre cadre d'analyse. Un modèle très simple d'équilibre économique général est présenté, ainsi que deux mesures complémentaires du risque de consommation : la prime de liquidité et la prime de solidité. Ces primes sont ensuite utilisées pour définir certaines situations typiques, pouvant émerger dans l'économie. Chacune de ces situations, appelée « scénario », correspond à une configuration particulière des préférences des individus vis-à-vis des bons de diverse maturité. La troisième section est consacrée à l'économie d'échange. Le problème consiste à déterminer des conditions qui permettent de justifier l'émergence d'un scénario particulier. Deux effets sont identifiés : l'effet richesse et l'effet information. Nous montrons, dans un certain nombre de cas, qu'un scénario peut être directement associé à une configuration des aléas de dotations. La quatrième section traite des effets spécifiques de la production intertemporelle sur la prime de liquidité et la prime de solidité. L'effet richesse et l'effet information sont analysés dans trois types d'économie : l'économie de dotations aléatoires à technologie unique, l'économie de dotations aléatoires à technologie complète, et enfin l'économie de production. Une dernière section conclut ce chapitre.

Un certain nombre de résultats existent dans la littérature. En particulier,

- Woodward [1983] détermine le signe de la prime de liquidité et de solidité, dans la cadre d'une économie d'échange pure, et donne quelques indications sur les effets de l'introduction d'une (unique) technologie de production ;
- Benninga et Protopapadakis [1986] déterminent le signe de la prime de solidité dans le cadre d'une économie de production. Ils n'étudient ni la prime de liquidité, ni l'effet information.

Notre apport consistera essentiellement à

- exprimer ces résultats dans un cadre unifié,
- établir des liens entre les primes et les théories traditionnelles de la structure des taux,
- démontrer (et discuter) les intuitions de Woodward concernant l'introduction d'une technologie unique,
- analyser l'effet richesse et l'effet information, dans le cadre d'une économie d'échange plus complexe, dans laquelle la production permet de gérer efficacement les risques,
- étendre l'analyse de Benninga et Protopapadakis à la prime de liquidité, et examiner isolément l'effet richesse en économie de production.

Section 2 Prime de liquidité, prime de solidité et risque de consommation : définition du cadre d'analyse

2.1 Introduction

Ayant admis que le temps discret pouvait être préféré au temps continu pour développer une analyse de la structure des taux fondée sur les substitutions de consommation entre divers points du temps, nous présentons dans cette section un outil formel adapté à cet objectif.

S'agissant d'un modèle d'équilibre général, sa structure est naturellement conforme à la théorie de Arrow et Debreu.¹ Il sera alors possible de travailler dans un cadre (presque) isomorphe à celui de Cox, Ingersoll et Ross, mais plus simple et plus conforme à l'objectif retenu. Ce cadre de travail sera utilisé dans les sections suivantes, pour étudier les liens entre la structure de l'incertitude qui affecte une économie, et les risques supportés par les détenteurs d'actifs obligataires.

L'exposé se déroule en trois temps.

Dans un premier temps, un modèle simple d'équilibre économique général est présenté. Il ne comporte qu'une seule période. Ceci permet de mettre l'accent, d'une part, sur la structure de l'incertitude, et, d'autre part, sur la structure de marchés nécessaire pour gérer « au mieux » cette incertitude. Cette structure, appelée « système complet de marchés contingents », conditionne l'expression du taux d'intérêt d'équilibre.

Dans un deuxième temps, l'extension du modèle dans une économie à deux périodes est réalisée. Dans ce contexte, un taux « court » et un taux « long » — constituant, à eux seuls, une structure des taux simplifiée à l'extrême — sont définis. Sous l'hypothèse du système complet, l'équilibre économique crée alors des contraintes, liant la structure des taux à l'évolution aléatoire de la consommation de période en période.

Pour des raisons de simplicité, les deux modèles ci-dessus sont développés dans le cadre d'une économie d'échange pure. Bien que cela puisse paraître, à première vue, fort restrictif, les sections suivantes montreront que l'introduction de la production (ou du stockage) ne perturbe pas l'expression des taux d'intérêt d'équilibre.

¹Voir Ami [1991].

Enfin, dans un troisième temps, le problème de l'évaluation comparée du risque induit par la détention de bons courts et de bons longs est abordé. À cette occasion, deux indicateurs adaptés à cette évaluation seront définis : la prime de liquidité et la prime de solidité. Sur ces bases, sont décrits un certain nombre de configurations particulièrement intéressantes, appelés « scénarios ». Ces scénarios serviront par la suite de point de référence.

Ces notions de prime de liquidité et de prime de solidité sont associées aux travaux de Bailey [1964], McCulloch [1975] et Woodward [1983]. Dans cette section, notre apport consistera essentiellement

1. à analyser de façon détaillée la structure de l'économie qui permet d'obtenir les équations d'équilibre de taux court et de taux long. En particulier, la contrainte budgétaire intertemporelle des investisseurs sera explicitée avec soin ;
2. à interpréter chacun des scénarios sélectionnés par Woodward à la lumière des théories traditionnelles de la structure des taux. Ceci permettra, par la suite, de discuter des conditions de validité de ces théories.

2.2 La théorie des marchés contingents et le taux d'intérêt d'équilibre

Nous présentons, dans cette sous-section, un modèle extrêmement simple de taux d'intérêt d'équilibre, dans le cadre de la théorie des marchés contingents.

On expose successivement la structure de l'incertitude qui affecte l'économie, puis le comportement des consommateurs-investisseurs face à cette incertitude. Les titres financiers élémentaires, *media* de l'allocation optimale des risques, sont ensuite définis. Nous supposons alors que la structure des marchés est telle que tous les risques soient parfaitement et individuellement assurables. L'expression du taux d'intérêt d'équilibre est enfin examinée.

2.2.1 Structure de l'incertitude et comportements individuels

Le calendrier de l'économie considérée ici ne comporte que deux dates : la date 0 et la date 1. La date 0 représente le présent, et constitue le point de référence. À cette date, l'état de l'économie est supposé parfaitement connu des individus. Par contraste, la date 1 représente l'avenir, fondamentalement incertain.

Bien que cette incertitude soit fondamentale, elle n'en est pas moins structurée. Dans le cadre du modèle de Arrow et Debreu, cette structure est celle d'un univers probabilisable. On admet en particulier qu'un individu est capable

1. de définir un certain nombre d'états, appelés « états de la nature », décrivant, de façon exhaustive, les diverses situations dans lesquelles l'économie peut, selon lui, se trouver à la date 1 ;
2. d'affecter à chacun de ces états une « probabilité subjective d'occurrence », en fonction de ses croyances personnelles.

Le modèle n'ayant pas pour objet de traiter de l'hétérogénéité des structures d'information individuelles, les agents sont supposés absolument d'accord sur l'ensemble des états de la nature, et, en outre, parfaitement capables d'identifier l'état dans lequel se trouve l'économie à la date 1. À cette date, l'incertitude est donc *totalelement résolue* : un état étant une description complète de la situation économique, sa réalisation offre à chaque agent une connaissance parfaite des variables pertinentes à ses yeux.

De même, afin de neutraliser les difficultés inhérentes au problème de l'agrégation des comportements, les croyances subjectives, ainsi que les autres caractéristiques individuelles, sont supposées homogènes. La fiction de l'individu représentatif peut donc être utilisée.²

Dans ce modèle, M désigne le nombre d'états de la nature possibles à la date 1 ($M \geq 1$), et π_{1m} la probabilité subjective accordée à la date 0, par l'individu représentatif, à la réalisation de l'état m à la date 1. Par définition, ces probabilités sont liées par

$$\begin{aligned} 0 < \pi_{1m} \leq 1, & \quad \forall m = 1, \dots, M \\ \sum_m \pi_{1m} = 1. & \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dans ce contexte, l'individu va chercher à déterminer, à la date 0, une politique de consommation qui lui procure une satisfaction maximale, compte tenu de ses contraintes budgétaires.

Il n'existe qu'un seul bien dans cette économie. Ce bien, parfaitement divisible, est utilisé comme numéraire. La satisfaction de l'individu, à la date 0, est obtenue par la consommation de ce bien à

²Comme il a été signalé dans le troisième chapitre, l'hypothèse d'homogénéité conduit à écarter un rôle important, habituellement attribué au marché : la mise en cohérence des décisions individuelles *ex ante*, rendues *a priori* incompatibles par la diversité des richesses, goûts et croyances.

la date 0, notée c^0 , ainsi qu'à la date 1, *conditionnellement à la réalisation de l'état de la nature*. En effet, sachant que le futur est incertain, l'individu va déterminer un niveau de consommation approprié dans chaque éventualité.

Soit c_{1m}^0 la consommation de l'agent à la date 1 si l'état m se réalise. Soit \tilde{c}^1 la consommation à la date 1, c'est-à-dire la variable aléatoire dont la réalisation est c_{1m}^0 avec une probabilité π_{1m} . Un « plan de consommation » peut être défini comme un n -uplet $(c^0, c_{11}^0, \dots, c_{1M}^0)$ de \mathbb{R}^{1+M} , ou, de façon plus concise, comme un couple (c^0, \tilde{c}^1) .

De manière usuelle, l'individu maximise l'espérance d'une fonction d'utilité, notée $V(\cdot)$, conformément à la théorie de Von Neumann-Morgenstern. La fonction $V(\cdot)$ est supposée additivement séparable dans le temps et indépendante des états. Spécifiquement, elle est définie comme

$$V(c^0, \tilde{c}^1) = U(c^0) + \eta U(\tilde{c}^1), \quad (2.2)$$

où $\eta > 0$ est un facteur d'actualisation égal à $1/(1 + \rho)$, et ρ est le taux de préférence pure pour le présent (c'est-à-dire le « taux d'impatience »).

L'expression $E(V(c^0, \tilde{c}^1))$ désigne l'espérance à la date 0 de l'utilité de l'individu, calculée à l'aide de ses croyances personnelles. Les hypothèses ci-dessus permettent d'écrire $E(U(c^0)) = U(c^0) = u(c^0)$ et $E(U(\tilde{c}^1)) = \sum_m \pi_{1m} u(c_{1m}^0)$, où $u(\cdot)$ représente la fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern de l'individu.

La fonction $u(\cdot)$ satisfait aux trois conditions suivantes :

$$\begin{aligned} u'(c) &> 0 && \forall c \\ u''(c) &< 0 && \forall c \\ u'(c) &\longrightarrow +\infty && \text{quand } c \longrightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

où $u'(\cdot)$ et $u''(\cdot)$ désignent respectivement la dérivée première et seconde de $u(\cdot)$.

La première condition ci-dessus indique que l'utilité croît strictement avec la consommation. Elle exprime le caractère insatiable de l'agent. La seconde condition indique que l'utilité marginale décroît strictement avec la consommation. La fonction $u(\cdot)$ étant strictement concave, l'individu manifeste de l'aversion pour le risque. La troisième condition indique que l'utilité marginale est infiniment forte lorsque la consommation est infiniment faible. Il s'agit d'une condition technique, destinée à exclure toute situation dans laquelle la consommation serait nulle (les « solutions de

coin »). Intuitivement, cette dernière condition décourage l'agent d'envisager une consommation « trop petite » (nulle, à la limite), parce que, dans ce cas, il recevrait une sollicitation infiniment forte à consommer plus.

L'individu choisit un plan de consommation optimal (c^0, \tilde{c}^1) en maximisant

$$E\left(V(c^0, \tilde{c}^1)\right) = u(c^0) + \eta \sum_m \pi_{1m} u(c_{1m}^0) \quad (2.4)$$

sous une contrainte de budget.

Cette contrainte dépend de ses ressources initiales. Dans le cadre de ce modèle à deux dates, l'individu est doté, à la date 0,

1. d'une quantité \bar{c}^0 de bien de consommation, livrée à la date 0 ;
2. d'une quantité \bar{c}_{1m}^0 de bien, livrée à la date 1 si l'état m se réalise, *définie pour chaque état m possible*. L'individu reçoit ainsi à la date 0, non pas une quantité physique de bien, mais un droit sur la richesse future, contingent à la réalisation de l'état de la nature.

Sa dotation initiale peut être représentée par un n -uplet $(\bar{c}^0, \bar{c}_{11}^0, \dots, \bar{c}_{1M}^0)$ de \mathbb{R}^{1+M} , et le comportement individuel s'analyse alors comme la volonté de transformer cette dotation en un plan de consommation $(c^0, c_{11}^0, \dots, c_{1M}^0)$.

Pour ce faire, il doit disposer d'une structure de marché adéquate.

2.2.2 Le système complet de marchés contingents

La dotation initiale d'un individu est constituée en partie de droits sur la richesse future. Ces droits sont matérialisés par des titres financiers, appelés « droits contingents purs ».

Un droit pur, contingent à l'état m , est défini comme un titre permettant à son détenteur de se faire livrer une unité de bien de consommation à la date 1, *à la condition que l'état m se réalise*. Si ce n'est pas le cas, le titre devient sans objet.

S'il existe un marché pour ce droit élémentaire, l'individu peut imaginer d'y offrir sa dotation, ou, au contraire, de demander plus de droits qu'il n'en possède. Un tel marché, appelé « marché

contingent », permet de définir P_{1m}^0 , le prix à la date 0 d'un droit pur, contingent à l'état m . Ce prix, exprimé en quantité de biens de consommation à la date 0, est supposé déterminé par un mécanisme parfaitement concurrentiel.

Ce marché permet aux individus de transférer de la consommation, dans un sens ou dans un autre, entre aujourd'hui et l'éventuel état m de l'économie à la date 1. Si deux marchés contingents étaient ouverts, il deviendrait également possible de réallouer sa consommation entre deux états de la nature. Ainsi, plus il existe de marchés contingents, plus les individus ont la possibilité d'allouer librement (mais, bien évidemment, sous contrainte de budget) leur consommation présente et future.

À la limite, le système de marchés comporte autant de marchés que de droits contingents purs différents, soit exactement un marché par état de la nature. Dans un tel système, appelé « système complet de marchés contingents », *tous les risques sont assurables individuellement*, et les agents peuvent allouer, sans contrainte technique (c'est-à-dire sans contrainte créée par l'insuffisance du nombre de marchés), le risque de consommation.

La présente étude n'ayant pas pour objectif de traiter des conséquences de l'existence de risques non-assurables, le système de marchés est supposé complet.

Dans le contexte de ce modèle, le problème de l'allocation intertemporelle de consommation apparaît comme un problème de détermination conjointe des plans optimaux des agents et des prix d'équilibre des droits contingents purs. Mais, bien entendu, ces droits « purs » ne sont que des dispositifs conceptuels, et n'existent pas, en tant que tels, dans la réalité. Dès lors, que peut dire la théorie de Arrow et Debreu sur le prix des actifs négociables réels, beaucoup plus complexes, et, en particulier, des bons sans coupon ?

Pour répondre à cette question, une correspondance doit être établie entre un équilibre défini en terme de prix de droits purs et un équilibre défini en terme de prix de titres financiers complexes.

Une procédure très simple permet de « remonter » du prix des droits purs fictifs aux prix des titres financiers. Dans le cadre d'une économie à deux dates et M états, un titre complexe peut être défini par un vecteur décrivant les flux de numéraire à percevoir dans chacun des états possibles du futur. Pour un titre numéroté i , ce vecteur est noté

$$\varphi^{1,i} = [\varphi_{11}^i, \dots, \varphi_{1M}^i] \quad (2.5)$$

où φ_{1m}^i est le flux à percevoir dans l'état m à la date 1. Ce titre complexe est strictement équivalent, en terme de flux, à un portefeuille de droits purs, tel que la quantité de droits contingents à l'état m soit donnée par φ_{1m}^i . Dès lors, si $P^{0,i}$ désigne le prix à la date 0 de ce titre, il peut être calculé par la formule

$$P^{0,i} = \sum_m \varphi_{1m}^i \times P_{1m}^0. \quad (2.6)$$

Utilisant ce procédé, il est facile de déterminer le prix à la date 0 d'un bon sans coupon, sans risque de défaut et de valeur faciale unitaire. Ses caractéristiques sont fort simples : il paye une unité de bien de consommation à la date 1 *quel que soit l'état dans lequel se trouve alors l'économie*. Son vecteur de flux est donc un vecteur de 1, et son prix P_1^0 est donné par

$$P_1^0 \equiv \sum_m P_{1m}^0. \quad (2.7)$$

Le taux d'intérêt à la date 0, noté r^0 , est défini simplement par

$$\frac{1}{1+r^0} \equiv P_1^0. \quad (2.8)$$

Mais s'il est ainsi possible de retrouver le prix d'équilibre d'un titre complexe à partir des prix des droits purs, il n'en reste pas moins que les transactions effectives concernent les actifs négociables. La correspondance évoquée ci-dessus exige de répondre à la question complémentaire suivante : étant donné un ensemble de titres complexes, cotés sur des marchés financiers, est-il possible de retrouver les prix des M droits fictifs sous-jacents ?

La réponse est positive lorsqu'il existe M titres négociables, de prix $P^{0,1}, \dots, P^{0,M}$, tels que les M vecteurs $P^{0,i}$ soient deux à deux linéairement indépendants (ils constituent alors une base). En effet, si c'est le cas, le système composé des M équations (2.6) peut être résolu par inversion, ce qui permet de déterminer sans ambiguïté les prix $P_{11}^0, \dots, P_{1M}^0$ des M titres fictifs.

Dans ces conditions, il est équivalent de travailler sur les prix des titres fictifs complexes et sur les prix des droits contingents purs.³ Pour cette raison, dans le cadre d'une économie à M états, tout système de M marchés de titres linéairement indépendants sera qualifié de système complet de marchés.

³On notera toutefois que l'équilibre émergeant au sein d'un système complet de marchés contingents est tel qu'aucun investisseur ne prenne de position courte. Ce n'est généralement pas le cas dans un système complet de titre complexes.

En définitive, dans un système complet, il existe un isomorphisme entre les droits contingents purs et les titres négociables. Cet isomorphisme est fort appréciable, du fait qu'il permet de raisonner à partir des droits purs, ce qui simplifie considérablement le traitement mathématique du modèle.

2.2.3 Équilibre et taux d'intérêt

Le système de marchés ayant été défini, il est maintenant possible de construire la contrainte budgétaire de l'individu représentatif.

À la date 0, cet individu possède en dotation \bar{c}^0 unités de bien au comptant, plus, pour chaque état m , un droit de \bar{c}_{1m}^0 unités de biens à la date 1 si l'état m se produit. Le prix unitaire du bien à la date 0 est, par définition, l'unité. Les prix des droits contingents sont donnés par $P_{11}^0, \dots, P_{1M}^0$. La valeur de marché de ses ressources est donc $\bar{c}^0 + P_{11}^0 \bar{c}_{11}^0 + \dots + P_{1M}^0 \bar{c}_{1M}^0$. Avec ces ressources, il peut soit consommer une quantité c^0 de biens, soit acquérir des droits contingents.

Si e_{1m}^0 désigne la quantité de droits contingents à l'état m , demandée par l'individu, la contrainte de budget de la date 0 s'écrit⁴

$$c^0 + \sum_m P_{1m}^0 e_{1m}^0 = \bar{c}^0 + \sum_m P_{1m}^0 \bar{c}_{1m}^0. \quad (2.9)$$

De plus, parce qu'il est rationnel, l'individu ne considérera pas les plans de consommation qui violent sa contrainte budgétaire dans l'avenir. À la date 0, il sait que la fin du monde interviendra juste après la date 1, et prévoit donc de consommer toute sa richesse future. Si l'économie se trouve dans l'état m , il touchera de façon certaine une quantité e_{1m}^0 de bien qu'il s'empressera de consommer. Sa contrainte à la date 1 est donc

$$c_{1m}^0 = e_{1m}^0 \quad \forall m = 1, \dots, M. \quad (2.10)$$

La contrainte de budget intertemporelle, obtenue par combinaison des deux équations ci-dessus, s'exprime par

$$c^0 = \bar{c}^0 + \sum_m P_{1m}^0 (\bar{c}_{1m}^0 - c_{1m}^0). \quad (2.11)$$

⁴Sur des marchés parfaitement concurrentiels, l'agent insatiable sature sa contrainte de budget.

Le programme de l'individu s'écrit alors

$$\max_{\{c^0, c_{1m}^0\}} E(V(c^0, \tilde{c}^1))$$

sous (2.11), et où l'espérance est donnée par (2.4).

Afin d'alléger la présentation mathématique du modèle, la fonction à maximiser, ainsi que l'ensemble des plans de consommation qui satisfont la contrainte (2.11), sont supposés posséder les propriétés qui permettent d'obtenir une unique solution intérieure, c'est-à-dire une solution telle que l'individu consomme, à la date 0, une quantité strictement positive du bien, et détienne une quantité strictement positive de droits contingents.

Les conditions du premier ordre du problème d'optimisation sont

$$P_{1m}^0 = \eta \pi_{1m} \frac{u'(c_{1m}^0)}{u'(c^0)} \quad \forall m = 1, \dots, M. \quad (2.12)$$

L'équilibre d'un individu est atteint lorsque, pour chaque état m , le prix du droit pur contingent à l'état m est égal au rapport de l'utilité marginale de sa consommation optimale dans cet état et de l'utilité marginale de la consommation optimale présente, pondéré par la probabilité subjective d'occurrence de cet état.

Clairement, P_{1m}^0 est le prix qui rend équivalent, aux yeux de l'individu, la satisfaction obtenue à la date 0 par une unité supplémentaire de consommation immédiate, et par une unité supplémentaire de consommation à la date 1, si l'état m survient. L'équilibre est donc atteint lorsque, pour tout m , le prix P_{1m}^0 est égal au taux marginal de substitution entre consommation présente et consommation future dans l'état m . Dans ce cas, l'individu ne voit, en effet, aucun intérêt à utiliser les divers marchés contingents pour échanger de la consommation présente contre de la consommation future contingente à la réalisation d'un état de la nature.

D'après (2.7) et (2.12), le prix d'équilibre d'un bon sans coupon s'exprime alors comme

$$P_1^0 = \frac{\eta E(u'(\tilde{c}^1))}{u'(c^0)}, \quad (2.13)$$

ce qui est directement l'expression du taux marginal anticipé de substitution entre consommation présente et consommation future.

Dans le cadre de ce modèle, l'équilibre général est défini de façon on ne peut plus simple. L'hypothèse d'homogénéité des agents permet en effet de considérer que l'économie ne comporte qu'un individu. Dès lors, l'égalité entre offre et demande sur tous les marchés s'écrit

$$\begin{aligned} c^0 &= \bar{c}^0, \\ c_{1m}^0 &= \bar{c}_{1m}^0 \quad \forall m = 1, \dots, M. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Utilisant l'identité de Walras, on remarque qu'une de ces $M + 1$ équations est redondante au sein du modèle. Par exemple, introduisant les M dernières équations du système (2.14) dans la contrainte de budget (2.11), on obtient immédiatement la première équation de (2.14). L'équilibre général se détermine donc très simplement (par substitutions) à partir d'un système de $2M + 1$ équations indépendantes (les M conditions du premier ordre (2.12), plus les conditions d'équilibre des $M + 1$ marchés) à $2M + 1$ inconnues (les prix d'équilibre des M droits contingents purs, plus les prix des $M + 1$ décisions du plan de consommation).

La fiction de l'individu représentatif permet donc de considérer que le prix d'équilibre du bon sans coupon dépend, *via* l'équation (2.13), de la consommation courante « agrégée », c^0 , et de la distribution de la consommation future « agrégée », \tilde{c}^1 . De plus, ces variables sont directement déterminées par la dotation *exogène* de l'économie. De ce fait, il est licite de raisonner comme si la consommation agrégée était elle-même une donnée exogène.

Bien évidemment, on peut s'interroger sur la signification d'un prix d'équilibre dans une économie composée d'individus identiques, où, de toute façon, aucun échange ne peut avoir lieu. Dans le cadre de ce modèle d'échange pur, l'interprétation correcte des prix (2.12) ou (2.13) est la suivante : ces prix sont tels que l'agent représentatif considère qu'il est optimal de consommer ses dotations, et donc de ne pas recourir à l'échange.

2.3 La structure des taux dans un modèle à trois dates

Le modèle de marchés contingents, et en particulier l'équation (2.13), formalise de façon très simple un lien entre consommation et taux d'intérêt. Toutefois, il est bien sûr impossible de définir une structure par terme des taux d'intérêt dans un cadre monopériodique.

Pour construire une structure minimale, il est nécessaire de réinterpréter le modèle ci-dessus dans un univers bipériodique. Cette réinterprétation est présentée ci-après.

Dans un premier temps, la structure de l'incertitude et des croyances associées est exposée. Un important phénomène de révision des anticipations est mis ainsi en évidence. Dans un deuxième temps, le système de marchés contingents est précisé, puis les conditions du premier ordre du problème de maximisation déterminées. Un taux « court » et un taux « long » d'équilibre sont enfin définis.

2.3.1 Structure du modèle bipériodique

Le calendrier de l'économie comporte maintenant trois dates, numérotées 0, 1 et 2. La fin du monde n'a lieu qu'après la date 2. Par rapport au modèle précédent, l'individu qui se trouve, à la date 1, dans l'état m , est dans une situation très différente : alors que, dans le cadre du modèle à deux dates, il était certain de mourir immédiatement et consommait donc toute sa richesse, il peut ici envisager de consommer à la période suivante. Toutefois, l'état du monde à la date 1 étant incertain, l'individu se trouve, à cette date, devant un problème similaire à celui qui a été résolu dans le cadre du modèle monopériodique.

L'incertitude est structurée ici de la façon suivante : l'économie est susceptible de se trouver dans M états de la nature à la date 1, et dans N états à la date 2. La résolution de l'incertitude au cours du temps se fait toujours selon le même principe : à chaque date, l'individu connaît parfaitement l'état dans lequel se trouve l'économie, mais ne connaît pas l'état qui se réalisera dans le futur proche ou lointain.

À la date 0, les croyances de l'individu portent sur l'état qui se réalisera à la date 1, mais également sur l'état qui se réalisera à la date 2.

L'existence d'une date intermédiaire introduit ici un phénomène nouveau : d'une manière générale, la réalisation d'un état particulier à la date 1 apporte à l'individu une information sur l'avenir, qui le conduit naturellement à « affiner » les probabilités qu'il accorde à la réalisation des divers états de la nature à la date 2. Il s'agit d'un processus de *révision des croyances*, qui se révélera particulièrement important pour l'étude de la structure des taux. Ainsi, pour chaque état possible m à la date 1, on doit définir un jeu complet de probabilités pour la date 2, correspondant aux nouvelles croyances de l'individu s'il se trouve dans cet état.

Soit π_{1m} la probabilité subjective accordée à la date 0 par l'individu à la réalisation de l'état m à la date 1, π_{2n} la probabilité subjective accordée à la date 0 par l'individu à la réalisation de l'état

n à la date 2, et $\pi_{m.n}$ la probabilité subjective accordée à la date 1 par l'individu à la réalisation de l'état n à la date 2, lorsqu'il se trouve dans l'état m . Une fois l'état m connu, la révision des croyances intervient sous la forme du remplacement des probabilités $\pi_{2n}, n = 1, \dots, N$, par les probabilités $\pi_{m.n}, n = 1, \dots, N$.

L'individu rationnel exprime des croyances cohérentes. De ce fait, les probabilités subjectives π_{2n} se déduisent des probabilités π_{1m} et $\pi_{m.n}$ par simple calcul : la probabilité, formée à la date 0, accordée à l'état n à la date 2, est égale à la somme des probabilités accordées à tous les « chemins » qui mènent effectivement à cet état n . Formellement, la cohérence des croyances s'exprime de la façon suivante :

$$\pi_{2n} = \sum_m \pi_{1m} \times \pi_{m.n} \quad \forall n = 1, \dots, N. \quad (2.15)$$

Dans une économie à trois dates, un plan de consommation comporte beaucoup d'informations : l'individu doit décider, à la date 0, de sa consommation courante, de sa consommation à la date 1 dans les divers états de la nature, ainsi que, pour chaque état m possible, de sa consommation à la date 2 dans chaque état n possible. En effet, il n'y a aucune raison d'imposer *a priori* à l'individu de consommer les mêmes quantités à la date 2, quel que soit l'état dans lequel il s'est trouvé à la date 1.

Comme précédemment, c^0 désigne la consommation à la date 0, et c_{1m}^0 la consommation à la date 1, décidée à la date 0, si l'état m se réalise. Soit maintenant c_{mn}^0 la consommation à la date 2, décidée à la date 0, si l'état m se réalise à la date 1 et l'état n à la date 2.

Un plan de consommation est donc représenté par un triplet $(c^0, \tilde{c}^1, \tilde{c}^2)$, qui comporte en réalité $1 + M + M \times N$ décisions de consommation. Dans ce triplet, \tilde{c}^1 désigne la consommation à la date 1, et \tilde{c}^2 la consommation à la date 2. La variable aléatoire \tilde{c}^1 prend pour valeur c_{1m}^0 , avec une probabilité π_{1m} , pour $m = 1, \dots, M$, et la variable \tilde{c}^2 prend pour valeur c_{mn}^0 , avec une probabilité $\pi_{1m} \times \pi_{m.n}$, pour $m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, N$.

L'individu représentatif cherche à déterminer un plan de consommation qui maximise, à la date 0, l'espérance de l'utilité $V(\cdot)$ de sa consommation intertemporelle. La fonction $V(\cdot)$ est de la forme

$$V(c^0, \tilde{c}^1) = U(c^0) + \eta U(\tilde{c}^1) + \eta^2 U(\tilde{c}^2). \quad (2.16)$$

Compte tenu des notations adoptées pour les croyances, et des hypothèses relatives au comportement rationnel de l'individu en incertitude, il vient $E(U(c^0)) = u(c^0)$, $E(U(\tilde{c}^1)) = \sum_m \pi_{1m} u(c_{1m}^0)$, et $E(U(\tilde{c}^2)) = \sum_m \pi_{1m} \sum_n \pi_{m.n} u(c_{mn}^0)$. L'objectif à maximiser est donc

$$E(V(c^0, \tilde{c}^1, \tilde{c}^2)) = u(c^0) + \eta \sum_m \pi_{1m} u(c_{1m}^0) + \eta^2 \sum_m \pi_{1m} \sum_n \pi_{m.n} u(c_{mn}^0). \quad (2.17)$$

Outre la quantité \bar{c}^0 de bien au comptant, les droits \bar{c}_{1m}^0 à valoir sur les biens à la date 1, l'individu reçoit également en dotation à la date 0 des droits \bar{c}_{mn}^0 à valoir sur les biens à la date 2 si l'état m puis l'état n se réalisent. À la date 0, il va donc utiliser les marchés contingents ouverts pour transformer sa dotation en un plan optimal de consommation $(c^0, \tilde{c}^1, \tilde{c}^2)$.

2.3.2 Le système complet de marchés et la solution optimale

Dans un système complet de marchés contingents, il doit être possible de s'assurer contre tous les risques créés par l'incertitude qui pèse sur les événements futurs. Ainsi, dans le cadre d'un modèle à trois dates, un individu doit pouvoir, dès la date 0, opérer sur des marchés de droits contingents à la réalisation de n'importe quel état à la date 1 (soit M marchés), mais aussi sur des marchés contingents à une séquence quelconque d'états sur les deux dates futures (soit $M \times N$ marchés).

Ces $M \times (N+1)$ marchés sont supposés ouverts à la date 0. Le bien au comptant à cette date sert de numéraire. Le consommateur, qui dispose d'un « portefeuille » de dotations en bien au comptant et de droits contingents, va chercher à le réorganiser au mieux en fonction des prix affichés sur ces marchés.

Soit P_{1m}^0 le prix de marché, à la date 0, d'un droit pur contingent à la réalisation de l'état m à la date 1, et e_{1m}^0 la quantité de ces droits demandée par l'individu à la date 0. Soit P_{mn}^0 le prix de marché, à la date 0, d'un droit pur contingent à la réalisation de l'état m puis de l'état n , et e_{mn}^0 la quantité de ces droits demandée par l'individu.

La contrainte du budget à la date 0 est

$$c^0 + \sum_m P_{1m}^0 e_{1m}^0 + \sum_m \sum_n P_{mn}^0 e_{mn}^0 = \bar{c}^0 + \sum_m P_{1m}^0 \bar{c}_{1m}^0 + \sum_m \sum_n P_{mn}^0 \bar{c}_{mn}^0. \quad (2.18)$$

Pour construire sa contrainte intertemporelle, l'individu se place à la date 1, par exemple dans

l'état m . Il existe, à cette date, un système complet de N marchés contingents aux états de la date 2. Les prix affichés sur ces marchés sont exprimés en quantité du bien à la date 1.

Les ressources de cet individu sont constituées d'une quantité e_{1m}^0 de biens, touchée sur les droits contingents à la date 1 acquis à la date 0 (un seul de ces droits a donné lieu à paiement), et des droits en quantité e_{mn}^0 , contingents aux états n à la date 2, acquis également à la date 0 (seuls N de ces $M \times N$ droits ont encore de la valeur). Les prix de ces droits détenus dépendent de l'état courant m et sont évalués sur les N marchés ouverts à la date 1.

Soit P_{2n}^{1m} le prix à la date 1, lorsque l'économie se trouve dans l'état m , d'un droit contingent à la réalisation de l'état n à la date 2, et e_{2n}^{1m} la quantité demandée de ces droits. Avec ces ressources, l'individu peut consommer une quantité c_{1m}^0 de bien, mais aussi investir dans des droits contingents à la date 2. Ses contraintes de budget à la date 1 seront

$$c_{1m}^0 + \sum_n P_{2n}^{1m} e_{2n}^{1m} = e_{1m}^0 + \sum_n P_{2n}^{1m} e_{mn}^0 \quad \forall m = 1, \dots, M. \quad (2.19)$$

Il lui reste maintenant à étudier la situation à la date 2, dans l'état n , alors que l'état m s'est réalisé précédemment. Parmi l'ensemble des N droits acquis en quantité e_{2n}^{1m} , $n = 1 \dots, N$, à la date 1, un seul donne lieu à paiement. L'individu, sachant qu'il va mourir, consomme alors toute sa richesse :

$$c_{mn}^0 = e_{2n}^{1m} \quad \forall m = 1, \dots, M, \quad \forall n = 1, \dots, N. \quad (2.20)$$

Le système composé des $1 + M + M \times N$ équations (2.18), (2.19) et (2.20) constitue la contrainte de budget intertemporelle de l'individu. Après élimination des instruments e_{2n}^{1m} et réarrangements, cette contrainte s'écrit sous la forme du système

$$\begin{aligned} c^0 &= \bar{c}^0 + \sum_m P_{1m}^0 (\bar{c}_{1m}^0 - e_{1m}^0) + \sum_m \sum_n P_{mn}^0 (\bar{c}_{mn}^0 - e_{mn}^0) \\ c_{1m}^0 &= e_{1m}^0 + \sum_n P_{2n}^{1m} (e_{2n}^{1m} - c_{mn}^0) \quad \forall m = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le programme est donc

$$\max_{\{c^0, c_{1m}^0, c_{mn}^0\}} E \left(V(c^0, \bar{c}^1, \bar{c}^2) \right) \quad (2.22)$$

sous (2.21), et où l'espérance est donnée par (2.17).

La dérivation de l'objectif par rapport aux instruments e_{1m}^0 , e_{mn}^0 et c_{mn}^0 permet d'obtenir sans difficulté les trois systèmes d'équations de prix

$$P_{1m}^0 = \eta \pi_{1m} \frac{u'(c_{1m}^0)}{u'(c^0)} \quad \forall m = 1, \dots, M \quad (2.23)$$

$$P_{mn}^0 = \eta^2 \pi_{1m} \pi_{m.n} \frac{u'(c_{mn}^0)}{u'(c^0)} \quad \forall m = 1, \dots, M, \quad \forall n = 1, \dots, N \quad (2.24)$$

$$P_{2n}^{1m} = \eta \pi_{m.n} \frac{u'(c_{mn}^0)}{u'(c_{1m}^0)} \quad \forall m = 1, \dots, M, \quad \forall n = 1, \dots, N \quad (2.25)$$

qui, ensembles, impliquent

$$P_{mn}^0 = P_{1m}^0 \times P_{2n}^{1m}. \quad (2.26)$$

Clairement, ces trois systèmes sont issus du principe d'évaluation analysé dans le cadre du modèle précédent : le prix d'un paiement contingent à un état futur, est, à l'équilibre, égal au taux marginal de substitution entre consommation présente et consommation future dans cet état, pondéré par la probabilité de réalisation de cet état. Simplement, ce principe est ici appliqué à l'évaluation à la date 0 d'un paiement à une période (équation (2.23)), à deux périodes (équation (2.24)), ainsi qu'à l'évaluation à la date 1 d'un paiement à une période (équation (2.25)).

On pourrait toutefois s'interroger sur la signification de cette dernière équation, qui, contrairement aux deux premières, impose une contrainte sur un prix *futur*, en fonction de données connues à l'instant présent. Est-ce à dire que le prix P_{2n}^{1m} d'un droit pur à la date 1 dans l'état m , contingent à la réalisation de l'état n à la date 2, est parfaitement connu dès la date 0 ?

C'est en effet le cas ici. Dans un système complet de marchés contingents, il est possible de s'assurer, dès aujourd'hui et individuellement, contre tous les risques futurs : le consommateur détermine donc, dès la date 0, son comportement optimal futur exact *dans toutes les situations possibles*. Comme tout est prévu à l'avance, aucune « surprise » ne peut intervenir à la date 1, et il n'aura aucune raison de modifier sa stratégie initiale. Les prix P_{2n}^{1m} , $n = 1, \dots, N$, calculés à la date 0, sont donc réellement ceux qui seront affichés à la date 1 dans l'état m .

Ceci illustre un principe fondamental du modèle de Arrow et Debreu : dans un système complet, tous les risques sont alloués optimalement au cours de la première séance d'ouverture des marchés

(ici, à la date 0). L'incertitude est pour ainsi dire « résolue » une fois pour toutes à l'origine des temps, il n'est donc pas nécessaire d'ouvrir des marchés à la date 1 ou 2.

Les équations (2.23) à (2.26) permettent maintenant d'exprimer une structure des taux d'intérêt d'équilibre.

2.3.3 Taux court et taux long d'équilibre

Dans le contexte d'un modèle à trois dates (deux périodes), le taux court est défini comme le taux de rendement interne d'un bon payant, de façon certaine, une unité de bien à la date suivante, et le taux long comme le taux d'un bon payant une unité après deux périodes.

Soit toujours r^0 et $P_1^0 \equiv 1/(1 + r^0)$ le taux et le prix à la date 0 du bon court. Soit également R et $P_2^0 \equiv 1/(1 + R)^2$ le taux et le prix à la date 0 du bon long. Ces bons « non-contingents », exprimés comme des collections de droits contingents, sont tels que

$$P_1^0 = \sum_m P_{1m}^0 = \eta \pi_{1m} \frac{u'(c_{1m}^0)}{u'(c^0)} \quad (2.27)$$

$$P_2^0 = \sum_m \sum_n P_{mn}^0 = \eta^2 \pi_{1m} \pi_{m.n} \frac{u'(c_{mn}^0)}{u'(c^0)}, \quad (2.28)$$

soit, de manière équivalente,

$$\frac{1}{1 + r^0} = \frac{\eta \mathbf{E}(u'(\tilde{c}^1))}{u'(c^0)} \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{(1 + R)^2} = \frac{\eta^2 \mathbf{E}(u'(\tilde{c}^2))}{u'(c^0)}. \quad (2.30)$$

Le « taux court futur », c'est-à-dire le taux à une période à la date 1, est construit selon le même principe. Bien évidemment, si les prix P_{2n}^{1m} sont connus à la date 0, le taux court futur reste, quant à lui, inconnu, du fait que la réalisation de l'état m est aléatoire. Soit \tilde{r}^1 ce taux, et \tilde{P}_2^1 le prix correspondant. Le terme \tilde{P}_2^1 désigne donc une variable aléatoire, qui prend pour valeur $\sum_n P_{2n}^{1m}$ (le prix du bon court dans l'état m) avec une probabilité π_{1m} .

L'espérance à la date 0 de ce prix est

$$E\left(\tilde{P}_2^1\right) = \sum_m \sum_n P_{2n}^{1m} = \sum_m \left[\frac{\sum_n \eta \pi_{m,n} u'(c_{mn}^0)}{u'(c_{1m}^0)} \right] \quad (2.31)$$

soit

$$E\left(\frac{1}{1 + \tilde{r}^1}\right) = \eta E\left(\frac{E_m(u'(\tilde{c}^2))}{u'(\tilde{c}^1)}\right), \quad (2.32)$$

où $E_m(\cdot)$ désigne l'espérance, calculée à la date 1, conditionnelle à l'état m . Cette espérance est donc une variable aléatoire qui prend la valeur $E_m(\cdot)$ avec une probabilité π_{1m} . La règle des espérances imbriquées s'exprime ici par $E(E_m(\cdot)) = E(\cdot)$.

2.4 Prime de liquidité, prime de solidité et théories traditionnelles de la structure des taux

Le modèle à deux périodes constitue un cadre de travail très simple, mais suffisant pour analyser les préférences des individus quant à la composition par maturité de leur portefeuille obligataire. Contrairement à la théorie de portefeuille, l'optique générale n'est pas ici de déterminer avec précision les parts optimales détenues, mais plutôt de comparer les risques induits par la détention des bons de diverse longueur.

Pour réaliser une telle comparaison, des indicateurs spécialisés sont nécessaires.

La prime de liquidité et la prime de solidité, définies ci-après, seront utilisées dans le cadre du présent chapitre. À partir de ces deux indicateurs, il est possible de définir un certain nombre de situations typiques, appelées « scénarios », révélant l'aptitude comparée des bons courts et longs à gérer les risques économiques. Ces scénarios sont ensuite mis en rapport avec les théories traditionnelles de la structure par terme des taux d'intérêt.

2.4.1 La prime de liquidité, une mesure relative au risque de consommation à horizon lointain

Comme le montre le chapitre 1, la première théorie intégrant explicitement le risque dans l'analyse de la structure des taux a été proposée par Hicks, inspiré par les travaux de Keynes sur le déport normal.

La théorie de Hicks repose en partie sur l'idée que les prêteurs sont particulièrement sensibles à l'éventualité d'une liquidation rapide de leurs actifs, et qu'ils vont, en conséquence, manifester une nette préférence pour les bons de maturité courte. De ce fait, ils exigeront une prime, sous forme d'un supplément de rendement anticipé, pour accepter de détenir des bons de maturité longue.

Hicks propose de mesurer cette prime, baptisée « prime de liquidité », par la différence entre le taux à terme implicite pour une période donnée du futur, et le taux, anticipé aujourd'hui, pour un prêt couvrant cette période. L'interprétation de cette prime dans le cadre du modèle à trois dates se construit de la façon suivante.

Soit f^0 le taux à terme, implicite à la structure des taux à la date 0, pour un prêt court à la date 1. Ce taux est ici défini comme le taux de rendement interne d'un bon court à la date 1, tel qu'à la date 0 un investissement court renouvelé à ce taux procure le même rendement qu'un investissement long. Le taux f^0 est donc tel que

$$(1 + r^0)(1 + f^0) = (1 + R)^2. \quad (2.33)$$

La prime de liquidité L est

$$L \equiv f^0 - E(\tilde{r}^1). \quad (2.34)$$

Par combinaison des deux équations ci-dessus, il vient

$$(1 + r^0)L = (1 + R)^2 - (1 + r^0)E(1 + \tilde{r}^1). \quad (2.35)$$

Cette dernière équation montre bien que la prime de liquidité est une mesure de l'excès de rendement du bon long sur l'espérance du rendement d'un investissement renouvelé. La prime L est donc essentiellement relative à la date 2, c'est-à-dire à l'horizon lointain.

À l'équilibre d'un modèle dans lequel des agents gèrent des portefeuilles en fonction du rendement et du risque des divers actifs, L doit également être liée aux risques fondamentaux de l'économie, mesurés au même horizon. De plus, lorsque la consommation est le but ultime de toute activité économique, le risque doit, par nature, être interprété comme un risque de consommation.

Dans le cadre du modèle à trois dates, une expression de L en accord avec ces principes est obtenue

en introduisant dans (2.35) les équations d'équilibre du taux court (2.29), du taux long (2.30) et du taux court anticipé (2.32). Il vient

$$L = \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{\mathbb{E}(u'(\tilde{c}^1))}{\mathbb{E}(u'(\tilde{c}^2))} - \mathbb{E} \left(\frac{u'(\tilde{c}^1)}{\mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2))} \right) \right\}. \quad (2.36)$$

Suivant McCulloch [1975] et Woodward [1983], cette équation est réécrite sous la forme⁵

$$L = \frac{1}{\eta \mathbb{E}(u'(\tilde{c}^2))} \text{Cov} \left(\frac{u'(\tilde{c}^1)}{\mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2))}, \mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2)) \right). \quad (2.37)$$

Le premier argument de la covariance est égal au taux court futur. Finalement, la prime de liquidité s'exprime comme

$$L = \frac{1}{\eta \mathbb{E}(u'(\tilde{c}^2))} \text{Cov} \left(1 + \tilde{r}^1, \mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2)) \right). \quad (2.38)$$

Cette dernière équation est particulièrement significative : elle montre que *le signe de L est égal au signe de la covariance entre le taux court futur et l'espérance conditionnelle de l'utilité marginale de la consommation à la date terminale.*

L'individu représentatif étant adverse au risque, cette proposition s'interprète aisément en terme de risque de consommation. Pour cela, il suffit de comparer, selon le signe de L , le risque induit par les deux stratégies suivantes :

1. la stratégie consistant à investir à la date 0 en bons courts, puis à renouveler cet investissement en bons courts. Le rendement à la date 2 de cette stratégie est inconnu à la date 0 ;
2. la stratégie consistant à investir à la date 0 en bons longs, et à conserver ces bons jusqu'à leur échéance. Le rendement à la date 2 est ici parfaitement connu.

⁵Pour ce faire, il suffit de réarranger (2.36) en

$$L = \frac{1}{\eta \mathbb{E}(\mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2)))} \left\{ \mathbb{E}(u'(\tilde{c}^1)) - \mathbb{E} \left(\frac{u'(\tilde{c}^1)}{\mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2))} \right) \times \mathbb{E}(\mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2))) \right\},$$

puis, utilisant la règle des espérances imbriquées, en

$$L = \frac{1}{\eta \mathbb{E}(u'(\tilde{c}^2))} \left\{ \mathbb{E} \left(\frac{u'(\tilde{c}^1)}{\mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2))} \times \mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2)) \right) - \mathbb{E} \left(\frac{u'(\tilde{c}^1)}{\mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2))} \right) \times \mathbb{E}(\mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2))) \right\},$$

ce qui est bien (2.37).

Lorsque par exemple $L > 0$, les préférences des individus s'analysent de la façon suivante.

Si le taux court à la date 1 s'avère « élevé » (c'est-à-dire au-dessus de la moyenne), l'espérance de l'utilité marginale de la consommation à la date 2 sera également élevée. Cette espérance élevée signifie que les individus s'attendent à ce que la consommation soit particulièrement *désirable* à la date 2. Du point de vue de la date 0, ils perçoivent donc que l'investissement renouvelé (au taux \tilde{r}^1 inconnu) procure des rendements élevés dans les situations où ces rendements sont justement fort appréciés. Dans ces conditions, l'investissement renouvelé est lui-même apprécié, et il doit à l'équilibre offrir un rendement espéré plus faible que l'investissement long, dont les rendements non-aléatoires ne possèdent pas les propriétés évoquées ci-dessus.

L'aversion pour le risque ayant été admise, l'utilité marginale $u'(\cdot)$ est strictement décroissante, et l'analyse ci-dessus peut être traduite dans les termes suivants : lorsque le taux court s'avère fort à la date 1, les individus s'attendent à une consommation faible à la date 2. Ainsi, l'investissement renouvelé « paye » beaucoup lorsque la consommation est faible, et donc *offre une protection contre le risque d'une faible consommation à la date 2*. Clairement, l'investissement court renouvelé, possède, du point de vue de la protection contre le risque, des caractéristiques supérieures à celles de l'investissement long.

En d'autres termes, lorsque $L > 0$, l'investissement court (renouvelé) peut être considéré comme la stratégie (relativement) sûre, et l'investissement long comme la stratégie (relativement) risquée, *pour financer la consommation à horizon lointain*.

Ceci constitue une illustration directe d'un important principe, issu des modèles d'équilibre intertemporel avec consommation : ce n'est pas parce qu'une stratégie offre un rendement aléatoire qu'elle est forcément considérée comme plus risquée qu'une stratégie au rendement certain.

Le cas $L < 0$ est absolument dual. En terme de risque, par exemple, il implique que les individus anticipent une forte consommation à la date 2 lorsque le taux court s'avère fort. Cela signifie que l'investissement renouvelé paye peu lorsque la consommation est faible (et fortement désirée). L'investissement renouvelé apparaît ici comme la stratégie la plus risquée, et l'investissement long comme la stratégie la plus sûre, pour financer la consommation à la date 2.

En résumé, lorsque $L > 0$ ($L < 0$), l'investissement court est le moyen le plus sûr (le plus risqué) pour financer la consommation à la date 2.

Cette analyse de la prime de liquidité dans le cadre d'un modèle à trois dates met en lumière une faiblesse de la théorie hicksienne : se focalisant sur l'espérance des rendements des deux stratégies à la date 2, elle fait l'impasse sur la date intermédiaire. Or, d'une manière générale, on doit admettre que l'individu souhaite aussi consommer à cette date, et donc *se sent également concerné par le risque de consommation à la date 1*.

À l'évidence, une autre prime doit être définie pour analyser ce risque.

2.4.2 La prime de solidité, une mesure relative au risque de consommation à horizon proche

Le nom de cette prime — la prime de solidité — est en lui-même un clin d'oeil à l'analyse hicksienne. Proposée par Bailey [1964], cette prime est construite de façon tout à fait similaire à la prime de liquidité. Simplement, elle est définie en terme de « prime d'émission » plutôt qu'en terme de taux d'intérêt.

Dans un monde où les taux d'intérêt sont positifs, il est logique qu'un bon sans coupon soit vendu au-dessous de son pair. La différence entre le pair et le prix à l'émission d'un bon, appelée *prime d'émission*, est alors positive. Soit d^0 l'opposée de la prime d'émission d'un bon court émis à la date 0. Cette « pénalité d'émission » est telle que

$$1 + d^0 = \frac{1}{1 + r^0}. \quad (2.39)$$

La pénalité d'émission pour un bon court à la date 1 est, du point de vue de la date 0, une variable aléatoire \tilde{d}^1 telle que

$$1 + \tilde{d}^1 = \frac{1}{1 + \tilde{r}^1}. \quad (2.40)$$

La pénalité implicite g^0 est définie en fonction du taux implicite f^0 par

$$1 + g^0 = \frac{1}{1 + f^0}. \quad (2.41)$$

La prime de solidité S est égale à la différence entre la pénalité à terme implicite à la structure des taux présente pour un bon court à la date suivante, et l'espérance de la pénalité sur ce même bon :

$$S \equiv g^0 - E(\tilde{d}^1). \quad (2.42)$$

Les équations ci-dessus, avec la définition de f^0 , permettent de montrer que S est un concept de prime relatif à la date 1 :

$$(1 + R)^2 S = (1 + r^0) - \mathbb{E} \left(\frac{(1 + R)^2}{1 + \tilde{r}^1} \right). \quad (2.43)$$

Le premier terme du membre droit de cette équation est le rendement, à la date 1, d'un investissement unitaire en bons courts à la date 0. Dans le second terme, $(1 + R)^2 / (1 + \tilde{r}^1)$ représente le rendement aléatoire d'une stratégie consistant à investir, à la date 0, une unité en bons longs, puis à revendre à la date 1 ces bons. Au moment de la revente, ces bons deviennent strictement équivalents à des bons courts, et sont donc évalués sur le marché des bons courts. La prime S apparaît donc comme une mesure de l'excès du rendement de l'investissement court sur l'espérance de l'investissement long liquidé précocement.

Dans le cadre du modèle de structure des taux, la prime S est une mesure explicite du risque de consommation à la date 1.

L'intégration des expressions de taux d'équilibre (2.29) à (2.32) dans l'équation (2.43) ci-dessus mène à

$$S = \eta \left\{ \frac{\mathbb{E}(u'(\tilde{c}^1))}{\mathbb{E}(u'(\tilde{c}^2))} - \mathbb{E} \left(\frac{\mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2))}{u'(\tilde{c}^1)} \right) \right\}. \quad (2.44)$$

Toujours suivant McCulloch [1975] et Woodward [1983], cette équation est réécrite sous la forme⁶

$$S = \frac{\eta}{\mathbb{E}(u'(\tilde{c}^1))} \text{Cov} \left(\frac{\mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2))}{u'(\tilde{c}^1)}, u'(\tilde{c}^1) \right). \quad (2.45)$$

Le premier argument de la covariance est le prix futur d'un bon court. Ainsi, la prime S est donnée par

$$S = \frac{\eta}{\mathbb{E}(u'(\tilde{c}^1))} \text{Cov} \left(\frac{1}{1 + \tilde{r}^1}, u'(\tilde{c}^1) \right). \quad (2.46)$$

⁶L'équation (2.44) peut s'écrire en effet

$$S = \frac{\eta}{\mathbb{E}(u'(\tilde{c}^1))} \left\{ \mathbb{E} \left(\frac{\mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2))}{u'(\tilde{c}^1)} \times u'(\tilde{c}^1) \right) - \mathbb{E} \left(\frac{\mathbb{E}_m(u'(\tilde{c}^2))}{u'(\tilde{c}^1)} \right) \times \mathbb{E}(u'(\tilde{c}^1)) \right\}.$$

Le signe de S est égal au signe de la covariance entre le prix court futur et l'utilité marginale de la consommation à la date 1.

En terme de consommation, les préférences des individus s'analysent de la façon suivante.

Soit par exemple $S > 0$. Dans ce cas, si le taux court à la date 1 s'avère faible, l'utilité marginale de la consommation à cette date sera forte, et, donc, la consommation sera fortement désirée. Mais, si le taux court est faible, la revente précoce d'un bon long procure un fort rendement. La stratégie d'investissement en bons longs paye beaucoup lorsque les rendements sont particulièrement appréciés, et, inversement, paye peu lorsqu'ils sont, au contraire, peu attirants. *Ceteris paribus*, les investisseurs vont donc avoir tendance à choisir les titres longs, parce que le rendement des titres courts (non-aléatoires à l'horizon court) n'ont pas ces caractéristiques. Ceci justifie l'existence d'un rendement anticipé comparativement plus faible sur la stratégie initiée par l'achat de bons longs.

Comme $u''(.) < 0$, le cas $S > 0$ s'interprète aisément en terme de risque de consommation à la date 1. Si le taux court à cette date s'avère faible, la consommation sera également faible. La stratégie d'achat de bons longs et de revente précoce offre donc de forts rendements dans des situations de faible consommation. Cette stratégie est donc perçue par les individus, adverses au risque, comme un moyen de se protéger contre le risque d'une faible consommation à la date 1.

Ainsi, lorsque $S > 0$, le bon long (liquidé) peut être considéré comme l'instrument (relativement) risqué, *pour financer la consommation à horizon proche*. Comme dans le cas $L > 0$, le cas $S > 0$ est tel qu'une stratégie au rendement aléatoire est considérée comme moins risquée qu'une stratégie au rendement certain.

Pour $S < 0$, le raisonnement est absolument symétrique : la stratégie longue paye beaucoup lorsque la consommation à la date 1 est forte, et de ce fait représente un risque plus grand qu'un investissement court. Le bon long apparaît comme l'instrument risqué, et le bon court comme l'instrument sûr.

En résumé, lorsque $S > 0$ ($S < 0$), l'investissement long est le moyen le plus sûr (le plus risqué) pour financer la consommation à la date 1.

2.4.3 Scénarios de prime et théories de la structure des taux

Le principal enseignement de cette étude des primes est le suivant : il n'existe pas de mesure unique du risque, ou, plus précisément, il existe autant de mesures que d'horizons de consommation. Il est donc impossible, dans le cas général, de donner une réponse binaire à la question « l'actif court est-il plus risqué que l'actif long ? ». Par exemple, dans le cadre du modèle à trois dates, s'il est possible d'imaginer une situation telle que $L < 0$ et $S < 0$, le bon court est le moyen le plus sûr pour financer la consommation à la date 1, mais le plus risqué pour financer la consommation à la date 2.

Chacune des réponses possibles à la question ci-dessus est associée à une configuration précise du signe des primes L et S . Une configuration sera ici appelée « scénario ».

Tous les scénarios imaginables ne sont pas *a priori* possibles. En effet, S et L sont définis en terme des mêmes variables aléatoires $u'(\tilde{c}^1)$ et $E_m(u'(\tilde{c}^2))$, combinées selon des expressions soumises à l'inégalité de Jensen.⁷

Les primes L et S ne peuvent être en même temps strictement positives.⁸ Plus précisément, la liste de toutes les implications croisées du signe de L et de S est

$$\begin{aligned}
 L > 0 &\Rightarrow S \leq 0 \\
 L = 0 &\Rightarrow S \leq 0 \\
 S > 0 &\Rightarrow L \leq 0 \\
 S = 0 &\Rightarrow L \leq 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

⁷Voir page 329.

⁸Soit $x = u'(\tilde{c}^1)$ et $y = E_m(u'(\tilde{c}^2))$. Les primes L et S s'expriment comme

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{\eta} \left\{ \frac{E(x)}{E(y)} - E\left(\frac{x}{y}\right) \right\} \\
 S &= \eta \left\{ \frac{E(y)}{E(x)} - E\left(\frac{y}{x}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

où $\eta > 0$.

D'un coté, $L > 0$ implique $E(x)/E(y) > E(x/y)$, qui implique à son tour $E(y)/E(x) < 1/E(x/y)$. De l'autre, $S > 0$ implique $E(y)/E(x) > E(y/x)$. Mais, par Jensen, $E(y/x) \geq 1/E(x/y)$. Ainsi, $S > 0$ implique $E(y)/E(x) \geq 1/E(x/y)$, relation contradictoire avec celle déduite précédemment de $L > 0$.

Suivant Woodward [1983], les cas de nullité de L et de S sont négligés. Il subsiste donc trois scénarios significatifs, correspondant aux différentes combinaisons admissibles de $S < 0$, $S > 0$, $L < 0$ et $L > 0$.

Ces trois scénarios sont examinés ci-après. De plus, des convergences entre ces scénarios et les théories traditionnelles de la structure des taux sont établies.

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction de ce chapitre, ces convergences sont purement phénoménologiques. Notre étude est, en effet, basée sur des hypothèses très différentes de celles invoquées par les théories traditionnelles. En particulier, nous supposons, d'une part, que les individus consomment à chaque date, et, d'autre part, que ces individus sont identiques. En conséquence, les résultats de cette étude ne pourront, en aucun cas, être utilisés pour valider ou invalider ces théories. Simplement, nous montrerons que leurs conclusions peuvent être, dans certains cas, *reproduites* sur la base d'hypothèses différentes.

Le scénario hicksien : $S < 0$ et $L > 0$.

Ce scénario correspond à une situation dans laquelle l'achat de bons courts à la date 0 est le meilleur moyen de se protéger à la fois contre le risque de consommation à la date 1 et à la date 2. L'instrument court est sans ambiguïté plus sûr que l'instrument long, et à ce titre préféré par les investisseurs averses au risque.

Ainsi, dans ce scénario, l'aversion conduit les investisseurs à se porter prioritairement sur les instruments courts, et la structure des taux est donc structurellement croissante. Pour cette raison, et bien que les conditions qui permettent d'obtenir une telle configuration n'aient pas encore été examinées, ce scénario sera baptisé « scénario hicksien ».

Le scénario anti-hicksien : $S > 0$ et $L < 0$.

Ce scénario est tel que l'achat de bons longs représente le plus sûr moyen d'obtenir de la consommation à la date 1 et à la date 2. Qu'il soit revendu précocement, ou détenu jusqu'à son terme, un bon long procure, comparativement à toute stratégie initiée en bons courts, des rendements toujours plus appréciés. La structure des taux est structurellement décroissante.

La situation est donc l'inverse de celle décrite précédemment, et ce scénario sera donc baptisé

« scénario anti-hicksien ».

Le scénario d'habitat préféré : $S < 0$ et $L < 0$.

Ce cas correspond à une situation dans laquelle l'achat de bons courts offre une bonne protection contre une faible consommation à la date 1, et l'achat de bons longs une bonne protection contre une faible consommation à la date 2. En d'autres termes, lorsque ce scénario est actif, le meilleur moyen de financer une consommation à une certaine date est de détenir des bons dont l'échéance est précisément égale à cette date. La pente de la structure des taux est ici de signe indéterminé.

Une telle situation peut être mise en rapport avec la théorie de Modigliani et Sutch, et, en particulier, avec l'enchaînement logique suivant : supposant que les prêteurs ont des préférences déterminées quant à la longueur de temps pendant laquelle ils veulent garder leurs fonds investis (leur « habitat préféré »), Modigliani et Sutch affirment que, *ceteris paribus*, ces prêteurs manifesteront une nette tendance à acquérir des titres dont la maturité est celle de leur habitat (voir citation page 41).

L'intérêt des modèles de structure des taux avec consommation est de montrer que cet enchaînement logique est invalide dans le cas général. En effet, dans le cadre de ces constructions théoriques, un actif n'est pas apprécié par les investisseurs adverses au risque parce qu'il procure des rendements *certain*s, mais parce que ces rendements covarient négativement avec la consommation.

Dans le cas particulier examiné ici, l'enchaînement s'avère valide, et ce scénario sera en conséquence baptisé « scénario d'habitat préféré ».

2.5 Conclusion

Cette section a été consacrée à la mise en place d'un cadre de travail et à la définition d'un certain nombre d'outils, adaptés à l'étude des qualités comparées des bons sans coupon, du point de vue de la gestion du risque.

Un modèle monopériodique de marchés contingents, conforme à la théorie de Arrow et Debreu, a d'abord été exposé. Exprimé dans un univers probabilisable discret, ce modèle a permis d'explicitier de manière intuitive les liens unissant structure de l'incertitude, croyances et comportements de consommation. En particulier, il est apparu qu'un système complet de marchés contingents consti-

tuait un dispositif efficace d'allocation de la consommation intertemporelle. Admettant l'existence d'un tel système, il a été possible d'exprimer le prix d'équilibre d'un bon sans coupon en fonction du prix des droits contingents purs. Sous hypothèse d'homogénéité des agents, le taux d'intérêt a été directement relié à la consommation agrégée.

Afin de pouvoir définir une structure des taux extrêmement simple, ce modèle a ensuite été étendu au cas d'une économie à deux périodes. Cette extension a permis de mettre en lumière un phénomène important, lié à la résolution séquentielle de l'incertitude portant sur les événements lointains : la révision des croyances. Dans ce cadre bipériodique, un taux court et un taux long ont pu être définis. Les équations d'équilibre de ces taux ont, ensuite, été exhibées.

Enfin, s'est posé le problème des outils théoriques nécessaires pour comparer les risques supportés par les détenteurs de bons courts et de bons longs. De ce point de vue, deux concepts de prime ont été retenus : la prime de liquidité et la prime de solidité. L'étude de ces primes a justifié ce choix. Chacune d'elles est apparue comme une mesure du risque relative à un horizon particulier de consommation. Ensemble, elles ont permis de confirmer qu'il n'existait pas de mesure unique du risque d'un actif, mais autant de mesures que d'horizons de consommation. Il s'est alors avéré utile de dresser une liste de cas typiques, définis en terme du signe respectif des primes de liquidité et de solidité. Trois cas, appelés scénarios, ont été retenus et rapprochés des théories traditionnelles de la structure des taux : le scénario hicksien, tel que le bon court puisse être considéré sans ambiguïté comme l'actif sûr, le scénario anti-hicksien, inverse du précédent, et le scénario d'habitat préféré, tel qu'un bon soit considéré comme sûr pour consommer à la date correspondant à son échéance.

Utilisant ce cadre de travail, il sera possible, dans les sections suivantes, d'étudier en détail le problème de la détermination du scénario de prime dans une économie à deux périodes.

Section 3 Scénario de primes en économie d'échange pure

3.1 Introduction

Dans une économie d'échange pure, le droit contingent constitue le seul *media* de l'allocation intertemporelle de consommation. Un individu représentatif n'a, alors, pas d'autre choix que de consommer entièrement la dotation qu'il reçoit à chaque période. Puisque dotations (exogènes) et consommations (endogènes) s'avèrent parfaitement identiques, il est possible de raisonner *comme si* la distribution de la consommation au cours du temps était fixée de façon exogène.

Le modèle précédent montre que cette distribution détermine les prix de marché, les taux d'intérêt, la prime de liquidité et de solidité, et donc le scénario courant. Bien sûr, cette détermination opère *via* les comportements individuels, et donc de manière fort complexe.

Toutefois, on peut penser qu'il est possible, dans une certaine mesure, d'établir des liens directs entre des caractéristiques intéressantes de la distribution de la consommation et les différents scénarios.

Cette démarche a pour objectif d'obtenir des résultats généraux, parce qu'indépendants d'une spécification particulière de la fonction d'utilité des agents. La seule hypothèse cruciale, ici, est celle de l'aversion pour le risque.

Woodward [1983] choisit de travailler dans ce sens en utilisant un modèle à trois dates, similaire à celui précédemment exposé. Raisonnant, en toute généralité, dans le cadre d'une économie où la structure de l'incertitude n'est pas contrainte, elle obtient des résultats importants, mais qui établissent des liens « approximatifs » (le terme est de Woodward) entre les propriétés stochastiques de la consommation et le signe des primes.⁹

Nous choisissons ici une voie différente, consistant à contraindre au préalable la structure de l'incertitude. Notre apport consistera alors à établir, à partir d'un modèle contraint, des liens *directs* entre consommation et primes. Bien entendu, les résultats obtenus à partir d'un modèle moins général que celui de Woodward ne seront pas fondamentalement différents. Toutefois, nous pourrions ici travailler sur ces cas précis (appelés « configurations »), beaucoup plus intuitifs, et forts

⁹La structure des taux en économie d'échange a également été étudiée par Leroy et LaCivita [1981], et Leroy [1982b et 1983].

intéressants à interpréter.

Le choix de la structure de l'incertitude est ici crucial : il doit permettre le développement de l'analyse évoquée ci-dessus, sans exclure pour autant aucun phénomène important intervenant dans la détermination des primes. La structure retenue est présentée en premier lieu dans cette section, ainsi que les simplifications induites sur les distributions de probabilité des variables aléatoires essentielles. Des cas significatifs, permettant de mettre en rapport consommation et scénarios, sont analysés. En particulier, sont évoqués deux phénomènes déterminants : l'effet richesse et l'effet information.

3.2 Le modèle binomial

Le nombre et l'enchaînement des états de la nature entre les trois dates de l'économie sont contraints, de façon à réduire à sa plus simple expression l'incertitude à laquelle doit faire face un individu dans une situation donnée : une *alternative*. Comme deux états peuvent être atteints après chaque état non-terminal, le modèle obtenu est dit binomial.

Ce type de modèle a été utilisé par Benninga et Protopapadakis [1986] pour étudier une économie de production. Nous l'adaptions ici à une économie d'échange.

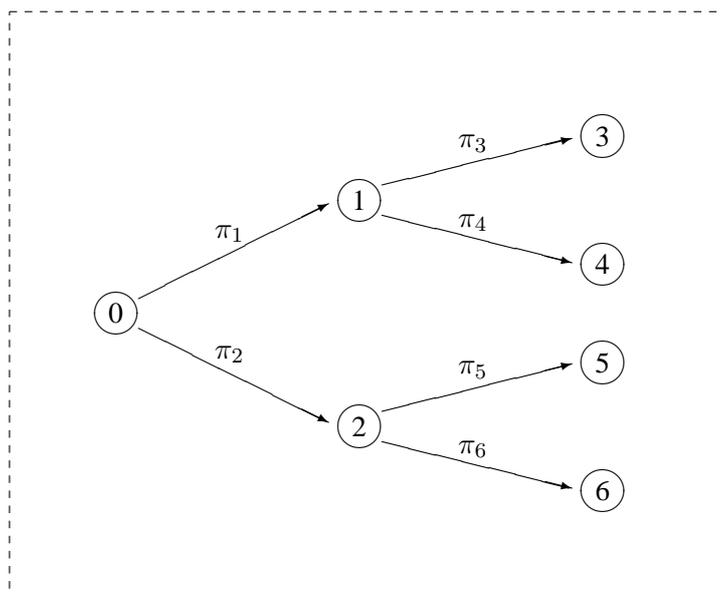
3.2.1 Structure de l'incertitude et des croyances

L'économie considérée est construite comme un cas particulier du modèle à trois dates, décrit dans la section précédente. Toutes les hypothèses de ce modèle sont conservées, et la structure des états est simplement précisée. Cette structure est la suivante.¹⁰

Il existe sept états de la nature, numérotés de 0 à 6. À la date 0, l'économie se trouve dans l'état 0. À la date 1, deux états peuvent survenir : l'état 1 et l'état 2. À la date 3, les quatre états restants sont possibles. Les états 3 et 4 sont accessibles à partir de l'état 1, les états 5 et 6 à partir de l'état 2. Ainsi, à chaque date non-terminale, les individus ne doivent considérer que deux éventualités à la date suivante.

À cette structure correspondent des croyances, exprimées en terme de probabilités subjectives.

¹⁰Les notations utilisées sont construites selon le même principe que précédemment : un exposant indique une date, un indice un état.



Graphe n°1

Soit π_i , pour $i = 1, \dots, 6$, la probabilité accordée à l'état i par l'individu représentatif, *lorsqu'il se trouve dans l'état qui précède i* . Ainsi, par exemple, π_1 désigne la probabilité accordée à l'état 1 (date 1), lorsqu'il se trouve dans l'état 0 (date 0), et π_3 désigne la probabilité de l'état 3 (date 2), exprimée dans l'état 1 (date 1).

Ces probabilités sont liées par

$$\begin{aligned} \pi_1 + \pi_2 &= 1 \\ \pi_3 + \pi_4 &= 1 \\ \pi_5 + \pi_6 &= 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

L'enchaînement des états et les croyances associées peuvent être utilement représentés par un graphe arborescent, tel le graphe n°1.

Les nœuds de ce graphe représentent les états de la nature, et sont numérotés en conséquence. Ces nœuds sont placés en trois colonnes, correspondant, de gauche à droite, à la succession des trois dates du calendrier. Les enchaînements possibles entre les différents états sont matérialisés par des flèches. Sur chaque liaison, la probabilité de transition est indiquée.

Dans cette économie, l'enchaînement des états entre la date 1 et la date 2 est restreint aux liaisons indiquées sur le schéma. Ces restrictions peuvent s'interpréter en terme du processus précédemment évoqué de révision des croyances.

À la date 0, l'individu considère que tous les états de la date 2 sont probables. Il leur accorde les probabilités subjectives suivantes :

État	probabilité
3	$\pi_1 \times \pi_3$
4	$\pi_1 \times \pi_4$
5	$\pi_2 \times \pi_5$
6	$\pi_2 \times \pi_6$

À la date 1, les probabilités accordées aux quatre états dépendent de l'état courant. Ces croyances révisées, conditionnelles à la réalisation de l'état à la date 1, sont les suivantes :

État	pr. si état 1	pr. si état 2
3	π_3	0
4	π_4	0
5	0	π_5
6	0	π_6

Ainsi, par exemple, si l'état 1 survient, l'individu substitue à ses croyances initiales $\pi_1 \times \pi_3$, $\pi_1 \times \pi_4$, $\pi_2 \times \pi_5$ et $\pi_2 \times \pi_6$ ses croyances révisées π_3 , π_4 , 0 et 0.

3.2.2 Prix d'état et taux d'intérêt

Cette structure particulière simplifie considérablement les équations du modèle à trois dates. Ces équations simplifiées, présentées ci-après, seront constamment utilisées dans la suite de ce travail.

La variable c_i désigne, pour $i = 0, \dots, 6$, la consommation optimale dans l'état i , décidée à la date 0.

Le programme du consommateur s'écrit¹¹

$$\max_{\{c_0, \dots, c_6\}} E(V(c^0, \tilde{c}^1, \tilde{c}^2)) \quad (3.2)$$

sous la contrainte

¹¹Comme précédemment, les termes c^0 , \tilde{c}^1 et \tilde{c}^2 désignent, respectivement, la consommation à la date 0, 1 et 2. La fonction $u(\cdot)$ est la fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern de l'individu. Le coefficient η est son taux d'impatience.

$$\begin{aligned}
 E\left(V(c^0, \tilde{c}^1, \tilde{c}^2)\right) &= u(c_0) + \\
 &\quad \eta \{ \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2) \} + \\
 &\quad \eta^2 \pi_1 \{ \pi_3 u(c_3) + \pi_4 u(c_4) \} + \eta^2 \pi_2 \{ \pi_5 u(c_5) + \pi_6 u(c_6) \}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dans la cadre d'une économie d'échange pure, la production ou le stockage du bien de consommation est impossible. Toutes les richesses sont obtenues sous forme de dotations aléatoires, selon un processus totalement hors de contrôle des individus.¹²

L'individu reçoit une dotation initiale en droits purs, contingents aux divers états de la nature. Pour $i = 0, \dots, 6$, la dotation en droits contingents à la réalisation de l'état i , reçue à la date 0, est notée \bar{c}_i . À l'équilibre d'une économie d'échange composée d'individus identiques, les agents consomment toute leur dotation, et n'achètent ni ne vendent aucun titre contingent. Comme $c_i = \bar{c}_i$ pour $i = 0, \dots, 6$, il est possible de raisonner directement à partir de la distribution de la consommation, comme s'il s'agissait d'une donnée exogène.

Soit p_i , pour $i = 1, \dots, 6$, le prix dans l'état précédent i , d'un droit pur contingent à l'état i . Les conditions du premier ordre obtenues dans la section précédente (voir équations (2.23) à (2.25), page 252) indiquent que

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \eta \pi_1 \frac{u'(c_1)}{u'(c_0)} & p_3 &= \eta \pi_3 \frac{u'(c_3)}{u'(c_1)} & p_5 &= \eta \pi_5 \frac{u'(c_5)}{u'(c_2)} \\
 p_2 &= \eta \pi_2 \frac{u'(c_2)}{u'(c_0)} & p_4 &= \eta \pi_4 \frac{u'(c_4)}{u'(c_1)} & p_6 &= \eta \pi_6 \frac{u'(c_6)}{u'(c_2)}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Suivant Arrow et Debreu, ces prix sont appelés les « prix d'état ». Ils sont tels que les individus jugent optimal de consommer exactement leurs dotations.¹³

¹²Pour illustrer métaphoriquement le fonctionnement d'une économie d'échange pure, Robinson Crusoe est souvent mis à contribution : soit un ensemble d'îles, assez proches pour que l'on puisse communiquer de l'une à l'autre. Sur chacune d'elles vit un individu et pousse un arbre fruitier (par exemple un bananier). De chaque arbre tombe périodiquement un certain nombre de bananes, ce nombre étant déterminé par les conditions climatiques aléatoires de la période. Ces bananes étant périssables, il n'est pas possible de les stocker.

Dans ce contexte, chaque individu va chercher à gérer au mieux les risques que font porter les aléas climatiques sur sa consommation future de bananes, en échangeant, avec les autres, des bananes contre des promesses de livraison future de bananes. Ces promesses sont contingentes aux divers éléments climatiques qui peuvent survenir (« beau temps », « mauvais temps », ...).

¹³Ces prix sont des prix réels, exprimés en unités de bien de consommation à des dates différentes. Pour une intégration explicite de l'inflation, voir par exemple Long [1974], Benninga et Protopapadakis [1983] et Leroy [1984] pour une modélisation en temps discret, et Cox, Ingersoll et Ross [1981 et 1985b] pour une modélisation en temps continu.

Soit r_i , pour $i = 0, \dots, 2$, le taux court dans l'état i . Ces taux sont donnés par

$$\frac{1}{1+r_0} \equiv p_1 + p_2 \qquad \frac{1}{1+r_1} \equiv p_3 + p_4 \qquad \frac{1}{1+r_2} \equiv p_5 + p_6. \quad (3.5)$$

La variable \tilde{r}^1 désigne comme précédemment le taux court (aléatoire) à la date 1.

D'après la condition du premier ordre (2.26) (page 252) et l'expression du taux long d'équilibre (2.30) (page 252), le taux long R à la date 0, dans l'état 0, est ici

$$\frac{1}{(1+R)^2} \equiv p_1(p_3 + p_4) + p_2(p_5 + p_6). \quad (3.6)$$

3.2.3 Primes et distribution de la consommation

Comparativement au modèle à trois dates, exposé dans la première section principale de ce chapitre, le modèle binomial est évidemment moins général. Mais, par contrecoup, son extrême simplicité permet de travailler directement sur l'expression détaillée des distributions de probabilité impliquées dans la détermination du signe des primes.

La prime de liquidité est toujours donnée par

$$L = \frac{1}{\eta E(u'(\tilde{c}^2))} \text{Cov} \left(1 + \tilde{r}^1, E_m(u'(\tilde{c}^2)) \right), \quad (3.7)$$

où $E_m(u'(\tilde{c}^2))$ est l'espérance de l'utilité marginale de la consommation à la date 2, conditionnelle à la réalisation de l'état de la nature à la date 1.

Dans ce modèle, les lois de probabilité des variables aléatoires, arguments de la covariance ci-dessus, s'expriment par une seule alternative. Compte tenu des prix d'état (3.4) et des définitions (3.5), la distribution de la variable aléatoire $1 + \tilde{r}^1$ peut être décrite par

$$1 + \tilde{r}^1 = \begin{cases} 1 + r_1 = \frac{u'(c_1)}{\eta\{\pi_3 u'(c_3) + \pi_4 u'(c_4)\}} & \text{avec une probabilité } \pi_1 \\ 1 + r_2 = \frac{u'(c_2)}{\eta\{\pi_5 u'(c_5) + \pi_6 u'(c_6)\}} & \text{avec une probabilité } \pi_2. \end{cases} \quad (3.8)$$

De même, la loi de $E_m(u'(\tilde{c}^2))$ s'exprime par l'alternative

$$E_m(u'(\tilde{c}^2)) = \begin{cases} E_1(u'(\tilde{c}^2)) = \eta^2 \{ \pi_3 u'(c_3) + \pi_4 u'(c_4) \} & \text{avec une pr. } \pi_1 \\ E_2(u'(\tilde{c}^2)) = \eta^2 \{ \pi_5 u'(c_5) + \pi_6 u'(c_6) \} & \text{avec une pr. } \pi_2. \end{cases} \quad (3.9)$$

La prime de solidité

$$S = \frac{\eta}{E(u'(\tilde{c}^1))} \text{Cov} \left(\frac{1}{1 + \tilde{r}^1}, u'(\tilde{c}^1) \right) \quad (3.10)$$

peut être examinée de façon identique. Les variables aléatoires sont

$$\frac{1}{1 + \tilde{r}^1} = \begin{cases} \frac{1}{1+r_1} = \frac{\eta \{ \pi_3 u'(c_3) + \pi_4 u'(c_4) \}}{u'(c_1)} & \text{avec une probabilité } \pi_1 \\ \frac{1}{1+r_2} = \frac{\eta \{ \pi_5 u'(c_5) + \pi_6 u'(c_6) \}}{u'(c_2)} & \text{avec une probabilité } \pi_2 \end{cases} \quad (3.11)$$

et

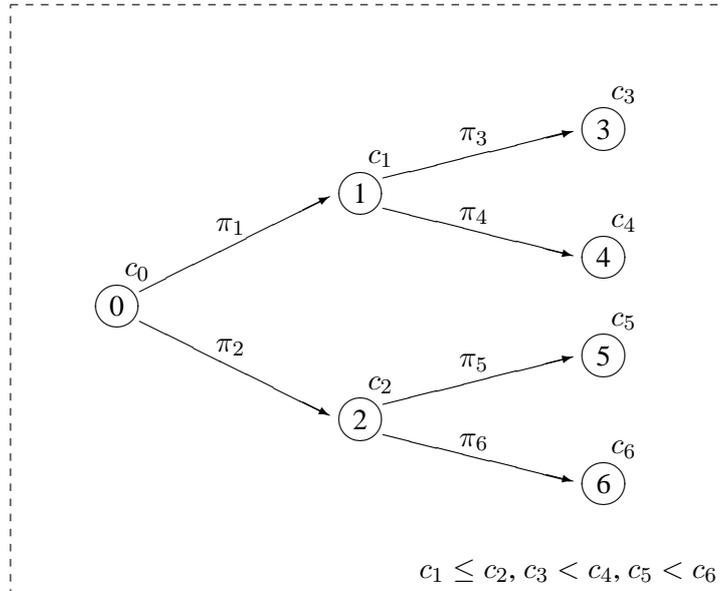
$$u'(\tilde{c}^1) = \begin{cases} u'(c_1) & \text{avec une probabilité } \pi_1 \\ u'(c_2) & \text{avec une probabilité } \pi_2. \end{cases} \quad (3.12)$$

L'expression des quatre distributions ci-dessus montre bien qu'un lien direct, entre distribution de la consommation et scénario de primes, peut être établi en recherchant des configurations particulières de consommation $\{c_1, \dots, c_6\}$ et/ou de probabilité $\{\pi_3, \dots, \pi_6\}$, telles que pour chaque variable aléatoire, le sens de l'inégalité liant ses deux réalisations soit déterminé de façon non-ambiguë.

Pour asseoir l'interprétation économique de ces configurations, les conditions arbitraires suivantes sont imposées :

$$c_1 \leq c_2 \qquad c_3 < c_4 \qquad c_5 < c_6. \quad (3.13)$$

Ces trois inégalités permettent d'éviter un certain nombre de configurations symétriques, sans intérêt additionnel, et ne sont donc, en aucune manière, restrictives. Elles signifient simplement que, conventionnellement, les états 1, 3 et 5 correspondent à de « mauvaises » réalisations, et les états 2, 4 et 6, à de « bonnes » réalisations.



Graphe n°2

Une configuration est représentée à l'aide d'un graphe, similaire au graphe n°1. Les informations suivantes sont ajoutées :

- près de chaque nœud, la variable représentative de l'état correspondant ;
- en bas à gauche, les contraintes définissant la configuration ;
- en bas à droite, les contraintes conventionnelles.

Ainsi, par exemple, la configuration de départ (non-contrainte) est représentée par le graphe n°2.

Les distributions de probabilité des variables arguments des covariances indiquent que, pour déterminer le signe de L et de S , il est nécessaire de statuer sur le sens des inégalités liant, d'une part, $u'(c_1)$ à $u'(c_2)$, et, d'autre part, $E_1(u'(\tilde{c}^2))$ à $E_2(u'(\tilde{c}^2))$.

Si $c_1 \neq c_2$, la distribution de la variable aléatoire \tilde{c}^1 est non-dégénérée. La convention $c_1 \leq c_2$ et la décroissance stricte de l'utilité marginale impliquent alors

$$u'(c_1) > u'(c_2). \tag{3.14}$$

Il reste donc à examiner le sens de la deuxième relation. Les deux cas intéressants sont successivement analysés.

3.3 le cas de « corrélation négative »

Lorsque les deux relations sont de sens opposé, le scénario courant est déterminé sans ambiguïté. Comme $u'(c_1) > u'(c_2)$, la deuxième relation est

$$E_1(u'(\tilde{c}^2)) < E_2(u'(\tilde{c}^2)). \quad (3.15)$$

Ces inégalités indiquent que l'utilité marginale de la consommation à la date 1 est négativement corrélée avec l'espérance conditionnelle de l'utilité marginale de la consommation à la date 2.

Une interprétation de cette situation est donnée ci-après, puis un certain nombre de configurations significatives sont commentées.

3.3.1 Le scénario d'habitat préféré

L'expression des distributions de probabilité montre que $L < 0$ et $S < 0$. Le scénario courant est donc le scénario d'habitat préféré, tel qu'un bon représente l'instrument le plus sûr pour financer la consommation à un horizon correspondant à sa maturité.

Une interprétation en terme de taux d'intérêt est nécessaire.

Supposons, par exemple, qu'à la date 1 l'économie se trouve dans le mauvais état (l'état 1). Relativement à l'état 2, l'économie est « pauvre » (c_1 est plus petit que c_2) et l'utilité marginale à la date 1 est donc forte. Du fait de la corrélation négative, les individus s'attendent à une faible utilité marginale à la date 2, c'est-à-dire à une *amélioration des perspectives de consommation*, comparativement à ce qu'auraient été ces perspectives si l'économie s'était trouvée dans l'état 2.

La situation est donc telle qu'une consommation fortement désirée à la date 1 correspond à une consommation (anticipée) faiblement désirée à la date 2. Ainsi, dans l'état 1, les individus sont particulièrement réticents à retarder leur consommation, et exigent donc un taux particulièrement fort pour accepter de la faire.

En résumé, à un état pauvre (riche) à la date 1 correspond un taux court élevé (faible) :

$$c_1 < c_2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + r_1 > 1 + r_2. \quad (3.16)$$

C'est le caractère non-ambiguë de la relation entre r_1 et r_2 qui explique la simplicité de ce premier cas : si le taux court est fort dans l'état de faible consommation, la revente précoce d'un bon long procure sans ambiguïté des rendements faibles dans une situation où ils sont fortement désirés. Un bon long est donc plus risqué qu'un bon court, pour financer la consommation à la date 1 (d'où $S < 0$). De même, un investissement court renouvelé procure des rendements élevés, dans une situation anticipée comme meilleure, et constitue donc un moyen relativement risqué pour financer la consommation à la date 2 (d'où $L < 0$).

Les résultats ci-dessus sont obtenus à partir d'une inégalité contraignant la distribution de probabilité de l'espérance de l'utilité marginale à la date 2, conditionnelle à la réalisation de l'état à la date 1. Dans le cadre de ce modèle, il est possible d'exhiber certaines configurations de consommation et de croyances qui *impliquent* cette inégalité, et ainsi d'établir un lien direct entre les propriétés stochastiques de la consommation et le scénario courant.

Après division par le coefficient $\eta > 0$, l'équation (3.15) s'exprime sous la forme

$$\pi_3 u'(c_3) + \pi_4 u'(c_4) < \pi_5 u'(c_5) + \pi_6 u'(c_6). \quad (3.17)$$

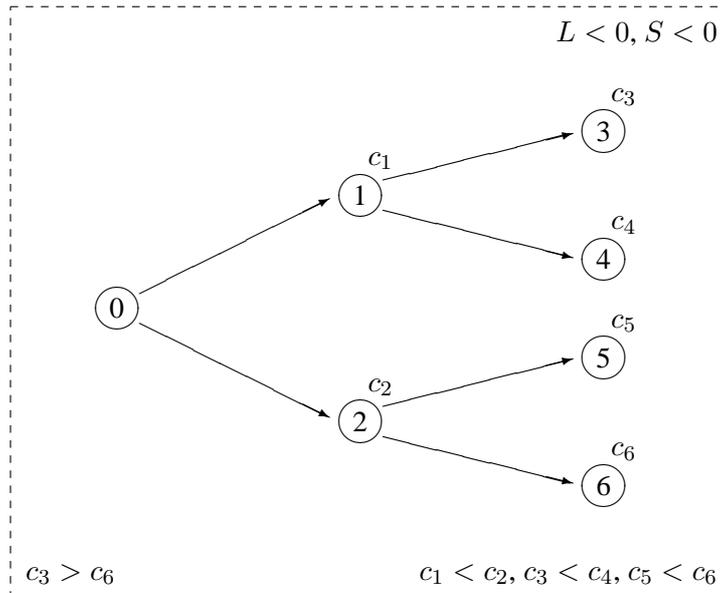
Cette relation signifie qu'à la date 1, dans l'état 1, l'individu juge la consommation à la date 2 comme étant *moins attirante* que s'il s'était trouvé dans l'état 2. En d'autres termes, l'individu considère qu'à la date 1 l'incertitude à laquelle il aura à faire face lui sera plus favorable s'il se trouve dans l'état 1.

3.3.2 Trois configurations significatives

Ce jugement synthétique, porté par l'individu sur les perspectives qui s'offrent à lui à partir de l'état 1 et 2, est conservé dans trois configurations significatives.

Première configuration

La contrainte-clef de cette configuration, représentée par le graphe n°3, est $c_3 > c_6$. Pour améliorer la lisibilité des graphes, seules les variables contraintes sont indiquées. Le signe des primes est porté en haut à droite.



Graphe n°3

Les inégalités définissant cette configuration peuvent être exprimées sous la forme $(c_5 < c_6) < (c_3 < c_4)$. La situation après l'état 1 est *dans tous les cas* meilleure, en terme de niveau de consommation, qu'après l'état 2. Les perspectives de consommation sont donc sans ambiguïté jugées globalement meilleures dans l'état 1, et la consommation à la date 2 (marginale) moins attirante.

Graphiquement, cette situation très simple peut être illustrée par le schéma n°10. Sur ce schéma, la courbe d'utilité marginale, soumise à $u''(c) < 0$, est décroissante. Sa forme convexe n'est pas liée aux hypothèses du modèle. La fonction qui associe $\pi_3 c_3 + \pi_4 c_4$ à $E_1(u'(\tilde{c}^2))$ pour toute probabilité π_3 est représentée par le segment de droite $A_3 A_4$. Pour une valeur de π_3 donnée, le segment est touché au point B_3 telle qu'une proportion π_3 de la longueur de ce segment se trouve à droite de B_3 . Les points A_5, A_6 et B_5 sont définis de manière similaire.

Clairement, quels que soient π_3 et π_5 , l'ordre dans lequel sont rangées les abscisses impose, compte tenu de la décroissance stricte de $u'(c)$, le respect de l'équation (3.17). Formellement, ceci se démontre très simplement : (i) $c_5 < c_6$ implique $u'(c_5) > u'(c_6)$ car l'utilité marginale est strictement décroissante, soit encore $0 < u'(c_5) - u'(c_6)$. Multipliant par le scalaire $\pi_5 \geq 0$, puis ajoutant $u'(c_6)$ aux deux membres, il vient $u'(c_6) \leq \pi_5 u'(c_5) + (1 - \pi_5) u'(c_6)$. (ii) Partant maintenant de $c_3 < c_4$, une procédure similaire permet d'obtenir $u'(c_3) \geq \pi_3 u'(c_3) + (1 - \pi_3) u'(c_4)$. (iii) $c_6 < c_3$ implique $u'(c_6) > u'(c_3)$. Croisant les trois relations ci-dessus, on obtient bien (3.17).

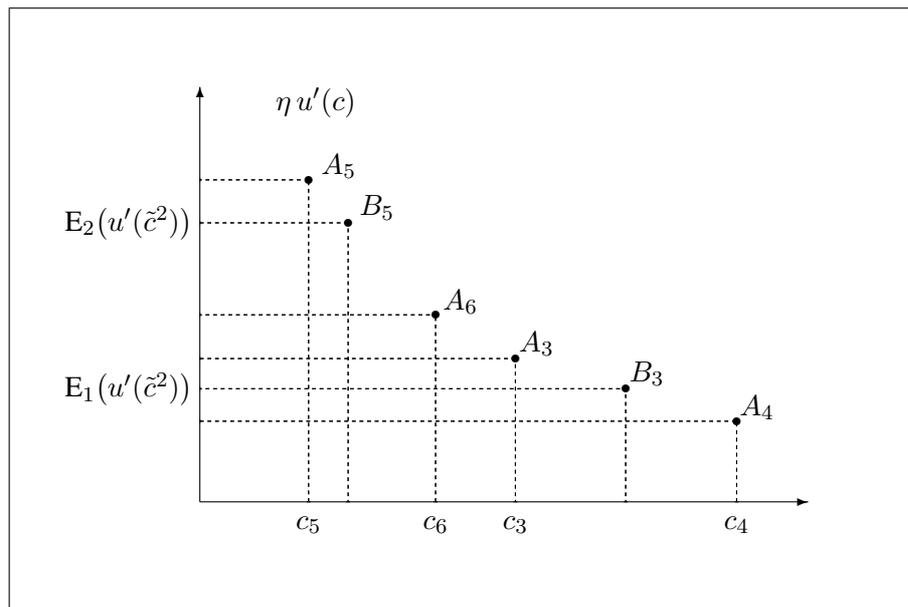


Schéma n° 10 : Un cas simple de corrélation négative.

Sur ce cas simple, on peut également montrer, selon un procédé identique, que $\pi_3 u(c_3) + \pi_4 u(c_4) > \pi_5 u(c_5) + \pi_6 u(c_6)$, c'est-à-dire que l'utilité accordée à la « loterie » disponible dans l'état 1 est supérieure à celle disponible dans l'état 2.

En résumé, cette configuration est telle que la consommation soit toujours plus forte après une période de faible consommation qu'après une période de forte consommation.

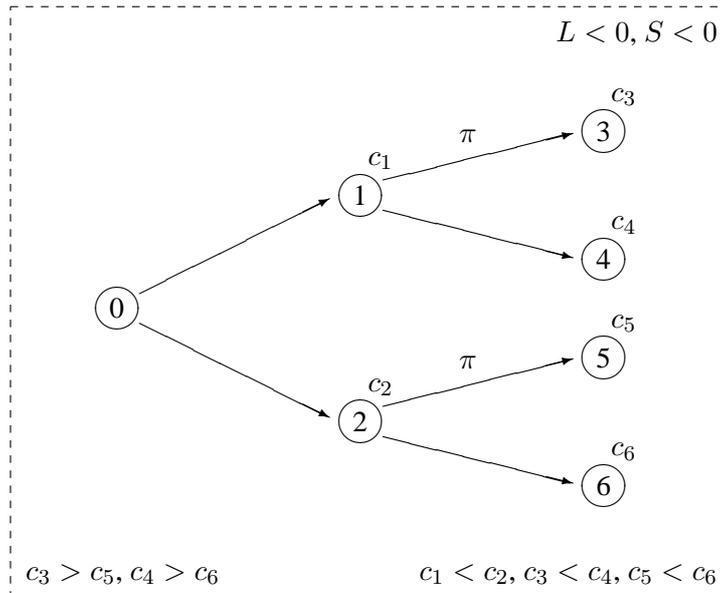
Deuxième configuration

Le graphe n°4 indique les contraintes suivantes : $c_3 > c_5$, $c_4 > c_6$ et $\pi_3 = \pi_5$.¹⁴

Du point de vue de la consommation, cette configuration est moins restrictive que la précédente. Elle impose simplement que les états successeurs de l'état pauvre 1 soient toujours meilleurs que les états correspondants, successeurs de l'état riche 2 (le mauvais état 3 est meilleur que le mauvais état 5, et le bon état 4 est meilleur que le bon état 6).

La nécessité d'imposer dans ce cas une contrainte sur les croyances apparaît en examinant de nouveau le schéma n° 10. La présente configuration autorise une inversion de l'ordre des abscisses c_6 et c_3 , c'est-à-dire une situation telle que l'éventualité pauvre c_3 , suivant l'état 1, reste plus pau-

¹⁴Cette dernière contrainte est implicite sur le schéma, du fait de l'indication π portée sur les branches hautes à la date 2.



Graphe n°4

vre que la meilleure possibilité après l'état 2. Sans contrainte sur les croyances, il est possible que l'individu juge plus favorablement l'incertitude à laquelle il fait face dans l'état 2 : il suffit de poser que l'issue défavorable après l'état 1 soit (suffisamment) probable, et que l'issue défavorable après l'état 2 soit (suffisamment) improbable. Sur le schéma, les ordonnées $E_1(u'(\tilde{c}^2))$ et $E_2(u'(\tilde{c}^2))$ se croisent alors, renversant le jugement de l'individu.

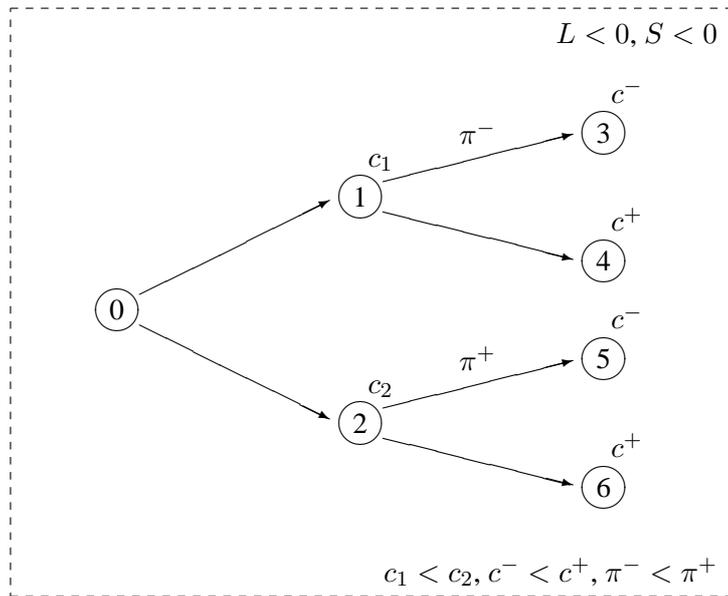
La contrainte $\pi_3 = \pi_5$ interdit un tel renversement.

Dans l'économie ici décrite, une issue défavorable à la date 1 s'accompagne d'une amélioration générale des perspectives, exprimée par un « glissement vers le haut » des consommations possibles.

Troisième configuration

Le graphe n°5, correspondant à cette configuration, indique que les issues sont identiques dans l'état 1 et dans l'état 2, et que seules les probabilités changent. L'issue défavorable (c^-) dans l'état 1 est moins probable (π^-).

Le schéma n°11, équivalent du schéma n°10 pour cette configuration, montre immédiatement qu'il n'y peut pas y avoir d'ambiguïté sur le résultat. Comme $\pi^- < \pi^+$, B^+ est à gauche de B^- sur le segment A^-A^+ , et donc $E_1(u'(\tilde{c}^2)) < E_2(u'(\tilde{c}^2))$. Formellement, $\pi^- < \pi^+$ implique



Graphe n°5

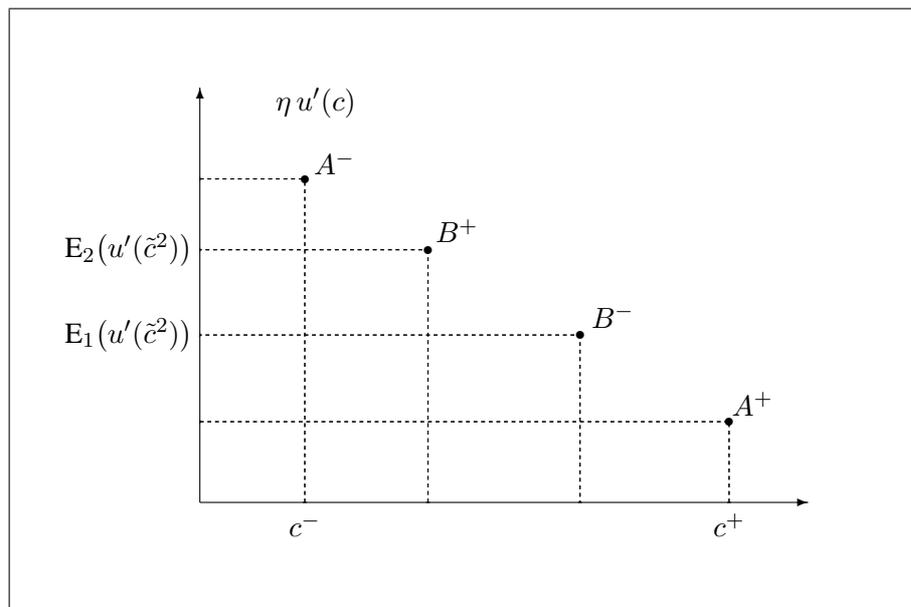


Schéma n°11 : Un autre cas simple de corrélation négative.

$\pi^-(u'(c^-) - u'(c^+)) < \pi^+(u'(c^-) - u'(c^+))$ car $c^- < c^+$ implique $u'(c^-) > u'(c^+)$. Ajoutant $u'(c^+)$ aux deux membres, on obtient $\pi^-u'(c^-) + (1 - \pi^-)u'(c^+) < \pi^+u'(c^-) + (1 - \pi^+)u'(c^+)$, ce qui est bien l'adaptation de (3.17) au cas ici traité.

Dans cette troisième configuration, les événements à la date 2 ne dépendent pas de l'état à la date 1, mais la survenance d'un état défavorable à cette date augmente la probabilité d'une bonne issue et diminue la probabilité d'une mauvaise issue : il y a distorsion des probabilités en faveur de l'état 1.

3.4 le cas de « corrélation positive »

Compte tenu des conventions adoptées, la corrélation positive entre l'utilité marginale de la consommation à la date 1 et l'espérance conditionnelle de l'utilité marginale à la date 2 s'exprime par $u'(c_1) > u'(c_2)$ et $E_1(u'(\tilde{c}^2)) > E_2(u'(\tilde{c}^2))$.

3.4.1 Effet richesse et effet information

Les deux inégalités ci-dessus signifient que l'occurrence d'un mauvais état à la date 1 conduit les individus à réviser à la hausse la satisfaction marginale qu'ils pensent pouvoir atteindre à la date 2.

La distribution de probabilité du taux d'intérêt à la date 1,

$$1 + \tilde{r}^1 = \begin{cases} 1 + r_1 = u'(c_1)/E_1(u'(\tilde{c}^2)) & \text{avec une probabilité } \pi_1 \\ 1 + r_2 = u'(c_2)/E_2(u'(\tilde{c}^2)) & \text{avec une probabilité } \pi_2. \end{cases} \quad (3.18)$$

montre bien que la relation entre r_1 et r_2 est ambiguë, et donc que le scénario courant est indéterminé.

Ceci s'explique aisément en terme de consommation : si, par exemple, l'économie se trouve dans le mauvais état à la date 1, l'utilité marginale de la consommation à cette date est forte, et la consommation est donc fortement désirée. Mais, du fait de la corrélation positive, l'individu prévoit une utilité marginale forte à la date 2, et la consommation à la date 2 est donc également fortement désirée. Un individu est donc soumis à deux forces contradictoires : la première l'incite à avancer sa consommation, la deuxième à la retarder. Pour savoir si le taux d'intérêt dans l'état 1 est plus ou

moins élevé que dans l'état 2, il est donc nécessaire d'imposer la domination d'une de ces forces sur l'autre.

L'identification préalable de ces deux forces peut être réalisée en analysant précisément les effets de la découverte de l'état à la date 1.

En premier lieu, la révélation de cet état apporte une information à un individu sur l'instant présent (la date 1), dans la mesure où elle transforme une situation jugée incertaine (du point de vue de la date 0) en une situation certaine. En d'autres termes, la révélation de sa richesse soulage un individu du fait qu'elle lui permet d'y voir plus clair sur la date 1.

Parce que cet individu est ici directement intéressé par le contenu « brut » de l'information qui arrive à la date 1, nous appellerons « effet richesse » les conséquences de cet apport d'information sur la date 1.¹⁵

En second lieu, l'état réalisé à la date 1 peut représenter une information sur le futur. Cette information est utilisée par l'individu pour réviser ses croyances, précédemment établies, quant à l'état qui pourrait survenir à la date 2, et permet donc de transformer une situation « très incertaine » en situation « moins incertaine ». En d'autres termes, la révélation de sa dotation est appréciée par l'individu parce qu'elle lui permet d'y voir un peu plus clair sur la date 2.¹⁶

Ici, l'individu n'est pas directement intéressé par le contenu brut de l'information à la date 1 (c'est-à-dire par le fait que sa dotation se révèle être \bar{c}_1 ou \bar{c}_2), mais par les conclusions qu'il peut en tirer quant à ses dotations futures. Le mécanisme fondamental est ici la *révision des anticipations*, suite à l'arrivée d'une information sur le futur, et nous qualifierons « d'effet information » l'effet induit par l'information arrivée à la date 1 sur la date 2.

Les conséquences de la domination de chacun de ces deux effets sont analysées ci-après.

3.4.2 Domination de l'effet richesse et scénario hicksien

Lorsque l'effet richesse domine l'effet information, l'information qui arrive à la date 1 concerne « avant tout » la date 1.

¹⁵Day [1986] utilise le qualificatif « d'effet dotation ». Dans la mesure où un effet similaire sera examiné dans la cadre d'une économie de production, nous préférons utiliser « effet richesse ».

¹⁶Ceci pourrait être, par exemple, associé à la publication d'un indicateur avancé des conditions économiques futures.

Aux yeux d'un individu, la réalisation de l'état à la date 1 apporte une information importante sur sa situation actuelle, et il juge donc sa situation très différente de celle qui aurait prévalu s'il s'était trouvé dans l'autre état. Si, par exemple, l'état courant est l'état 1, il ne se considère pas *pauvre*, mais véritablement *très pauvre*. Son utilité marginale est donc très forte dans l'état 1, et il est fortement attiré par la consommation présente.

Face à cela, il modifie ses anticipations dans le sens d'une dégradation des perspectives de consommation, conformément à l'hypothèse de corrélation positive. Mais cette dégradation reste modeste, et en tous cas *pas assez importante pour qu'à ses yeux la consommation dans l'état 2 apparaisse plus attirante que la consommation dans l'état 1*.

Comme l'accroissement de l'attraction pour le présent l'emporte sur l'accroissement de l'attraction pour le futur, l'état défavorable 1 est sans ambiguïté un état dans lequel le taux court est élevé.

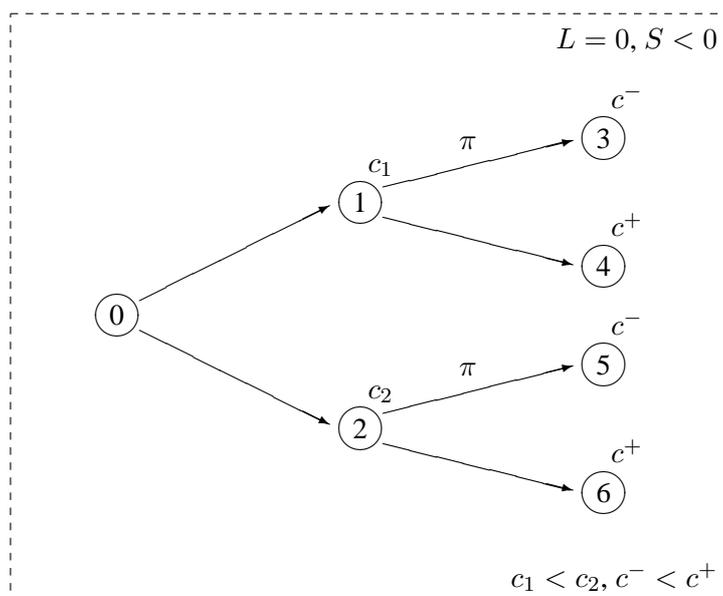
De ce point de vue, la situation est identique à celle qui prévalait dans le cas de corrélation négative, et on obtient bien $S < 0$. Par contre, l'incertitude qui suit l'état 1 est ici jugée défavorablement par l'individu. Dans cet état, il considère que le futur apportera globalement des satisfactions faibles, et la consommation à la date 2 est donc appréciée. Comme le taux à la date 1 est fort, l'investissement renouvelé offre de hauts rendements à la date 2. On a donc $L > 0$.

Ainsi, lorsque l'utilité marginale de la consommation à la date 1 est positivement corrélée à l'espérance conditionnelle de l'utilité marginale à la date 2, la domination de l'effet richesse joue en faveur du scénario hicksien.

Il n'est pas facile de trouver des configurations précises de consommation et de croyances qui impliquent ce scénario. Par contre, on peut évoquer une configuration qui isole l'effet richesse. Celle-ci est représentée par le graphe n°6.

À la date 1, la structure de l'incertitude à laquelle doit faire face l'individu ne dépend pas de l'état courant. En d'autres termes, la réalisation de l'état à la date 1 n'apporte aucune information sur l'état futur, et les croyances ne sont donc pas révisées.

Définition 1 *L'effet richesse « pur » désigne les conséquences, sur le signe des primes L et S , à la date 0, de l'incertitude qui plane sur l'état à la date 1, lorsque cet état n'est pas susceptible d'apporter une information sur la date 2, c'est-à-dire lorsque l'issue de l'état 3 est égale à l'issue de l'état 5, et l'issue de l'état 4 est égale à l'issue de l'état 6.*



Graphe n°6

Bien que ce cas ne soit pas un cas de corrélation positive ($E_m(u'(\tilde{c}^2))$ est ici non-aléatoire), il permet de montrer que l'effet richesse « pur » impose la négativité de la prime de solidité : introduisant $E_1(u'(\tilde{c}^2)) = E_2(u'(\tilde{c}^2))$ dans la distribution (3.11) et considérant (3.12), il vient $\text{Cov}(1/(1 + \tilde{r}^1), u'(\tilde{c}^1)) < 0$ et donc $S < 0$. Par ailleurs, il est évident que $L = 0$.

Le mécanisme à l'œuvre peut être résumé de la façon suivante : à *avenir inchangé*, les individus qui se trouvent dans une économie déprimée accordent beaucoup d'importance au peu de richesse qu'ils détiennent, et n'accepteront de s'en séparer qu'en contrepartie d'une rémunération élevée.

Pour retrouver le scénario hicksien à partir de cette configuration, il faut y introduire une corrélation positive « suffisamment petite ». Pour préciser ce qualificatif, on utilise une condition nécessaire et suffisante pour que ce scénario soit actif lorsque $u'(\tilde{c}^1)$ est positivement corrélé à $E_m(u'(\tilde{c}^2))$, sous la convention $c_1 < c_2$. D'après les distributions (3.8), (3.9), (3.11) et (3.12), cette condition est

$$u'(c_1) \{ \pi_5 u'(c_5) + \pi_6 u'(c_6) \} > u'(c_2) \{ \pi_3 u'(c_3) + \pi_4 u'(c_4) \}. \quad (3.19)$$

3.4.3 Domination de l'effet information et scénario anti-hicksien

À l'inverse du cas précédent, la réalisation de l'état à la date 1 informe peu l'individu sur sa situation présente, mais résout efficacement l'incertitude qui planait sur sa situation à la date 2.

Dans l'état 1, l'individu considère que sa situation présente est plutôt mauvaise, ce qui accroît légèrement son attirance pour le présent. Par contre, il révisé ses anticipations dans le sens d'une très nette dégradation de sa situation future, ce qui le motive fortement pour retarder sa consommation. Au total, le taux d'intérêt sera plus faible dans l'état pauvre que dans l'état riche.

Le bon long, revendu précocement, apporte des rendements élevés dans un état pauvre et constitue donc une protection pour la consommation à la date 1 ($S > 0$). L'investissement renouvelé procure quant à lui des rendements faibles à la date 2, lorsque la situation à cette date est prévue défavorable. Le bon court est dangereux pour la consommation à la date 2 ($L < 0$). Le scénario courant est anti-hicksien : le bon long est sans ambiguïté l'instrument le plus sûr.

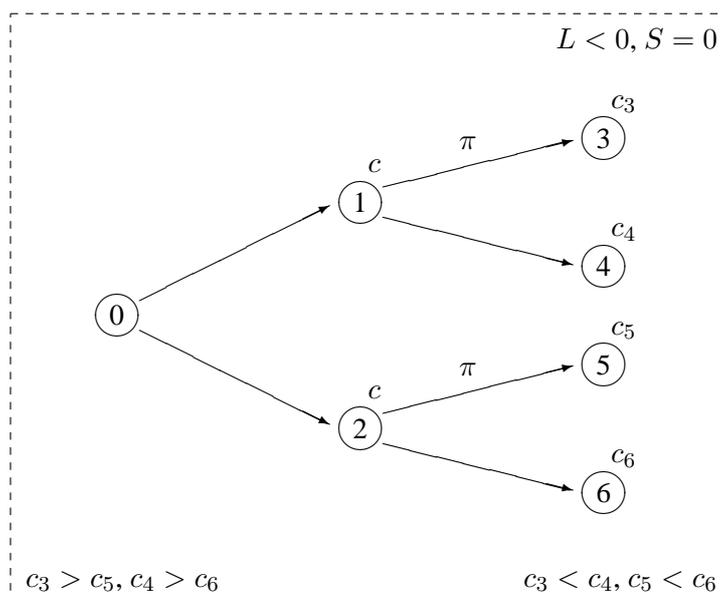
Ainsi, lorsqu'il existe une corrélation positive entre l'utilité marginale à la date 1 et l'espérance conditionnelle de l'utilité marginale à la date 2, la domination de l'effet information joue en faveur du scénario anti-hicksien.

Comme précédemment, l'effet dominant peut être isolé sur des configurations typiques. Les deux configurations qui suivent sont telles que la réalisation de l'état à la date 1 puisse être interprété sans ambiguïté par les individus comme une « mauvaise » ou une « bonne » nouvelle.

Définition 2 *L'effet information « pur » désigne les conséquences, sur le signe des primes L et S , à la date 0, de l'incertitude qui plane sur l'état à la date 1, lorsque cet état est uniquement susceptible d'apporter une information sur la date 2, c'est-à-dire lorsque, d'une part, l'issue de l'état 1 est égale à l'issue de l'état 2, et, d'autre part, l'issue de l'état 3 est différente de l'issue de l'état 5, ou l'issue de l'état 4 est différente de l'issue de l'état 6, ou encore la probabilité de l'état 3 est différente de celle de l'état 5.*

Le graphe n°7 présente la première de ces configurations. La consommation à la date 1 n'est pas aléatoire, et la réalisation de l'état à cette date n'apporte ainsi aucune information nouvelle sur cette date. L'apport d'information sur la date 2 est modélisé par une dégradation systématique des niveaux de consommation possibles après l'état 1 (relativement aux niveaux possibles correspondants après l'état 2).

On montre aisément que $1 + r_1 < 1 + r_2$ et $E_1(u'(\tilde{c}^2)) > E_2(u'(\tilde{c}^2))$. Comme, d'autre part, $u'(c_1) = u'(c_2)$, il vient immédiatement $L < 0$ et $S = 0$. L'effet information joue ici négativement sur la prime de liquidité.



Graphe n°7

Le mécanisme fondamental à l'œuvre peut être résumé de la façon suivante : à situation présente inchangée, une dégradation des perspectives futures tend à apprécier la consommation future au détriment de la consommation présente, et pousse donc à la baisse le taux d'intérêt.

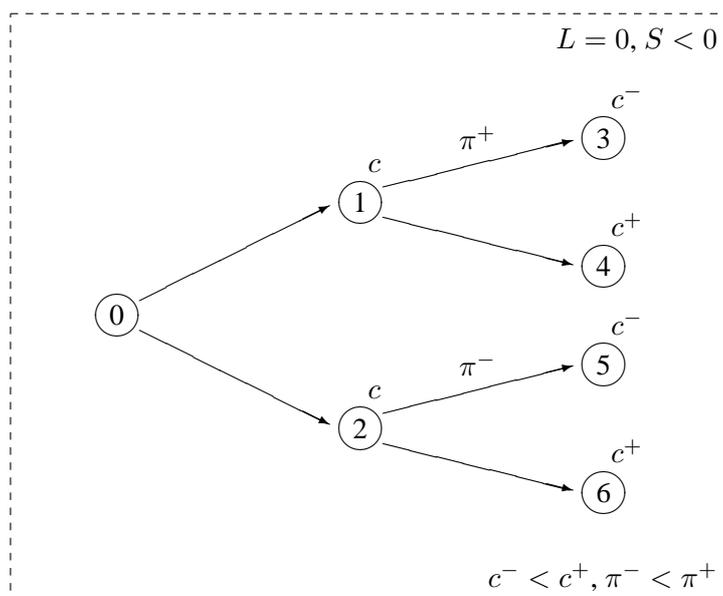
Dans la deuxième configuration, représentée par le graphe n°8, l'apport d'information est modélisé par une augmentation, à la date 1, de la probabilité d'occurrence de l'issue défavorable. Indubitablement, la survenance de l'état 1 constitue une mauvaise nouvelle pour les individus, et les résultats sont donc identiques à ceux obtenus sur la configuration précédente.

Pour maintenant obtenir de nouveau le scénario anti-hicksien, une « petite » corrélation positive doit être introduite dans ces deux configurations. La condition définissant le terme « petite » est simplement l'inverse de (3.19).

3.5 Conclusion

Ainsi s'achève cette étude de la détermination des primes dans le cadre d'une économie d'échange pure.

Dans un premier temps, le modèle général à trois dates a été particularisé, en contraignant les états de la nature et leur succession dans le temps. Il a été imposé que seuls deux états puissent survenir après un état non-terminal. Ces simplifications, sans remettre en cause la richesse du modèle à



Graphe n°8

trois dates, on permit d'exhiber l'expression simple et détaillée des lois de distribution impliquées dans la détermination du signe des primes : l'utilité marginale de la consommation à la date 1, le taux d'intérêt court à cette même date, et l'espérance conditionnelle de l'utilité marginale de la consommation à la date 2.

Sur les bases de ce modèle binomial, les liens entre distribution de la consommation et scénario de prime ont pu être examinés. Il est apparu qu'un premier facteur déterminant était le signe de la corrélation entre l'utilité marginale à la date 1 et l'espérance de l'utilité marginale à la date 2.

Sous hypothèse de corrélation négative, le scénario actif s'est avéré être le scénario d'habitat préféré. Dans trois cas significatifs, il a été possible de relier ce scénario à une configuration particulière de l'évolution de la consommation au cours du temps.

L'hypothèse de corrélation positive, insuffisante pour déterminer sans ambiguïté le scénario actif, a dû être complétée. Il s'est avéré que le scénario dépendait, de façon cruciale, de la puissance relative de deux effets.

Le premier, baptisé « effet richesse », a été interprété comme l'effet d'une révélation de la richesse à la date 1 n'apportant aucune précision sur la date 2. Sous sa forme « pure », il a été associé à une configuration (graphe n°6). Toujours sous hypothèse de corrélation positive, Il a été montré qu'en cas de domination de l'effet information, le scénario actif était le scénario hicksien.

signe de la corr. entre $u'(\tilde{c}^1)$ et $E_m(u'(\tilde{c}^2))$	effet dominant	
	richesse	information
–	scénario d’habitat préféré ($L < 0$ et $S < 0$) graphes n°3, n°4 et n°5	
0	effet richesse « pur » ($L = 0$ et $S < 0$) graphe n°6	effet information « pur » ($L < 0$ et $S = 0$) graphes n°7 et n°8
+	scénario hicksien ($L > 0$ et $S < 0$)	scénario anti-hicksien ($L < 0$ et $S > 0$)

Tableau n°1 : Scénario de primes en économie d’échange pure.

Le deuxième, appelé « effet information », a été associé au processus de révision des anticipations induit par la réalisation de l’état à la date 1, à richesse constante. Deux configurations (graphe n°7 et n°8) ont permis de l’isoler. Il s’est avéré qu’en cas de corrélation positive, l’effet information jouait en faveur du scénario anti-hicksien.

Ces résultats sont reportés dans le tableau n°1.

Section 4 Scénario de primes et production

4.1 Introduction

Lorsque les droits contingents constituent les seuls instruments d'allocation du risque, l'hypothèse d'homogénéité des agents conduit l'évolution de la consommation, au cours du temps, à épouser parfaitement celle des dotations exogènes. Il devient alors licite de raisonner directement à partir des propriétés stochastiques de la consommation.

Cette approche est clairement insuffisante lorsqu'il s'agit d'analyser la structure des taux. L'exclusion de la production obère une dimension importante du phénomène de l'intérêt : la productivité physique du capital.

Pour pallier cette insuffisance, il est nécessaire d'offrir aux agents, outre la possibilité de *substituer* ses consommations au moyen de l'échange, la possibilité de *transformer* des biens présents en biens futurs, grâce à l'investissement productif. Le modèle ainsi obtenu est, de ce fait, beaucoup plus riche, mais aussi beaucoup plus complexe : en particulier, la consommation y est déterminée de façon totalement endogène.

L'introduction de la production dans un modèle d'économie d'échange pose le problème de l'interaction entre les conditions de la transformation physique des biens et la structure de l'incertitude qui affecte l'économie. De ce point de vue, deux options sont envisageables.

L'option la plus simple consiste à considérer que l'investissement productif n'est qu'un moyen supplémentaire, mis à la disposition d'un agent pour allouer optimalement les risques induits par l'aléa de ses dotations. Dans ce contexte, la technologie de production n'est pas aléatoire, et l'individu sait parfaitement dans quelles conditions il peut et pourra transformer des biens. Dans une telle économie, qui n'est plus une économie d'échange pure, l'aléa fondamental reste néanmoins celui des dotations.¹⁷

L'option la plus complexe, mais aussi la plus réaliste, consiste à supposer que la technologie de production est la source ultime d'aléa dans l'économie. L'incertitude sur la production remplace ici l'incertitude sur les dotations. Dans ce cas, l'économie devient une véritable *économie de pro-*

¹⁷Le prolongement de la métaphore précédemment utilisée pourrait être le suivant : Robinson Crusoe est maintenant autorisé à stocker les fruits (des noix de coco ?) qui tombent en quantité aléatoire de son arbre. Ce stockage peut entraîner des pertes, mais celles-ci sont parfaitement connues à l'avance.

duction en univers incertain.

La première des deux options ci-dessus, définit une économie qui associe une caractéristique importante de l'économie d'échange (les dotations aléatoires) et de l'économie de production (l'investissement physique). Pour cette raison, nous la baptisons « économie intermédiaire ».

Il est utile d'examiner le problème de la détermination des primes dans le cadre d'une telle économie, dans la mesure où cet examen permettra d'évaluer par la suite *l'apport spécifique* des aléas de production.

Le problème des primes en économie intermédiaire a été abordé par Woodward, dans la dernière section principale de son brillant article de 1983. Bien que les résultats obtenus soient assez intuitifs, son étude reste insatisfaisante. Woodward examine les effets de la production intertemporelle, mais ne démontre pas formellement ses conclusions, et préfère illustrer son propos à partir d'exemples numériques. *Ceci ne serait pas gênant si ses conclusions n'étaient pas, elles-mêmes, exprimées en des termes formels, sous la forme d'une identification précise du signe des primes L et S .*

La première sous-section ci-après a pour objectif de réexaminer les résultats de Woodward dans le cadre formel du modèle binomial. Nous démontrons qu'ils sont essentiellement valides, mais susceptible de dépendre de l'hypothèse d'une technologie unique, qui fait de l'investissement productif un instrument relativement inefficace de gestion du risque.

Dans la seconde sous-section, nous étendons les résultats de Woodward au cas d'une économie intermédiaire dans laquelle l'investissement constitue un moyen performant d'allocation de la consommation.

Enfin, dans la troisième sous-section, nous examinons le problème des primes dans le cadre d'une économie où l'incertitude est créée par des aléas technologiques. Sur ce point, nous réutilisons les travaux de Benninga et Protopapadakis [1986] concernant la prime de solidité. Sur la base des résultats établis précédemment, nous étendons cette étude à la prime de liquidité.

4.2 L'analyse des résultats de Woodward

Woodward se place dans le cadre d'une économie intermédiaire à un seul bien, dans laquelle il n'existe qu'une seule technologie de production. Le rendement marginal d'un investissement productif est entièrement déterminé par le montant investi, et décroît avec celui-ci. Elle développe ensuite son analyse à partir de deux cas polaires.

Ses résultats peuvent être résumés de la façon suivante.

Cas n°1 : Il est supposé que les croyances des individus ne sont, en aucune manière, affectées par la survenance de l'état à la date 1. Plus la dotation à cette date se révélera forte, plus sera fort l'investissement, et plus sera forte la consommation anticipée à la date 2. Avec une technologie à rendements décroissants, un fort investissement signifie un faible taux d'intérêt. Woodward affirme donc que $L > 0$ et $S < 0$.

Cas n°2 : La dotation à la date 1 n'est pas aléatoire, et la réalisation de l'état à cette date apporte une information sur la date 2. Plus la nouvelle sera mauvaise, plus l'individu investira afin de répartir le risque de consommation entre la date 1 et la date 2. La dotation étant fixe à la date 1, le surcroît d'investissement induit une diminution de la consommation. Le taux d'intérêt étant donc faible dans un état pauvre, Woodward en déduit que $L < 0$ et $S > 0$.

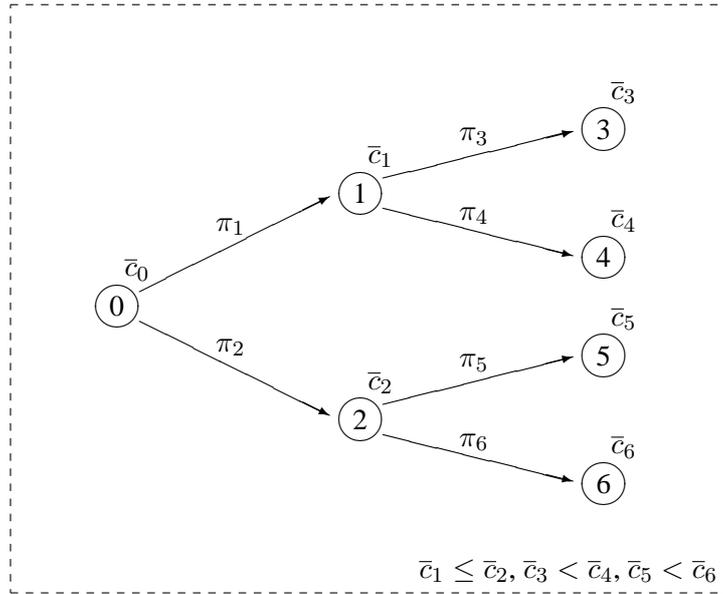
Dans la terminologie adoptée ici, le cas n°1 est un cas d'effet richesse pur, et le cas n°2 un cas d'effet information pur. Ces résultats sont formalisés dans le cadre du modèle binomial.

4.2.1 Le modèle et les équations optimales

Pour ce faire, l'incertitude qui affecte l'économie est ici représentée par le graphe n°9. Sur ce graphe, les dotations $\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_6$ remplacent les consommations c_0, \dots, c_6 , maintenant endogènes.

À chaque date, l'individu reçoit une dotation. Cette dotation est partagée entre consommation et investissement. À la date 2, elle est entièrement consommée.

Soit k_i , pour $i = 0, \dots, 2$, l'investissement réalisé lorsque l'individu se trouve dans l'état i . Soit $q(\cdot)$ la fonction de production. Un investissement k à une date donnée rapporte $q(k)$ à la date



Graphe n°9

suiivante. Cette fonction est soumise à $q'(\cdot) > 0$ et $q''(\cdot) < 0$ pour signifier que le produit marginal est toujours positif mais décroissant avec l'investissement.

L'individu représentatif, adverse au risque, cherche à maximiser

$$\begin{aligned}
 E(V(c^0, \tilde{c}^1, \tilde{c}^2)) &= u(c_0) + \\
 &\quad \eta \{ \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2) \} + \\
 &\quad \eta^2 \pi_1 \{ \pi_3 u(c_3) + \pi_4 u(c_4) \} + \eta^2 \pi_2 \{ \pi_5 u(c_5) + \pi_6 u(c_6) \}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

À l'équilibre, ses contraintes de budget s'écrivent

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \bar{c}_0 - k_0 \\
 c_1 &= \bar{c}_1 + q(k_0) - k_1 \\
 c_2 &= \bar{c}_2 + q(k_0) - k_2 \\
 c_3 &= \bar{c}_3 + q(k_1) \\
 c_4 &= \bar{c}_4 + q(k_1) \\
 c_5 &= \bar{c}_5 + q(k_2) \\
 c_6 &= \bar{c}_6 + q(k_2).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Par la suite, (4.2-i) désignera l'équation du système (4.2) dont le membre gauche est c_i .

Les conditions du premier ordre sont

$$\frac{1}{q'(k_0)} = p_1 + p_2 \quad \frac{1}{q'(k_1)} = p_3 + p_4 \quad \frac{1}{q'(k_2)} = p_5 + p_6 \quad (4.3)$$

où les prix d'état p_1 à p_6 sont donnés par (3.4). Ces conditions permettent d'écrire

$$1 + r_0 = q'(k_0) \quad 1 + r_1 = q'(k_1) \quad 1 + r_2 = q'(k_2). \quad (4.4)$$

Ainsi, dans chaque état, le taux d'intérêt d'équilibre (plus un) est égal au produit marginal de l'investissement optimal, c'est-à-dire à l'inverse du taux marginal de transformation entre biens aujourd'hui et biens demain. Ce résultat confirme, s'il en était besoin, la filiation de ce modèle avec la théorie standard de l'intérêt.

Les démonstrations ci-après utilisent, d'une part, les contraintes (4.2-0) à (4.2-6), et d'autre part, l'équation

$$\frac{q'(k_1)}{q'(k_2)} = \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} \times \frac{\pi_5 u'(c_5) + \pi_6 u'(c_6)}{\pi_3 u'(c_3) + \pi_4 u'(c_4)}, \quad (4.5)$$

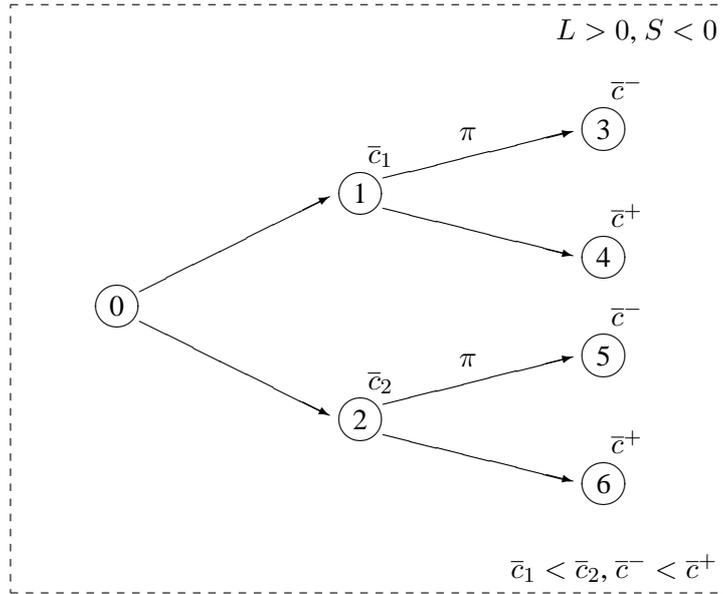
déduite de (4.3) et des prix d'état p_3 à p_6 .

4.2.2 L'effet richesse

Dans le contexte de ce modèle, la configuration qui isole l'effet richesse pur est représentée par le graphe n°10. Les contraintes de budget sont

$$\begin{aligned} c_0 &= \bar{c}_0 - k_0 \\ c_1 &= \bar{c}_1 + q(k_0) - k_1 \\ c_2 &= \bar{c}_2 + q(k_0) - k_2 \\ c_3 &= \bar{c}^- + q(k_1) \\ c_4 &= \bar{c}^+ + q(k_1) \\ c_5 &= \bar{c}^- + q(k_2) \\ c_6 &= \bar{c}^+ + q(k_2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le scénario courant est spécifié dans le théorème suivant :



Graphe n°10

Théorème 1 Lorsque seul l'effet richesse joue dans l'économie décrite ici, l'utilité marginale de la consommation à la date 1 est positivement corrélée à l'espérance conditionnelle de l'utilité marginale à la date 2, et le scénario hicksien est actif.

Preuve :

Dans un premier temps, on démontre par l'absurde que $c_1 < c_2$.

Posons donc $c_1 \geq c_2$. Considérant que $\bar{c}_1 < \bar{c}_2$, les contraintes de budget (4.6-1) et (4.6-2) permettent de déduire $k_1 < k_2$. Avec (4.6-3) et (4.6-5), $k_1 < k_2$ implique $c_3 < c_5$. De même, (4.6-4) et (4.6-6) induisent $c_4 < c_6$. On montre maintenant que cette situation est incompatible avec l'équation (4.5). De $k_1 < k_2$ on déduit $q'(k_1)/q'(k_2) > 1$ car $q'(\cdot)$ est strictement décroissante. Selon le même principe, on obtient facilement $u'(c_3) > u'(c_5)$, $u'(c_4) > u'(c_6)$, et donc $\pi u'(c_3) + (1 - \pi)u'(c_4) > \pi u'(c_5) + (1 - \pi)u'(c_6)$. Le deuxième terme du membre droit de (4.5) est donc strictement inférieur à l'unité. Mais, comme $c_1 \geq c_2$ implique $u'(c_1)/u'(c_2) \leq 1$, le membre droit est strictement inférieur à l'unité, ce qui est contradictoire avec le signe obtenu pour le membre gauche. Il est donc vrai que $c_1 < c_2$.

À partir de ce résultat, on montre que $k_1 < k_2$.

Si $k_1 \geq k_2$, alors $c_3 \geq c_5$ par (4.6-3) et (4.6-5). Il vient alors $\pi u'(c_3) + (1 - \pi)u'(c_4) \leq \pi u'(c_5) + (1 - \pi)u'(c_6)$. Comme $c_1 < c_2$ implique $u'(c_1)/u'(c_2) > 1$, le membre droit de (4.5) est supérieur

à l'unité. Mais $k_1 \geq k_2$ implique également que le membre gauche $q'(k_1)/q'(k_2)$ est inférieur ou égal à l'unité, ce qui est clairement contradictoire. Il est donc vrai que $k_1 < k_2$.

On peut maintenant étudier les termes qui déterminent le signe de L et de S .

De $c_1 < c_2$, on déduit $u'(c_1) > u'(c_2)$. Utilisant (4.4), $k_1 < k_2$ implique $1 + r_1 > 1 + r_2$. Mais, par les contraintes de budget (4.6-3) à (4.6-6), $k_1 < k_2$ permet également d'affirmer que $E_1(u'(\tilde{c}^2)) > E_2(u'(\tilde{c}^2))$. Ainsi, $u'(\tilde{c}^1)$ est positivement corrélé à $E_m(u'(\tilde{c}^2))$. Examinant l'expression des primes donnée en (3.7) et (3.10) page 270, on voit que $L > 0$ et $S < 0$, et le scénario courant est donc le scénario hicksien.

CQFD.

La situation est bien celle décrite dans le cas n°1 de Woodward. À perspectives d'avenir inchangées, une faible richesse dans l'état 1 ($\bar{c}_1 < \bar{c}_2$) conduit l'individu à réduire à la fois sa consommation et son investissement ($c_1 < c_2$ et $k_1 < k_2$). Cette faiblesse de l'investissement implique, d'une part, un taux court élevé ($1 + r_1 > 1 + r_2$), mais aussi, d'autre part, des perspectives de consommation réduites ($c_3 < c_5$ et $c_4 < c_6$) et une utilité marginale espérée forte ($E_1(u'(\tilde{c}^2)) > E_2(u'(\tilde{c}^2))$).

L'effet richesse tend donc à associer situation présente (et future) déprimée et taux d'intérêt élevé. L'investissement court renouvelé est particulièrement apprécié pour financer la consommation à la date 2 ($L > 0$), et l'investissement long liquidé précocement particulièrement peu apprécié pour financer la consommation à la date 1 ($S < 0$).

Par contraste avec une économie d'échange, le scénario hicksien est obtenu sans imposer une corrélation positive entre $u'(\tilde{c}^1)$ et $E_m(u'(\tilde{c}^2))$. Cette corrélation positive est créée de façon totalement endogène, alors même que les dotations à la date 1 et à la date 2 sont indépendantes. Par effet de richesse, l'introduction d'une opportunité de production induit une corrélation sérielle positive *de la consommation* : un état de faible consommation tend à suivre un état de faible consommation.

Bien que ces résultats soient assez intuitifs, un point particulier de l'analyse mérite tout de même quelques précisions : la politique de consommation à la date 1 ($c_1 < c_2$) ne dépend pas des probabilités π_1 et π_2 , accordées respectivement aux états 1 et 2. Pourtant, un agent rationnel, au sens de Von Neumann-Morgenstern, évalue une situation incertaine en pondérant l'utilité des issues par leur probabilité. Si π_1 est suffisamment fort, cet individu va souhaiter transférer de la

consommation de l'état 2, peu probable, vers l'état 1, très probable.

Dans le cadre de ce modèle, cette opération est absolument impossible : l'individu (représentatif) ne pouvant réaliser aucun transfert en achetant ou vendant des droits contingents, son seul instrument d'allocation est l'investissement productif. Or, tel qu'il est défini ici, cet instrument permet uniquement de transférer de la consommation entre les différentes dates du modèle, et non entre les différents états d'une même date : un investissement réalisé dans un certain état procure à la date suivante des rendements identiques, quel que soit l'état alors réalisé.

4.2.3 L'effet information

Le cas n°2 de Woodward est plus difficile à analyser, du fait qu'une « mauvaise nouvelle » peut être définie de diverses façons.

Un effet information pur est tel que $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = \bar{c}$. Les contraintes de budget sont donc, à l'équilibre,

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \bar{c}_0 - k_0 \\
 c_1 &= \bar{c} + q(k_0) - k_1 \\
 c_2 &= \bar{c} + q(k_0) - k_2 \\
 c_3 &= \bar{c}_3 + q(k_1) \\
 c_4 &= \bar{c}_4 + q(k_1) \\
 c_5 &= \bar{c}_5 + q(k_2) \\
 c_6 &= \bar{c}_6 + q(k_2).
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Dans un premier temps, on démontre le théorème suivant :

Théorème 2 *Lorsque seul l'effet information joue dans l'économie décrite ici, l'utilité marginale de la consommation à la date 1 est positivement corrélée à l'espérance conditionnelle de l'utilité marginale à la date 2, et le scénario actif est le scénario anti-hicksien.*

Preuve :

On démontre d'abord la corrélation positive. D'après les contraintes de budget (4.7-1) et (4.7-2), une inégalité stricte entre c_1 et c_2 induit une inégalité stricte, de sens opposée, entre k_1 et k_2 . Donc, si $c_1 < c_2$, $u'(c_1) > u'(c_2)$ mais aussi $q'(k_1) < q'(k_2)$. Le respect de (4.5) impose alors $E_1(u'(\tilde{c}^2)) > E_2(u'(\tilde{c}^2))$. Les inégalités sont renversées si on part de $c_1 > c_2$. La corrélation entre $u'(\tilde{c}^1)$ et $E_m(u'(\tilde{c}^2))$ est positive.

Pour justifier le scénario, on remarque que si \tilde{c}^1 covarie négativement avec \tilde{k}^1 (l'investissement à la date 1), alors $u'(\tilde{c}^1)$ covarie négativement avec $q'(\tilde{k}^1)$. D'après (4.4), $u'(\tilde{c}^1)$ covarie donc négativement avec le taux d'intérêt $1 + \tilde{r}^1$, et positivement avec le prix $1/(1 + \tilde{r}^1)$. On a donc $S > 0$. Comme, par ailleurs, $u'(\tilde{c}^1)$ covarie positivement avec $E_m(u'(\tilde{c}^2))$, cette dernière variable covarie négativement avec $1 + \tilde{r}^1$ et ainsi $L < 0$.

CQFD.

Il s'agit bien des conclusions du cas n°2 de Woodward. Le théorème prouve que l'effet information pur joue en faveur du scénario anti-hicksien, quelle que soit la configuration de dotations ou de croyances utilisée pour représenter cette information. Comme précédemment, la production intertemporelle crée une corrélation positive entre $u'(\tilde{c}^1)$ et $E_m(u'(\tilde{c}^2))$.

À l'inverse de l'effet richesse, l'effet information tend à associer situation présente (et future) déprimée et taux d'intérêt faible. Le bon long est alors considéré comme l'instrument sûr.

Le point clef du raisonnement tient ici au *renversement de la politique de consommation et d'investissement*, opérée en réaction à l'information arrivée à la date 1 : si l'individu consomme plus alors il investira moins, et inversement. Ceci montre que l'agent transfère de la consommation entre la date 1 et la date 2 de façon à répartir au mieux le risque d'une nouvelle défavorable.¹⁸

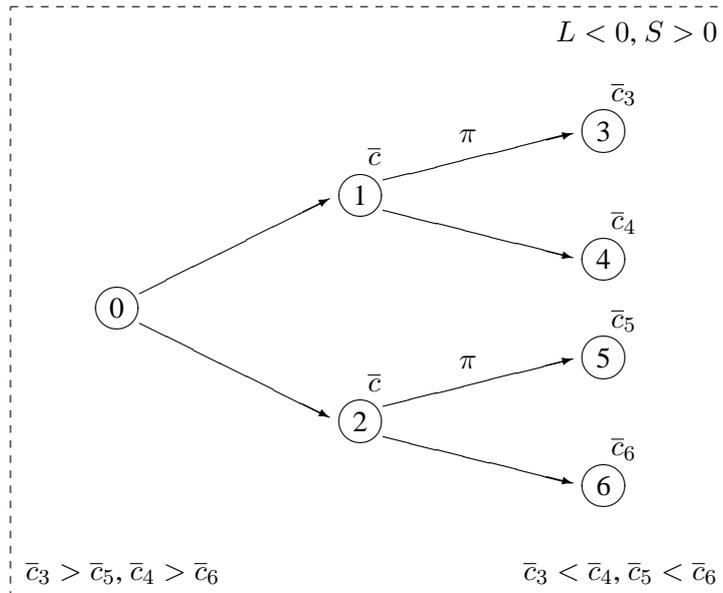
Par contraste avec la situation précédente, l'agent ne gère pas, à la date 1, une richesse qui varie, mais utilise sa richesse pour gérer au mieux le risque d'une information défavorable.

Le théorème montre bien que l'agent cherche à gérer ce risque, mais, l'information étant pour l'instant indéfinie, *il n'indique pas la façon précise dont il va procéder*. On pourrait s'attendre à ce que l'étude des configurations d'effet information pur, similaires à celles examinées précédemment (graphes n°7 et n°8), permette de lever cette imprécision. En effet, ces configurations modélisent l'arrivée de messages qui sont sans ambiguïté considérés comme de « bonnes » ou de « mauvaises » nouvelles.

Pourtant, des imprécisions subsistent.

Dans la première configuration, le message à la date 1 annonce une dégradation systématique des

¹⁸Comme le signale Woodward, la consommation à la date 1 devient de ce fait aléatoire, bien que la dotation à cette date ne le soit pas.



Graphe n°11

issues. Le graphe correspondant est le graphe n° 11. On montre dans ce cas que $c_1 < c_2$. En effet, $c_1 \geq c_2$ implique $k_1 \leq k_2$ par (4.7-1) et (4.7-2), qui entraîne à son tour $c_3 < c_5$ et $c_4 < c_6$ par (4.7-3) à (4.7-6). Ces résultats contredisent (4.5).

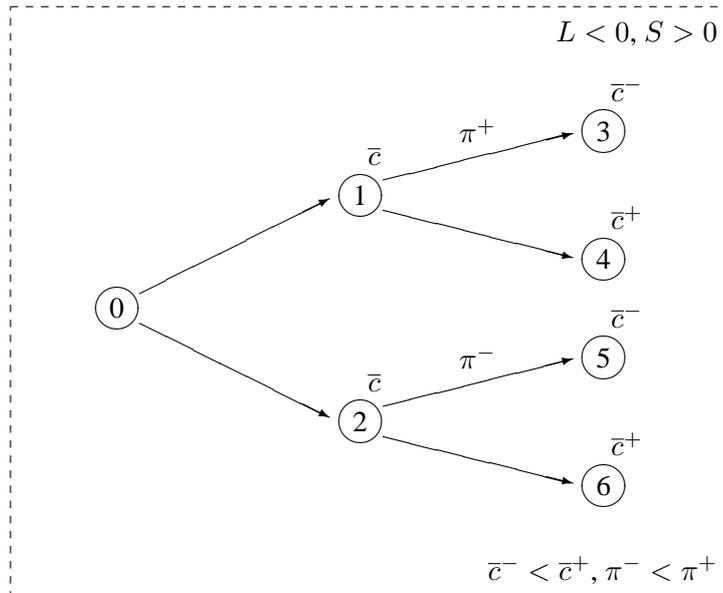
L'inégalité $c_1 < c_2$ implique $k_1 > k_2$ et $E_1(u'(\tilde{c}^2)) > E_2(u'(\tilde{c}^2))$. On sait donc que l'individu retarde sa consommation en cas de mauvaise nouvelle, mais on ne peut déterminer si la nouvelle est assez mauvaise pour que, malgré ce transfert, l'individu consomme systématiquement moins après l'état 1.¹⁹ Comme il est possible d'avoir $c_3 < c_5$ et $c_4 > c_6$, ou encore $c_3 > c_5$ et $c_4 < c_6$, on ne peut ici affirmer que la consommation est sériellement corrélée.

Si la mauvaise nouvelle s'exprime par un glissement défavorable des probabilités, comme dans le graphe n° 12, l'indétermination est encore plus grande.

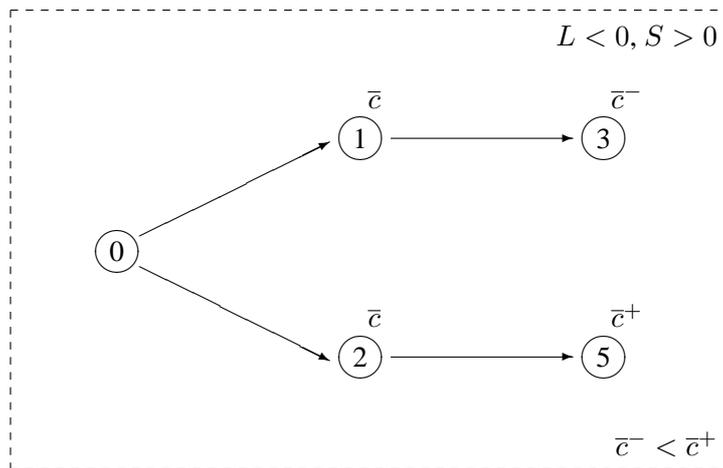
Deux solutions sont ici possibles : dans la première ($c_1 < c_2$, $k_1 > k_2$, $c_3 > c_5$ et $c_4 > c_6$), l'individu retarde sa consommation lorsqu'il se trouve dans l'état défavorable, dans la seconde ($c_1 > c_2$, $k_1 < k_2$, $c_3 < c_5$ et $c_4 < c_6$), l'individu au contraire avance sa consommation.

En fait, il est impossible, dans cette configuration, de déterminer le sens du transfert de consommation parce que le transfert intertemporel n'est tout simplement pas la bonne politique. Le glissement des probabilités signifie qu'une issue est plus probable et que l'autre l'est moins : c'est donc

¹⁹On peut, par contre, affirmer qu'il ne consommera pas systématiquement plus en utilisant $\pi u'(c_3) + (1 - \pi)u'(c_4) > \pi u'(c_5) + (1 - \pi)u'(c_6)$.



Graphe n°12



Graphe n°13

entre les états de la date 2 que l'individu souhaite réaliser des substitutions. Parce qu'il favorise naturellement la consommation dans l'issue la plus probable, l'agent devrait décider $c_3 > c_5$ et $c_4 < c_6$. Mais, comme nous l'avons vu précédemment, l'investissement productif ne lui permet pas de réaliser ces transferts, pourtant souhaités.

Pour conclure cette analyse de l'effet information, on examine une configuration qui permet de lever toute ambiguïté. Cette configuration, représentée par le graphe n°13, est telle que $\pi_3 = \pi_5 = 1$, et donc $\pi_4 = \pi_6 = 0$. De ce fait, les états 4 et 6 sont omis.

Ainsi, les dotations à la date 1 sont connues à la date 0, et les dotations à la date 2 sont connues

à la date 1. Par contre, les dotations à la date 2 sont inconnues à la date 0. Dans cette économie, l'incertitude porte uniquement sur les événements lointains.

On montre, par l'absurde, que $c_1 < c_2$. Si $c_1 \geq c_2$, alors, par (4.7-1) et (4.7-2), on obtient $k_1 \leq k_2$. Combinant ce résultat avec (4.7-3) et (4.7-4), il vient $c_3 < c_5$. L'équation (4.5) s'écrit ici

$$\frac{q'(k_1)}{q'(k_2)} = \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} \times \frac{u'(c_5)}{u'(c_3)}. \quad (4.8)$$

Des diverses relations ci-dessus on tire $q'(k_1)/q'(k_2) \geq 1$, puis $u'(c_1)/u'(c_2) \leq 1$, et enfin $u'(c_5)/u'(c_3) > 1$. Ces inégalités violent (4.8).

On a donc effectivement $c_1 < c_2$, et donc $k_1 > k_2$ par (4.7-1) et (4.7-2). Avec (4.8), on conclut que $c_3 < c_5$.

L'individu utilise donc l'investissement productif pour retarder sa consommation de l'état 1 vers l'état 3. Il peut ainsi répartir sur deux dates le déficit prévu dans l'état 3. Ce cas illustre bien le comportement de lissage de consommation intertemporelle.

Comme précédemment, la technologie considérée explique que ces résultats soient parfaitement indépendants des probabilités d'occurrence de la bonne et de la mauvaise nouvelle.

4.3 Scénario de primes dans une économie intermédiaire

4.3.1 Introduction

Le réexamen des résultats de Woodward a permis de constater, à plusieurs reprises, que l'hypothèse technologique adoptée contraignait les comportements individuels.

Si, en effet, les rendements obtenus au terme d'une production ne dépendent pas de l'état de la nature réalisé, l'investissement physique ne permet pas de réallouer sa consommation entre ces états. En d'autres termes, l'investissement productif constitue un instrument imparfait de gestion du risque, parce que les rendements physiques ne covarient pas avec les dotations, dont les variations aléatoires représentent le risque fondamental de l'économie.

Par analogie avec les systèmes de marchés contingents, nous dirons que les opportunités de production sont *incomplètes*, dans le sens où elles ne permettent pas de gérer au mieux tous les risques

fondamentaux.²⁰

Est-ce à dire que les conclusions de Woodward sont conditionnées par l'incomplétude de la technologie ? Si c'était le cas, le scénario actif serait déterminé conjointement par le comportement rationnel des individus et par des limitations imposant l'imperfection des instruments de gestion du risque.

Nous proposons ici d'étendre le modèle précédent au cas d'une technologie complète, de façon à isoler les effets « purs » du comportement rationnel en incertitude.

4.3.2 La technologie complète et l'équilibre

Pour que l'individu puisse gérer librement le risque de consommation à l'aide de l'investissement productif, le rendement obtenu *in fine* sur un investissement physique doit dépendre à la fois du montant investi et de la dotation reçue au terme du processus de production.²¹ Si c'est le cas, l'aléa fondamental qui affecte l'économie détermine parfaitement les dotations reçues *et*, en même temps, les rendements obtenus sur la production.

Ceci peut être modélisé par l'introduction d'un certain nombre de technologies contingentes « primitives », qui ne délivrent leur production qu'à la condition expresse qu'un événement particulier se réalise.

Dans le contexte du modèle binomial, six technologies sont nécessaires pour assurer la complétude des opportunités de production. Ces technologies sont numérotées de 1 à 6. Un investissement dans la *i*-ième technologie délivre une production si et seulement si (*i*) cet investissement a été réalisé dans l'état précédent *i* et (*ii*) l'état *i* se réalise. Clairement, ces six technologies permettent à chaque moment de transférer de la consommation vers un état du futur, sans perturber les autres transferts décidés par ailleurs.

Pour rester dans le cadre d'une économie où l'aléa est essentiellement celui des dotations, il faut admettre que ces transferts s'effectuent selon des processus ayant la même efficacité technique. En d'autres termes, les conditions techniques de la transformation de biens aujourd'hui en biens

²⁰Gérer *au mieux* sous entend ici *compte tenu* du fait que la production permet de transformer des biens présents en biens futurs, *et non l'inverse*. Cette « limitation » est constitutive, et ne peut donc être levée.

²¹Dans les termes de la métaphore précédemment utilisée, cela signifie que les conditions climatiques déterminent à la fois la quantité de noix de coco qui tombent de l'arbre, et les conditions dans lesquelles ces noix ont pu être stockées au cours de la période précédente (ce qui n'est pas invraisemblable).

demain sont les mêmes, quel que soit le processus choisi.²²

Soit donc z_i le montant investi dans la technologie i à une date donnée. Cet investissement permet d'obtenir une production $q(z_i)$ à la date suivante, si l'économie se trouve dans l'état i . Si ce n'est pas le cas, l'investissement est perdu. La fonction de production $q(\cdot)$ ne dépend ni de l'état dans lequel l'investissement est réalisé, ni de l'état dans lequel s'effectue la production.

Le remplacement de la technologie incomplète par ce système de six technologies permet à l'individu de gérer le risque *au moins aussi bien*. Si, dans un état donné, cet individu investit le même montant dans les deux technologies qui sont susceptibles de donner lieu à production, il obtiendra le même montant quel que soit l'état qui se réalisera alors. Il reproduit ainsi, à l'aide du système complet, les caractéristiques de la technologie incomplète.

Soit toujours \bar{c}_i et c_i les dotations et consommations dans les divers états. À l'équilibre d'une économie composée d'individus homogènes, les contraintes budgétaires s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \bar{c}_0 - z_1 - z_2 \\
 c_1 &= \bar{c}_1 + q(z_1) - z_3 - z_4 \\
 c_2 &= \bar{c}_2 + q(z_2) - z_5 - z_6 \\
 c_3 &= \bar{c}_3 + q(z_3) \\
 c_4 &= \bar{c}_4 + q(z_4) \\
 c_5 &= \bar{c}_5 + q(z_5) \\
 c_6 &= \bar{c}_6 + q(z_6).
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

L'individu représentatif maximise l'objectif $E(V(c^0, \tilde{c}^1, \tilde{c}^2))$, donné en (4.1). Les conditions du premier ordre sont

$$\frac{1}{q'(z_i)} = p_i \quad \forall i = 1, \dots, 6
 \tag{4.10}$$

où les prix d'état p_1 à p_6 sont donnés par (3.4). Ces conditions indiquent clairement que les instruments de substitution (les droits contingents) sont directement en concurrence avec les instruments de transformation (l'investissement productif). L'équilibre entre taux marginal de substitution et taux marginal de transformation se fait maintenant *dans chaque éventualité permise par la nature*.

²²On peut, par exemple, imaginer que Robinson Crusoe dispose de deux technologies de stockage, qui, lorsqu'elles fonctionnent, permettent d'obtenir des taux de conservation identiques sur les quantités stockées. Selon que le temps s'avère trop sec ou trop humide, une des deux technologies devient totalement inefficace.

La distribution de probabilité du taux d'intérêt court futur est donc telle que

$$\frac{1}{1 + \tilde{r}^1} = \begin{cases} \frac{1}{1+r_1} = \frac{1}{q'(z_3)} + \frac{1}{q'(z_4)} & \text{avec une probabilité } \pi_1 \\ \frac{1}{1+r_2} = \frac{1}{q'(z_5)} + \frac{1}{q'(z_6)} & \text{avec une probabilité } \pi_2. \end{cases} \quad (4.11)$$

Pour les besoins des démonstrations, les conditions du premier ordre (4.10) sont combinées avec les prix d'état (3.4), afin d'obtenir les trois équations suivantes :

$$\frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \times \frac{q'(z_1)}{q'(z_2)} \quad (4.12)$$

$$\frac{u'(c_5)}{u'(c_3)} \times \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\pi_3}{\pi_5} \times \frac{q'(z_3)}{q'(z_5)} \quad (4.13)$$

$$\frac{u'(c_6)}{u'(c_4)} \times \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\pi_4}{\pi_6} \times \frac{q'(z_4)}{q'(z_6)}. \quad (4.14)$$

Ceci étant posé, nous pouvons maintenant étudier l'effet richesse et l'effet information.

4.3.3 L'effet richesse

Le graphe n°10, page 292, représente l'effet richesse pur dans une économie intermédiaire. Les contraintes budgétaires sont

$$\begin{aligned} c_0 &= \bar{c}_0 - z_1 - z_2 \\ c_1 &= \bar{c}_1 + q(z_1) - z_3 - z_4 \\ c_2 &= \bar{c}_2 + q(z_2) - z_5 - z_6 \\ c_3 &= \bar{c}^- + q(z_3) \\ c_4 &= \bar{c}^+ + q(z_4) \\ c_5 &= \bar{c}^- + q(z_5) \\ c_6 &= \bar{c}^+ + q(z_6). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Comparativement au cas de technologie incomplète, les conclusions sont identiques. Par contre, comme nous l'avons annoncé, l'individu est maintenant susceptible de consommer plus à la date 1, dans l'état défavorable 1.

Théorème 3 *Lorsque seul l'effet richesse joue dans l'économie décrite ici, le scénario actif est presque toujours le scénario hicksien.*²³

²³L'expression « presque toujours » est expliquée dans la démonstration.

Preuve :

Nous étudions successivement trois cas.

1) $c_1 < c_2$

Si $c_1 < c_2$ alors $u'(c_1)/u'(c_2) > 1$.

Introduisant cette dernière inégalité ainsi que $\pi_3 = \pi_5 = \pi$ dans (4.14), on voit que $u'(c_5)/u'(c_3) < q'(z_3)/q'(z_5)$. Supposons que $z_3 \geq z_5$. Les contraintes de budget (4.15-3) et (4.15-5) indiquent que $c_3 \geq c_5$. De $z_3 \geq z_5$ on tire $q'(z_3)/q'(z_5) \leq 1$. Ces deux derniers résultats sont contradictoires avec l'inégalité obtenue à partir de (4.14).

Il est donc vrai que $z_3 < z_5$ et donc, par (4.15-3) et (4.15-5), que $c_3 < c_5$. Suivant une procédure identique, on obtient facilement $z_4 < z_6$ et $c_4 < c_6$.

De $z_3 < z_5$ et $z_4 < z_6$ on déduit par (4.11) que $1/(1+r_1) < 1/(1+r_2)$, soit encore $1+r_1 > 1+r_2$. De $c_3 < c_5$ et $c_4 < c_6$ on déduit $\pi u'(c_3) + (1-\pi)u'(c_4) > \pi u'(c_5) + (1-\pi)u'(c_6)$, c'est-à-dire $E_1(u'(\tilde{c}^2)) > E_2(u'(\tilde{c}^2))$. Par ailleurs, on sait que $u'(c_1) > u'(c_2)$. L'expression de L et de S , donnée en (3.7) et (3.10), confirme que $S < 0$ et $L > 0$.

2) $c_1 = c_2$

L'équation (4.14) implique $u'(c_5)/u'(c_3) = q'(z_3)/q'(z_5)$. Utilisant alors les contraintes (4.15-3) et (4.15-5), on montre aisément que $z_3 < z_5$ et $z_3 > z_5$ aboutissent à des contradictions. On a donc $z_3 = z_5$ et $c_3 = c_5$. Croisant ces résultats avec (4.15-1) et (4.15-2), on déduit $z_1 > z_2$. De $z_3 = z_5$ et $z_4 = z_6$, on tire $1+r_1 = 1+r_2$. Le taux court à la date 1 n'est pas aléatoire, et donc $S = L = 0$. Dans ce cas unique, parmi une infinité d'autres, le scénario actif n'est pas le scénario hicksien. Ceci explique l'utilisation de l'expression « presque toujours » dans le libellé du théorème.

3) $c_1 > c_2$

Partant de $u'(c_1)/u'(c_2) < 1$ et utilisant la même procédure que celle employée dans le premier cas, on arrive à $z_3 > z_5$, $z_4 > z_6$, $c_3 > c_5$ et $z_4 > z_6$. Ce cas n'est pas simplement le dual du premier. On peut en effet montrer ici que $z_1 > z_2$ en confrontant toutes les inégalités ci-dessus aux contraintes (4.15-1) et (4.15-2). On déduit de ces résultats que $u'(c_1) < u'(c_2)$, $E_1(u'(\tilde{c}^2)) <$

$E_2(u'(\tilde{c}^2)), 1/(1+r_1) > 1/(1+r_2)$ et $1+r_1 < 1+r_2$. En définitive, $c_1 > c_2$ mène donc à $S < 0$ et $L > 0$.

CQFD.

Par rapport au modèle précédent, la nouveauté importante est le troisième cas. Utilisant (4.12), on peut montrer que $c_1 > c_2$ impose $\pi_1 > \pi_2$, c'est-à-dire $\pi_1 > 1/2$. Ainsi, comme nous l'avons prévu, il est nécessaire que la probabilité de l'état défavorable à la date 1 soit forte pour que l'individu accepte d'y transférer de la richesse.²⁴

Ce cas ne perturbe pas les résultats obtenus précédemment parce que la richesse transférée y est toujours gérée à *perspectives d'avenir identiques* : une part de ce supplément est donc consacré à la consommation, et une part à l'investissement ($c_1 > c_2$ et $z_1 > z_2$). L'état 1 devient ainsi l'état riche et l'état 2 l'état pauvre. Hormis ce renversement, les choses se passent de la même façon que dans le modèle à technologie incomplète. On retrouve notamment, dans tous les cas (sauf un), une autocorrélation positive de la consommation.

4.3.4 L'effet information

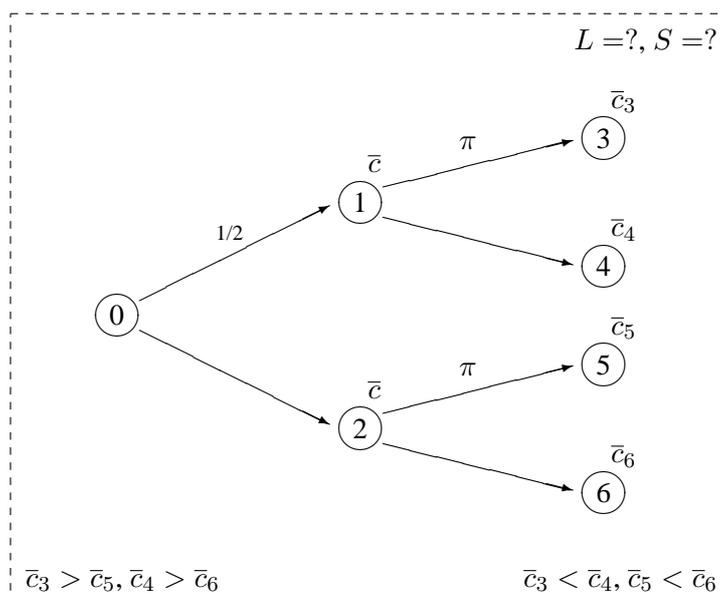
L'introduction d'une technologie complète perturbe ici significativement les conclusions de Woodward : il devient impossible, dans le cas général, de démontrer que l'effet information joue en faveur du scénario anti-hicksien.

L'examen de trois configurations d'effet information pur permet de comprendre les raisons de cette perturbation.

La première de ces configurations (graphe n°14) est une version légèrement modifiée de la configuration représentée par le graphe n°11, correspondant à une dégradation systématique des issues après l'état 1. Ici, pour éviter d'aborder en même temps le problème du contenu du message et de sa probabilité d'occurrence, on pose $\pi_1 = 1/2$.

Cette configuration est telle que $c_1 < c_2$. En effet, si $c_1 \geq c_2$, $u'(c_1)/u'(c_2) \leq 1$. L'équation (4.13) implique alors $u'(c_5)/u'(c_3) > q'(z_3)/q'(z_5)$. Si on pose $z_3 \leq z_5$, (4.15-3) et (4.15-5) induisant $c_3 \leq c_5$, et ces deux dernières inégalités entrent en contradiction avec la précédente. On a donc

²⁴Le cas $c_1 = c_2$ implique également $\pi_1 > 1/2$, si bien qu'en imposant $\pi_1 \leq 1/2$ on retrouve le modèle précédent.



Graphe n°14

$z_3 > z_5$, et, par le même procédé, $z_4 > z_6$. Par (4.12), l'hypothèse de départ $c_1 \geq c_2$ implique également $z_1 > z_2$. Examinant conjointement les inégalités $z_1 > z_2$, $z_3 > z_5$, $z_4 > z_6$, et les contraintes (4.15-1) et (4.15-2), on aboutit à une contradiction.

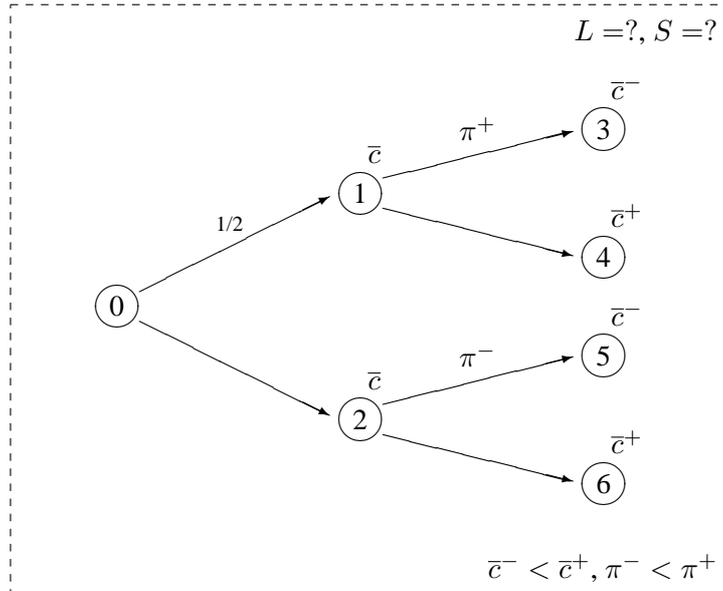
En définitive, il est vrai que $c_1 < c_2$, et donc, par (4.12), que $z_1 > z_2$.

Par rapport au modèle à technologie unique, l'individu suit jusqu'à ce point la même politique. Mais, d'après (4.15-1) et (4.15-2), cet individu peut maintenant suivre trois politiques différentes à la date 2 :

1. $z_3 < z_5, z_4 < z_6, c_3 < c_5, c_4 < c_6$;
2. $z_3 < z_5, z_4 > z_6, c_3 < c_5$;
3. $z_3 > z_5, z_4 < z_6, c_4 < c_6$.

La première politique est précisément celle obtenue précédemment. Elle conduit bien au scénario anti-hicksien $S > 0$ et $L < 0$.

Les deux dernières sont nouvelles. Elles indiquent que l'individu opère un redéploiement de richesse entre l'état favorable et l'état défavorable de la date 2. Avec une technologie unique (et donc incomplète), une telle action était tout simplement impossible.



Graphe n°15

Ici, l'individu peut décider dans l'état 1 d'accroître son investissement dans une technologie et de le diminuer dans l'autre. L'effet de cette stratégie de gestion du risque sur le taux d'intérêt est clairement ambigu, et le scénario actif reste donc indéterminé.

En somme, il est impossible de comparer les protections offertes par les bons courts et longs parce que l'arrivée d'une information sur le futur peut inciter les agents à *restructurer* leur portefeuille d'investissement, c'est-à-dire à bouleverser les proportions consacrées aux différents actifs.

Ce phénomène ne peut être considéré comme un simple « effet de bord ». Pour s'en convaincre, on examine le cas de glissement des probabilités représenté par le graphe n°15. Les contraintes budgétaires sont

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \bar{c}_0 - z_1 - z_2 \\
 c_1 &= \bar{c} + q(z_1) - z_3 - z_4 \\
 c_2 &= \bar{c} + q(z_2) - z_5 - z_6 \\
 c_3 &= \bar{c}^- + q(z_3) \\
 c_4 &= \bar{c}^+ + q(z_4) \\
 c_5 &= \bar{c}^- + q(z_5) \\
 c_6 &= \bar{c}^+ + q(z_6).
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

et les équations (4.12) à (4.14) s'écrivent

$$\frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{q'(z_1)}{q'(z_2)}
 \tag{4.17}$$

$$\frac{u'(c_5)}{u'(c_3)} \times \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} > \frac{q'(z_3)}{q'(z_5)} \quad (4.18)$$

$$\frac{u'(c_6)}{u'(c_4)} \times \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} < \frac{q'(z_4)}{q'(z_6)}. \quad (4.19)$$

Cette configuration d'effet information pur est telle que l'individu est *toujours conduit à bouleverser sa politique d'investissement*.

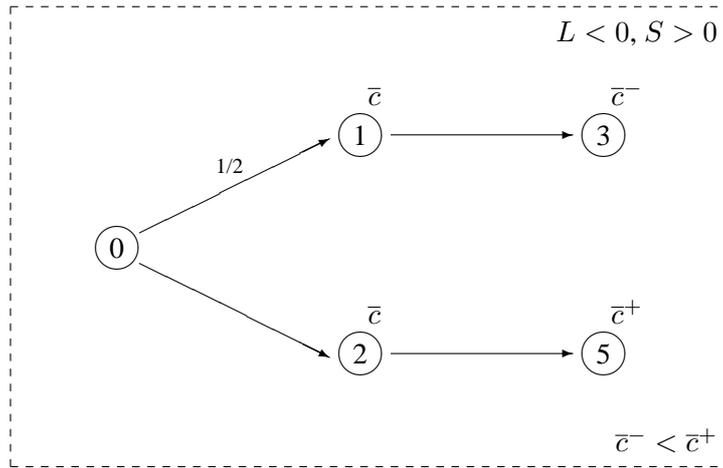
En effet, si $c_1 < c_2$, $u'(c_1)/u'(c_2) > 1$ peut être rapproché de (4.19) pour montrer que $u'(c_6)/u'(c_4) < q'(z_4)/q'(z_6)$. Avec (4.16-4) et (4.16-6), cette inégalité implique $z_4 < z_6$ et donc $c_4 < c_6$. Si on ajoute à ces résultats $z_1 < z_2$ (induit par $c_1 < c_2$ et (4.17)), on voit que (4.16-1) et (4.16-2) impliquent $z_3 > z_5$ et $c_3 > c_5$. Si on pose maintenant $c_1 > c_2$, on insère $u'(c_1)/u'(c_2) < 1$ dans (4.18), et, suivant la même procédure, on montre que $z_3 > z_5$, $c_3 > c_5$, et $z_4 < z_6$, $c_4 < c_6$. Enfin, si $c_1 = c_2$, (4.18) utilisé conjointement à (4.16-3) et (4.16-5) induit $z_3 > z_5$ et $c_3 > c_5$. De même (4.19), (4.16-4) et (4.16-6) conduisent à $z_4 < z_6$ et $c_4 < c_6$.

Ainsi, lorsque l'avenir s'annonce plus sombre, le comportement rationnel de l'individu consiste à réorienter sa politique d'investissement vers l'issue défavorable ($z_3 > z_5$, $z_4 < z_6$), de façon à y transférer de la consommation.

La restructuration de l'investissement apparaît ici comme une conséquence naturelle de la révélation d'une information concernant les conditions économiques futures. En ce sens, l'ambiguïté de l'effet information sur le signe des primes L et S est un phénomène normal, et l'analyse proposée par Woodward se révèle donc étroitement liée à l'hypothèse d'une technologie unique.

On montre que les conclusions de Woodward peuvent être restaurées dans un cas très simple. Le graphe n° 16 montre que l'incertitude porte uniquement sur les événements lointains. Les conditions du premier ordre sont

$$\begin{aligned} c_0 &= \bar{c}_0 - z_1 - z_2 \\ c_1 &= \bar{c} + q(z_1) - z_3 \\ c_2 &= \bar{c} + q(z_2) - z_5 \\ c_3 &= \bar{c}^- + q(z_3) \\ c_5 &= \bar{c}^+ + q(z_5). \end{aligned} \quad (4.20)$$



Graphe n°16

et on dispose de

$$\frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{q'(z_1)}{q'(z_2)} \quad (4.21)$$

$$\frac{u'(c_5)}{u'(c_3)} \times \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{q'(z_3)}{q'(z_5)}. \quad (4.22)$$

On démontre dans un premier temps que $c_1 < c_2$. Si $c_1 \geq c_2$, alors (4.22), (4.20-3) et (4.20-5) induisent $z_3 > z_5$. Par (4.21) on obtient également $z_1 \leq z_2$. Une telle situation est contradictoire avec (4.20-1) et (4.20-2). Il est donc vrai que $c_1 < c_2$. Les deux dernières inégalités, combinées avec (4.20-1) et (4.20-2), imposent $z_3 > z_5$. Examinant (4.22), il vient $c_3 < c_5$. On détermine alors facilement que $u'(c_1) > u'(c_2)$, $E_1(u'(\tilde{c}^2)) > E_2(u'(\tilde{c}^2))$, $1 + r_1 < 1 + r_2$. Il vient $S > 0$, $L < 0$, et le scénario actif est bien le scénario anti-hicksien.

Ici, l'individu se sert de l'investissement productif pour répartir une partie du déficit prévu, après l'état 1, entre l'état 1 et l'état 3. En quelque sorte, la configuration ci-dessus privilégie les transferts « horizontaux » (dans le temps), aux transferts « verticaux » (entre les états d'une même date), sources d'ambiguïtés.

4.4 Scénario de primes dans une économie de production : l'effet efficacité

4.4.1 Introduction

Nous disposons en ce point d'un certain nombre de résultats concernant les effets de la production intertemporelle sur le signe des primes, dans une économie où l'incertitude est créée par les aléas de dotations.

Un résultat important et robuste énonce que l'effet richesse pur joue en faveur du scénario hick-sien. Un autre énonce que l'effet information pur joue en faveur du scénario opposé, tant que l'information sur le devenir de l'économie ne conduit pas les individus à restructurer leur portefeuille d'investissement productif.

Armé de ces résultats, nous pouvons maintenant examiner le problème de la détermination des primes dans une économie où l'aléa fondamental est celui de la technologie de production. Pour ce faire, nous utilisons les travaux de Benninga et Protopapadakis [1986].²⁵ Ces deux auteurs étudient le signe de la prime de solidité dans le cadre d'un modèle binomial d'économie de production. Nous étendons leur étude à la prime de liquidité.

Dans leur article de 1986, Benninga et Protopapadakis font explicitement référence aux travaux de Woodward. Citons-les à ce propos :

« Woodward (1983) suggère dans son papier certaines implications possibles de la concavité [de la fonction de production] sur la prime de structure par terme. Toutefois, les conclusions qu'elle expose dépendent lourdement des solutions de coin, des dotations incertaines, et de l'incomplétude des marchés. »

Benninga et Protopapadakis [1986, note 8 en bas de page 83].

Ayant analysé de façon extensive les conclusions de Woodward dans le cadre d'un modèle binomial, nous pouvons évaluer précisément le « valeur ajoutée » apportée par l'économie de production, et, en quelque sorte, répondre à l'affirmation rapportée ci-dessus.

²⁵Dans une moindre mesure, les travaux de Day [1986] sont également utilisés. Day développe un modèle en temps discret où l'incertitude est décrite par des lois de probabilité continues. Ses conclusions quant aux primes L et S sont obtenues sous hypothèse de rendements constants et d'utilité logarithmique.

4.4.2 L'économie de production

L'hypothèse des dotations aléatoires est abandonnée. Mais, plutôt que de compliquer inutilement l'analyse en attribuant à chaque date une dotation non-aléatoire, nous offrons uniquement à l'individu une dotation initiale \bar{c} , livrée à la date 0.

Les aléas de production sont introduits sous la forme d'un système complet de six technologies primitives : la technologie i est telle qu'un investissement z_i effectué dans l'état précédent i procure un rendement $\alpha_i q(z_i)$ à la date suivante, si et seulement si l'état i se réalise. La fonction $q(\cdot)$ est spécifiée de la même façon que précédemment : elle ne dépend que du montant investi, croît avec ce montant ($q'(\cdot) > 0$), et est à rendements décroissants ($q''(\cdot) < 0$).

Les coefficients d'efficacité α_i des six technologies permettent de les ordonner selon leur rendement marginal, indépendamment des montants investis : si $i > j$, la technologie i sera toujours plus efficace que la technologie j , quels que soient les investissements réalisés dans ces deux technologies. Les résultats du modèle ci-après dépendent, de façon cruciale, de cette possibilité d'ordonnement, et on imagine aisément les difficultés supplémentaires qu'introduirait son abandon.

On notera que l'utilisation de technologies « primitives » ne met pas en cause le réalisme du modèle, parce qu'une technologie « complexe » (c'est-à-dire délivrant des outputs dans plusieurs états) peut toujours être exprimée comme une somme de technologies primitives. Il existe une correspondance étroite entre technologies primitives et technologies complexes, tout à fait similaire à celle établie précédemment entre droits contingents purs et titres financiers négociables.

À l'équilibre d'une économie de production composée d'individus identiques, les marchés de titres contingents sont désertés. Dans le cadre de ce modèle, les contraintes de budget s'expriment sous la forme

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \bar{c} - z_1 - z_2 \\
 c_1 &= \alpha_1 q(z_1) - z_3 - z_4 \\
 c_2 &= \alpha_2 q(z_2) - z_5 - z_6 \\
 c_3 &= \alpha_3 q(z_3) \\
 c_4 &= \alpha_4 q(z_4) \\
 c_5 &= \alpha_5 q(z_5) \\
 c_6 &= \alpha_6 q(z_6).
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

La fonction à maximiser est toujours $E(V(c^0, \tilde{c}^1, \tilde{c}^2))$, donnée par (4.1) page 290, et les conditions

du premier ordre sont

$$\frac{1}{\alpha_i q'(z_i)} = p_i \quad \forall i = 1, \dots, 6 \quad (4.24)$$

où les prix d'état p_1 à p_6 sont donnés par (3.4). La distribution de probabilité du taux d'intérêt court futur est donc telle que

$$\frac{1}{1 + \tilde{r}^1} = \begin{cases} \frac{1}{1+r_1} = \frac{1}{\alpha_3 q'(z_3)} + \frac{1}{\alpha_4 q'(z_4)} & \text{avec une probabilité } \pi_1 \\ \frac{1}{1+r_2} = \frac{1}{\alpha_5 q'(z_5)} + \frac{1}{\alpha_6 q'(z_6)} & \text{avec une probabilité } \pi_2. \end{cases} \quad (4.25)$$

Comme on pouvait s'y attendre, le taux court futur dépend maintenant des coefficients d'efficacité des quatre technologies disponibles à la date 1.

Comme précédemment, trois équations sont construites pour appuyer les démonstrations :

$$\frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \times \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \times \frac{q'(z_1)}{q'(z_2)} \quad (4.26)$$

$$\frac{u'(c_5)}{u'(c_3)} \times \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\pi_3}{\pi_5} \times \frac{\alpha_3}{\alpha_5} \times \frac{q'(z_3)}{q'(z_5)} \quad (4.27)$$

$$\frac{u'(c_6)}{u'(c_4)} \times \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{\pi_4}{\pi_6} \times \frac{\alpha_4}{\alpha_6} \times \frac{q'(z_4)}{q'(z_6)}. \quad (4.28)$$

4.4.3 L'effet richesse

Benninga et Protopapadakis démontrent que la prime de solidité est négative lorsque les possibilités de production à la date 1 ne dépendent pas de l'état réalisé.²⁶ En terme de scénario de primes L et S , on obtient :

Théorème 4 *Lorsque seul l'effet richesse joue dans l'économie de production décrite ici, le scénario actif est presque toujours le scénario hicksien.*

²⁶Voir le théorème 4 p.400 et son extension pp.401–402 dans l'article de 1986.

Preuve :

On introduit $\pi_3 = \pi_5$ (et donc $\pi_4 = \pi_6$), $\alpha_3 = \alpha_5$ et $\alpha_4 = \alpha_6$ dans les contraintes (4.23) ainsi que dans les équations (4.27) et (4.28). Comme précédemment, trois cas sont à examiner.

1) $c_1 < c_2$

Si $c_1 < c_2$, (4.27) implique $u'(c_5)/u'(c_3) < q'(z_3)/q'(z_5)$, soit, utilisant (4.23-3) et (4.23-5), $z_3 < z_5$ et $c_3 < c_5$. De la même façon, on montre que $z_4 < z_6$ et $c_4 < c_6$. On déduit alors, par (4.25), que $1 + r_1 > 1 + r_2$. L'expression de $E_m(u'(\tilde{c}^2))$ montre, par ailleurs, que $E_1(u'(\tilde{c}^2)) > E_2(u'(\tilde{c}^2))$. On a donc bien $S < 0$ et $L > 0$.

2) $c_1 = c_2$

Si $c_1 = c_2$ alors (4.27), (4.23-3) et (4.23-5) aboutissent à $z_3 = z_5$ et $c_3 = c_5$, et (4.28), (4.23-4), (4.23-6) à $z_4 = z_6$ et $c_4 = c_6$. Comme $1 + r_1 = 1 + r_2$, le taux n'est pas aléatoire et $S = L = 0$. Ce cas est exceptionnel.

3) $c_1 > c_2$

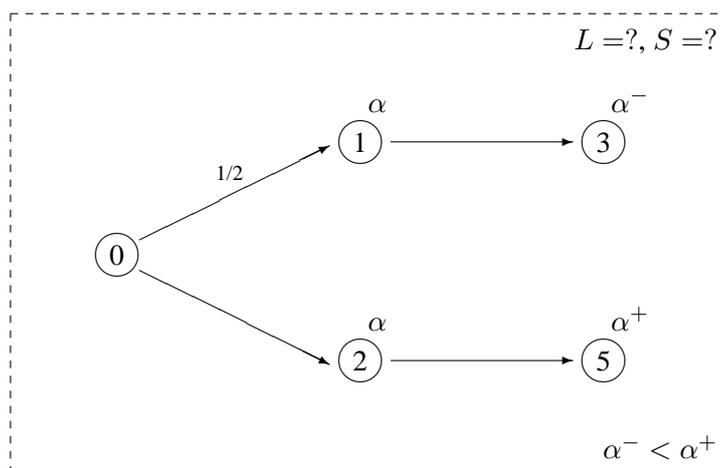
Si $c_1 > c_2$, la procédure suivie dans le premier cas conduit à $z_3 > z_5$, $c_3 > c_5$, et $z_4 > z_6$, $c_4 > c_6$. Il vient $u'(c_1) < u'(c_2)$, $1 + r_1 < 1 + r_2$, $E_1(u'(\tilde{c}^2)) < E_2(u'(\tilde{c}^2))$, et donc $S < 0$ et $L > 0$.

CQFD.

L'effet richesse est donc toujours tel que le taux d'intérêt soit fort dans l'état riche (en terme de consommation) à la date 1.

Ainsi, dans une économie où aucun indicateur avancé ne vient apporter d'information sur l'avenir, on devrait s'attendre à ce que le bon court soit systématiquement considéré comme un instrument plus sûr que le bon long.

Concernant l'effet richesse, les résultats sont identiques à ceux obtenus précédemment. Ceci confirme la robustesse de la conclusion, et montre également que la prise en compte d'une technologie aléatoire n'apporte ici rien de fondamentalement nouveau.



Graphe n°17

4.4.4 L'effet information

Conformément à la procédure suivie par Benninga et Protopapadakis, nous pourrions chercher à étendre ce résultat en ajoutant à l'effet richesse un effet information. Les résultats qu'ils obtiennent ainsi ne sont pas interprétables en terme de prime de liquidité. Conformément à la démarche suivie jusqu'ici, nous préférons examiner, dans un premier temps, l'effet information pur.

Les résultats obtenus en la matière, dans le cadre du modèle d'économie intermédiaire à technologie complète, nous incitent à la prudence. Sachant que l'arrivée d'un message produit des effets ambigus sur les primes, lorsqu'il incite les agents à restructurer leur portefeuille, il semble raisonnable de commencer l'examen par une configuration qui gèle ces restructurations.

Cette configuration est représentée par le graphe n°17. Sur ce graphe, les coefficients d'efficacité sont portés près des états. Les contraintes de budget sont

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \bar{c} - z_1 - z_2 \\
 c_1 &= \alpha q(z_1) - z_3 \\
 c_2 &= \alpha q(z_2) - z_5 \\
 c_3 &= \alpha^- q(z_3) \\
 c_5 &= \alpha^+ q(z_5).
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

et on dispose de

$$\frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{q'(z_1)}{q'(z_2)}
 \tag{4.30}$$

$$\frac{u'(c_5)}{u'(c_3)} \times \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} < \frac{q'(z_3)}{q'(z_5)}. \quad (4.31)$$

Trois cas sont possibles.

1) $c_1 < c_2$

Cette inégalité implique $z_1 > z_2$ par (4.30), $z_3 > z_5$ et $c_3 < c_5$ par (4.31), (4.29-3), (4.29-5), ou encore par (4.29-1) et (4.29-2). Comme $\alpha^- q'(z_3) < \alpha^+ q'(z_5)$, il vient $1 + r_1 < 1 + r_2$. Ainsi, on obtient dans ce premier cas $S > 0$ et $L < 0$, soit un scénario anti-hicksien.

2) $c_1 = c_2$

Il vient immédiatement $z_1 = z_2$, $z_3 = z_5$, $c_3 < c_5$, et donc $1 + r_1 < 1 + r_2$. On a ici $S = 0$, $L < 0$. Ce cas est exceptionnel.

3) $c_1 > c_2$

De $z_1 < z_2$ obtenu par (4.30), on déduit $z_3 < z_5$ par (4.29-1) et (4.29-2), puis $c_3 < c_5$ par (4.29-3) et (4.29-5). On vérifie que ces résultats sont compatibles avec (4.31). Le sens de l'inégalité entre $\alpha^- q'(z_3)$ et $\alpha^+ q'(z_5)$ est ici indéterminé, et il y a donc ambiguïté sur le taux d'intérêt.

Avant tout, on remarque que les trois cas ci-dessus sont tels que $c_3 < c_5$. Cette inégalité est simplement l'expression d'un comportement rationnel : comme $\alpha^- < \alpha^+$, le transfert de consommation est toujours plus inefficace lorsqu'il se fait vers l'état 3 plutôt que vers l'état 5. Toutes les autres conditions étant identiques, consommer plus dans l'état 5 serait déraisonnable.

Par contre, la politique d'investissement qui permet d'obtenir cette condition optimale $c_3 < c_5$ reste indéterminée : la transformation étant moins efficace dans l'état 1, un investissement plus fort dans cet état n'est pas forcément synonyme de consommation plus forte à la date 2.

Comme on le voit, le premier cas reproduit fidèlement le résultat obtenu sur la configuration similaire, dans le cadre du modèle d'économie intermédiaire à technologie complète (graphe n°16, page 307). Le deuxième cas étant, par nature, exceptionnel, l'effet spécifique des aléas technologiques peut être analysé à partir du troisième cas.

Sur le schéma n°12 sont représentées les deux courbes de produit marginal des technologies 3 et 5. Les abscisses sont placées conformément au troisième cas ($z_3 < z_5$). Selon la position de z_5 ,

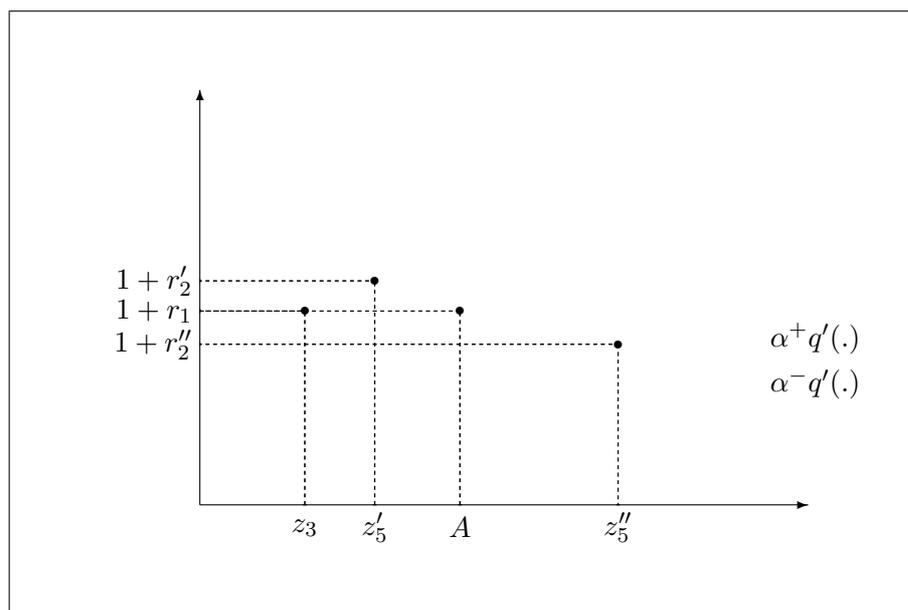


Schéma n°12 : Investissement et effet ambigu sur le taux d'intérêt.

le taux d'intérêt dans l'état 1 peut être plus ou moins élevé que dans l'état 2 : si z_5 se trouve entre z_3 et l'abscisse A , le taux sera faible dans l'état 1, si z_3 est au-delà de A , le taux sera fort dans l'état 1.²⁷

Investir plus dans une technologie plus efficace, mais à rendements marginaux décroissants, produit un effet indéterminé sur le taux d'intérêt.

Cette indétermination n'existe pas dans les deux premiers cas, où, dans l'état 1, on investit plus (ou autant) dans une technologie moins efficace. Le taux d'intérêt ne peut donc être que plus faible.

Pour lever l'indétermination attachée au troisième cas, on peut utiliser des conditions aux bornes de la fonction $q(\cdot)$.²⁸

Posons les conditions (raisonnables) suivantes : $q(0) = 0$, $q'(0) = \bar{q}$ et $q''(\cdot) \geq 1$. La première condition indique que le bien est nécessaire à toute production, la seconde que la production obtenue sur la première unité investie n'est pas infinie, et la troisième que la production rend toujours plus de biens qu'elle n'en consomme. De plus, on a toujours $q'(\cdot) > 0$ et $q''(\cdot) < 0$. Les deux courbes de produit marginal sont tracées conformément à ces conditions, sur le schéma n°13.

²⁷Si $z_3 = A$, le taux d'intérêt est non-stochastique.

²⁸Ces conditions sont utilisées par Benninga et Protopapadakis pour examiner la prime de solidité dans un cas mixte d'effet richesse et effet information.

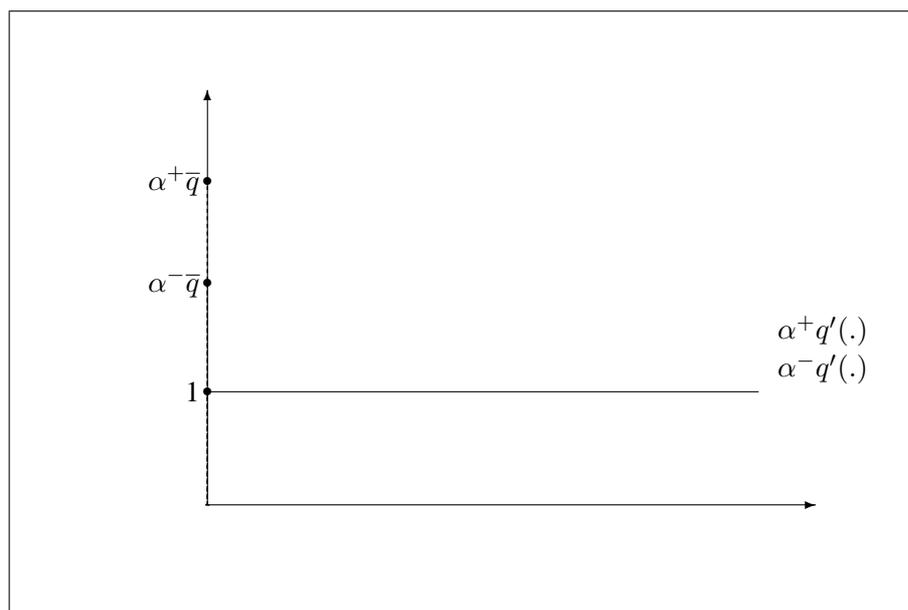


Schéma n°13 : Deux courbes de produit marginal.

cas	effet information seul	effet information et effet efficacité
$c_1 < c_2$	scénario anti-hicksien $L < 0$ et $S > 0$	
$c_1 = c_2$	$L < 0$ et $S = 0$	
$c_1 > c_2$?	scénario d'habitat préféré $L < 0$ et $S < 0$

Tableau n°2 : Effet information et effet efficacité en économie de production.

De ces conditions, on déduit que $\alpha^-q'(z_3) \leq \alpha^-q$ et $\alpha^+q'(z_5) \geq \alpha^+$. Donc, si $\alpha^-q < \alpha^+$, on est certain d'avoir $1+r_1 < 1+r_2$. En d'autres termes, si l'efficacité de la production est suffisamment faible dans l'état 1, le taux d'intérêt le sera aussi, quelle que soit la politique d'investissement. Dans ce cas, un « effet efficacité » domine les effets de l'investissement.²⁹

Si on admet ceci, le taux d'intérêt dans l'état 1 est toujours faible, et le troisième cas examiné ci-dessus ($c_1 > c_2$) est résolu : ayant montré que $c_3 < c_5$, il vient naturellement $S < 0$ et $L < 0$. Le scénario actif est donc le scénario d'habitat préféré.

Les résultats obtenus sur l'effet information sont résumés dans le tableau n°2. Globalement, l'effet

²⁹Pour assurer la domination de l'effet efficacité, nous aurions pu également imposer aux fonctions de production d'être linéaires, c'est-à-dire d'exhiber des rendements marginaux constants. Dans ce cas, on a en effet $\alpha^-q'(z) = \alpha^-q$ et $\alpha^+q'(z) = \alpha^+q$, et donc $\alpha^-q'(z) < \alpha^+q'(z)$. Ceci nous indique que tous les résultats de Day sont obtenus sous hypothèse d'une domination de cet effet.

information, allié à l'effet efficacité, laisse indéterminé le signe de la prime de solidité, mais impose à la prime de liquidité d'être négative.

La prime L est négative parce que l'état 1 est en même temps un état de faible taux d'intérêt et de consommation anticipée faible. L'investissement financier dans cet état est donc peu rémunéré, dans une situation qui, elle-même, s'annonce sombre. *Ceteris paribus*, les individus vont se porter à la date 0 sur les titres longs, qui les protègent contre l'arrivée d'une mauvaise nouvelle à la date 1.

L'ambiguïté sur le signe de L a été levée, en supposant que la survenance de l'état 1 annonçait une chute de l'efficacité des processus de production si grande que les effets de rendement d'échelle ne jouent plus. Le taux à la date 1 devient le jeu de facteurs techniques, et n'est plus influencé par le comportement des individus.

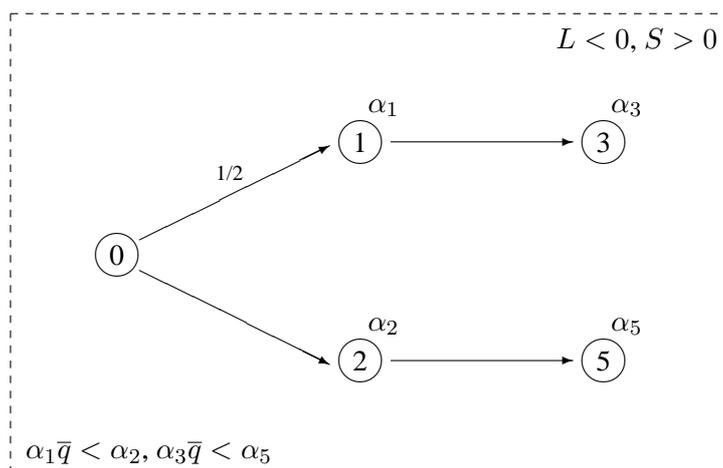
4.4.5 Primes et autocorrélation de la productivité du capital

Dans une économie de production, l'effet information seul ne permet pas de comparer les bons courts et longs du point de vue d'un horizon proche. Est-il possible de faire intervenir l'effet richesse de façon à lever cette impossibilité ?

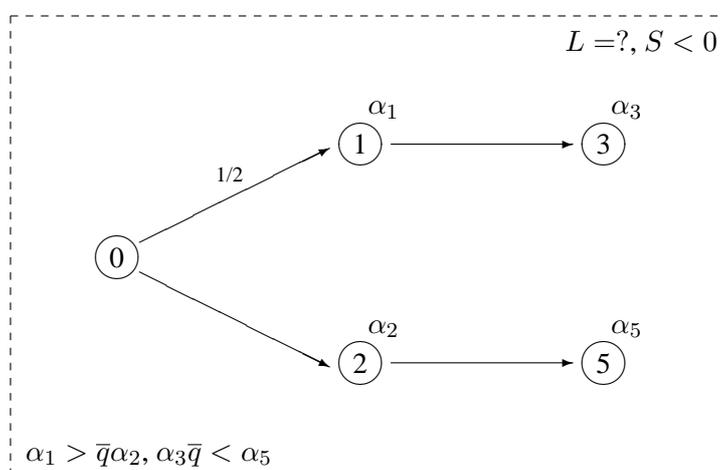
Pour répondre à cette question, on peut utiliser un résultat établi par Day [1986, p.176] et par Benninga et Protopapadakis [1986, p.403] : une autocorrélation positive (négative) de la production induit une prime de solidité positive (négative).

Examinons ceci à partir de notre configuration, en supposant, dans un premier temps, que cette autocorrélation soit positive (graphe n°18). Si l'effet efficacité est suffisamment fort ($\alpha_1\bar{q} < \alpha_2$ et $\alpha_3\bar{q} < \alpha_5$), on obtient $L < 0$ et $S > 0$, et le scénario actif est le scénario anti-hicksien. En effet, de $\alpha_1\bar{q} < \alpha_2$, on déduit $1/\alpha_1q'(z_1) > 1/\alpha_2q'(z_2)$, c'est-à-dire $p_1 > p_2$. La définition des prix d'état implique $u'(c_1) > u'(c_2)$ et donc $c_1 < c_2$. Selon le même procédé, on obtient $u'(c_3)/u'(c_1) > u'(c_5)/u'(c_2)$ à partir de $\alpha_3\bar{q} < \alpha_5$. Ces deux derniers résultats permettent de conclure que $c_3 < c_5$, et donc, par les contraintes de budget, que $z_3 < z_5$. Comme, d'autre part, $1 + r_1 < 1 + r_2$, on a bien $L < 0$ et $S > 0$.

L'effet richesse est ici facilement repérable : $c_1 < c_2$ et $z_3 < z_5$ montrent que l'état pauvre 1 est un état de faible consommation et, en même temps, de faible investissement.



Grappe n°18



Grappe n°19

On retrouve ici le scénario anti-hicksien, présenté précédemment comme le scénario actif dans une économie de dotations aléatoires (aux effets de restructuration de portefeuille près). En quelque sorte, l'effet richesse renforce l'effet information lorsque la corrélation de l'efficacité de la production est positive.

L'autocorrélation positive joue ici le rôle suivant : elle assure que, du point de vue de la date 0, le transfert de consommation vers les états de la branche haute (états 1 et 3) est, sans ambiguïté, ressenti comme plus pénible que vers les états de la branche basse (états 2 et 5). De ce fait, la consommation est toujours plus faible dans le branche haute. Dans les états 1 et 3, l'économie est totalement déprimée : faible consommation actuelle et anticipée, faible investissement, faible taux d'intérêt.

Supposons maintenant que l'autocorrélation est négative (graphe n°19). Dans ce cas, on déduit

$c_1 > c_2$ de $\alpha_1 > \alpha_2 \bar{q}$. Des contraintes de budget, il vient $z_3 > z_5$. Comme on a toujours $1 + r_1 < 1 + r_2$, on obtient bien $S < 0$. Par contre, il est impossible de statuer sur le sens de l'inégalité liant c_3 à c_5 , et donc sur le signe de L .

Ici, de bonnes conditions de transformation de l'état 0 vers l'état 1 viennent s'opposer à la dépression générale constatée dans le cas d'autocorrélation positive. L'effet richesse induit un partage du surplus constaté dans l'état 1 ($c_1 > c_2$ et $z_3 > z_5$), et non plus un renversement de politique (tel qu'on le constate dans les cas d'effet information pur).

L'individu est donc conduit, dans l'état 1, à investir plus dans un procédé moins efficace. Ce comportement ne produit aucune ambiguïté quant au taux d'intérêt : il est faible dans l'état riche, et la situation à la date 1 est donc identique à celle qui prévalait dans les cas d'effet richesse pur ($S < 0$). Par contre, il est impossible de dire si la consommation à la date 2 (résultant de l'investissement engagé à la date 1) est plus fort dans l'état 3.

Ainsi, dans ce cas de corrélation négative, l'effet richesse ne vient pas renforcer l'effet information, mais vient le perturber.

4.5 Conclusion

En résumé de cette étude des effets de la production intertemporelle sur le signe des primes, rappelons la démarche retenue et les principaux résultats.

Nous avons d'abord reconsidéré les résultats informels obtenus par Woodward dans le cadre d'une économie intermédiaire à technologie unique. Dans la terminologie adoptée ici, ces résultats s'exprimaient sous la forme de deux propositions :

1. l'effet richesse pur joue en faveur du scénario hicksien ;
2. l'effet information pur joue en faveur du scénario anti-hicksien.

Nous avons montré que ces conclusions pouvaient être formellement prouvées, mais que son analyse du cas d'effet information pur restait imprécise. Il est apparu notamment qu'il était difficile d'établir un lien direct entre la survenance d'une « mauvaise nouvelle » concernant le futur, et un niveau élevé d'investissement. De plus, l'hypothèse d'une technologie unique s'est révélée à

plusieurs reprises contraignante, parce qu'imposant à l'investissement productif d'être un instrument imparfait de gestion du risque.

Pour cette raison, l'extension du modèle précédent au cas d'une économie de dotations aléatoires mais à technologie complète a été réalisée. La première proposition de Woodward a pu être confirmée. L'examen de la seconde proposition a permis de mettre en lumière l'influence perturbante des restructurations de portefeuille, opérées par les individus en réaction à l'arrivée d'un message sur le futur. La confirmation de la proposition relative à l'effet information a pu être obtenue en éliminant l'ambiguïté créée par ces restructurations, dans le cadre d'une économie simplifiée, dans laquelle les aléas concernent uniquement les événements lointains.

Sur la base de ces résultats, ainsi que des travaux de Benninga et Protopapadakis concernant la prime de solidité, le problème de la détermination du scénario de primes dans le cadre d'une économie de production a été abordé. Il est apparu que l'introduction d'une technologie à efficacité variable ne perturbait pas la première proposition. Par contre, et même dans le cadre du modèle simplifié, l'effet information s'est révélé totalement ambigu quant au scénario courant. Cette ambiguïté s'est avérée en partie liée à une conséquence propre des aléas technologiques : un investissement plus important dans une technologie plus efficace, mais à rendements décroissants, produit un effet indéterminé sur le taux d'intérêt. Admettant la prédominance des effets « techniques » sur les effets de la politique d'investissement, nous avons démontré que l'effet information pur conduisait à une situation dans laquelle la prime de liquidité était négative.

Suivant Benninga et Protopapadakis, nous avons alors cherché à lever l'ambiguïté planant sur la prime de solidité en introduisant un effet richesse, sous la forme d'une corrélation positive, puis négative, de l'efficacité de la production. Si un scénario bien déterminé (le scénario anti-hicksien) a pu être associé au premier cas, le signe de la prime de liquidité s'est avéré indéterminé dans le second.

Section 5 Conclusion du chapitre 4

Ainsi s'achève cette étude de l'effet richesse et de l'effet information.

Deux concepts de prime — la prime de liquidité L et la prime de solidité S — ont d'abord été définis, dans le cadre d'un modèle bipériodique d'équilibre général, fondé sur la théorie des marchés contingents. Chacune de ces primes a pu être interprétée comme une mesure du risque de consommation à un horizon particulier (horizon court ou horizon long), conditionnant les préférences des individus quant aux bons de diverse maturité. Sur ces bases, trois scénarios ont été définis, chacun d'eux correspondant à une configuration particulière du signe des primes L et S , et donc de la structure des taux :

- le scénario hicksien ($L > 0, S < 0$), tel que les individus (adverses au risque) manifestent une préférence pour les titres courts, qui les protègent relativement bien contre le risque de consommation à horizon proche et lointain. Lorsque ce scénario est actif, la structure des taux marque une tendance à être croissante avec le terme ;
- le scénario anti-hicksien ($L < 0, S > 0$), inverse du précédent. Dans ce scénario, les titres longs sont les plus sûrs, et la structure des taux est normalement décroissante ;
- le scénario d'habitat préféré ($L < 0, S < 0$), tel qu'un bon représente le plus sûr moyen de financer la consommation à l'horizon de sa maturité. Dans ce cas, le signe de la pente est indéterminé.

La structure de l'incertitude fondamentale qui affecte l'économie détermine, *via* les comportements individuels, le signe des primes et donc le scénario courant.

Le reste de ce chapitre a été consacré à l'étude de cette détermination, dans l'optique d'établir des liens directs entre l'incertitude et les primes. Pour ce faire, le modèle bipériodique a été réduit, sans perte de généralité, en un modèle binomial (dans lequel un état non-terminal est toujours suivi de deux états), plus intuitif.

Dans un premier temps, une économie d'échange pure a été considérée. Les résultats généraux, obtenus en la matière par Woodward, ont été examinés dans le cadre du modèle binomial. Il est apparu que le scénario courant dépendait, en première instance, du signe de la corrélation entre l'utilité marginale de la consommation à horizon proche et l'espérance conditionnelle de l'utilité

marginale de la consommation à horizon lointain. Dans le cas de corrélation négative, le scénario actif s'est avéré être le scénario d'habitat préféré. Dans le cas de corrélation positive, il a été nécessaire d'étudier la force relative de deux effets fondamentaux :

- l'effet richesse, défini comme l'effet de la découverte potentielle, par les individus, de l'état courant de l'économie, indépendamment de la signification de cet état quant aux événements futurs ;
- l'effet information, défini comme l'effet induit par l'arrivée potentielle d'une information sur le futur.

Toujours sous hypothèse de corrélation positive, la domination du premier de ces effets a été associée au scénario hicksien, la domination du second au scénario anti-hicksien. La structure binomiale nous a permis d'exhiber un certain nombre de configurations, correspondant aux divers cas évoqués. En particulier, des configurations isolant l'effet richesse et l'effet information ont été étudiées.

Dans un deuxième temps, la production (à rendements marginaux décroissants) a été introduite, afin d'examiner son influence sur les primes.

En premier lieu, nous avons considéré le cas d'une économie de dotations aléatoires à technologie unique. Les résultats informels obtenus en la matière par Woodward ont été démontrés puis illustrés. L'effet richesse pur a été associé au scénario hicksien, et l'effet information pur au scénario anti-hicksien. Nous avons pu constater que ces résultats étaient susceptibles de dépendre du caractère imparfait de la technologie, du point de vue de la gestion du risque.

Pour cette raison, nous avons, en second lieu, réexaminé ces résultats, dans la cadre d'une économie de dotations aléatoires, mais à technologie « complète », c'est-à-dire telle que la production puisse être utilisée comme un instrument efficace d'allocation de la consommation. Les conclusions relatives à l'effet richesse ont été maintenues, bien que les politiques d'investissement et de consommation se soient avérées plus complexes à analyser. Par contre, les conclusions relatives à l'effet information ont été fortement perturbées. Nous avons montré que ces perturbations étaient essentiellement liées aux restructurations du portefeuille d'investissement productif de l'économie, opérées en réaction à l'arrivée d'une information concernant le futur. En gelant cet effet de restructuration, il a été possible de retrouver les conclusions précédentes.

Fort de ces résultats, nous avons pu, en dernier lieu, examiner le cas le plus complexe : l'économie de production. Dans ce type d'économie, l'efficacité de la production constitue l'aléa fondamental. L'étude de Benninga et Protopapadakis concernant la prime de solidité a été invoquée.

Il s'est avéré que l'effet richesse pur était toujours associé au scénario hicksien.

Les résultats précédents nous ont conduit à analyser l'effet information indépendamment de l'effet de restructuration, source d'ambiguïté. Malgré cela, le scénario courant n'a pu être déterminé, du fait d'un phénomène propre aux aléas technologiques : investir plus dans une technologie plus efficace et à rendements marginaux décroissants produit un effet ambigu sur le taux d'intérêt. Pour résoudre cette ambiguïté, nous avons supposé que l'effet « technique » de l'efficacité dominait les effets de rendements marginaux. Dans ce cas, nous avons pu établir que la prime de liquidité était négative.

Pour résoudre le problème de la prime de solidité, nous avons étudié certains cas mixtes d'effet richesse et effet information, conformément à une procédure suivie par Benninga et Protopapadakis. Le signe de la prime de solidité s'est avéré être l'opposé du signe de l'autocorrélation de l'efficacité de la production. Mais, dans le cas de corrélation négative, il n'a pas été possible de démontrer que la prime de liquidité était positive.

Trois tableaux résument ces résultats. Le tableau n°3 présente pour chaque type d'économie étudié le scénario courant obtenu sous effet de richesse pur. Le tableau n°4 fait de même pour l'effet information pur. Enfin, le tableau n°5 résume les situations mixtes.

En conclusion, il est donc difficile de statuer définitivement sur le signe des primes S et L . Deux enseignements peuvent toutefois être tirés de ce qui précède.

1. Si les individus reçoivent très peu d'informations leur permettant de dissiper l'incertitude qui plane sur la situation future de l'économie, on doit s'attendre à ce que $S < 0$ et $L > 0$. Dans ce scénario hicksien, le bon court est sans ambiguïté l'instrument sûr et le bon long l'instrument risqué.
2. Si, par contre, l'incertitude du futur est progressivement dissipée par l'arrivée de messages (par exemple, sous la forme d'indicateurs statistiques de plus en plus précis), de façon telle que la réalisation effective des variables en cause ne constitue plus une surprise, il existe une présomption pour affirmer que $L < 0$.

Type d'économie	effet richesse
échange	$L = 0, S < 0$
intermédiaire (technologie unique)	scénario hicksien $L > 0, S < 0$
intermédiaire (technologie complète)	<i>idem</i>
production	<i>idem</i>

Tableau n°3 : Effet richesse pur et incertitude (résumé).

Type d'économie	effet information
échange	$L < 0, S = 0$
intermédiaire (technologie unique)	scénario anti-hicksien $L < 0, S > 0$
intermédiaire (technologie complète)	<i>idem</i> sauf effets de restructuration
production	$L < 0$ avec effet technique dominant, et sauf effets de restructuration

Tableau n°4 : Effet information pur et incertitude (résumé).

Type d'économie (et conditions)	signe de $Corr(u'(\tilde{c}^1), E_m(u'(\tilde{c}^2)))$	effet richesse et effet information
échange	–	scénario d'habitat $L < 0, S < 0$
	+	scénario hicksien si effet richesse dominant $L > 0, S < 0$
		scénario anti-hicksien si effet information dominant $L < 0, S > 0$
production (aléas sur états lointains, et effet efficacité)	–	$L = ?, S < 0$
	+	scénario anti-hicksien $L < 0, S > 0$

Tableau n°5 : Effet mixte et incertitude (résumé).

Conclusion générale

Nous avons montré, au cours de cette recherche, que l'analyse de la structure des taux dans un cadre d'équilibre général, constituait, à bien des égards, une démarche fructueuse. Deux points nous paraissent notamment importants.

En premier lieu, cette démarche permet de révéler les déterminants fondamentaux de la hiérarchie des taux, en replaçant le problème de la structure par terme dans le contexte d'une économie réelle. Les taux d'intérêt peuvent alors être étudiés en relation avec les paramètres exogènes de l'économie (les préférences individuelles, l'attitude des agents vis-à-vis du risque, la nature de l'incertitude qui affecte l'économie), mais aussi avec des agrégats endogènes (la consommation, l'investissement, la production). Des principes explicatifs traditionnellement réservés à l'usage exclusif des théoriciens de l'économie réelle, d'une part, et de l'économie financière, d'autre part, enrichissent conjointement l'analyse. Le plus grand mérite de cette approche globale est, à notre avis, d'avoir réconcilié la théorie de la structure des taux et la théorie traditionnelle de l'intérêt, après plusieurs décennies d'une vie presque séparée. Mieux, l'équilibre général intertemporel pose *directement* le problème du phénomène de l'intérêt en terme de structure des taux. Dans ce contexte, la théorie de la structure par terme perd de sa spécificité, mais acquiert une nouvelle dimension : elle devient tout simplement *la* théorie (standard) de l'intérêt.

En second lieu, les résultats obtenus sont solidement fondés sur une théorie microéconomique explicite et rigoureuse. Nous pensons que ce « socle » théorique, que nous avons voulu conforter, s'inscrit dans la modernité. La démocratisation de l'accès aux instruments financiers, l'intérêt grandissant du public pour la gestion de son épargne, le développement des réseaux d'information, le progressif démantèlement des barrières institutionnelles sur les marchés financiers, ... tout semble indiquer que les comportements microéconomiques de gestion de patrimoine vont accroître leur influence.

Bien entendu, les analyses proposées dans cette thèse restent tributaires d'un certain nombre d'hypothèses restrictives. Le dépassement de ces restrictions définit de possibles prolongements. Le maître mot de ces prolongements semble devoir être la *différenciation*. Celle-ci peut opérer à deux niveaux.

En premier lieu, on peut penser à une différenciation des acteurs. Il s'agit, ni plus ni moins, que de remettre en cause la fiction de l'individu représentatif, et, par là même, de rendre au marché sa fonction de coordination des actions individuelles. Ceci peut être réalisé de deux façons.

Premièrement, on peut conserver l'hypothèse d'homogénéité des préférences, mais introduire une différenciation au moyen d'asymétries d'information : si les agents n'ont pas tous accès aux mêmes informations, ils sont susceptibles de former des anticipations différentes, et donc d'exprimer des offres et demandes incompatibles sur les divers marchés. Ces derniers sont alors chargés de résoudre ces conflits *ex ante*, et de faire naître un équilibre d'anticipations.³⁰ Une asymétrie d'information mène potentiellement à des comportements mimétiques, qui peuvent conditionner la structure des taux courants (comme chez Artus [1993]). Cette voie ne manque pas d'intérêts, mais n'entre pas directement en résonance avec le problème de la structure par terme.

Deuxièmement, on peut différencier les acteurs au niveau de leurs caractéristiques comportementales. On peut procéder ici dans deux directions. La première direction consiste à introduire un type d'agent radicalement différent, par exemple l'État, dont l'objectif ne serait pas de maximiser l'espérance de son utilité intertemporelle. On fait ici un pas vers la macroéconomie, tout en conservant un cadre de travail dans lequel les comportements rationnels s'expriment de façon pleine et entière. La deuxième direction, plus orthodoxe, consiste à uniquement différencier les préférences des agents maximisateurs. On peut, par exemple, tenter de spécialiser le modèle d'équilibre général de Breeden [1979, 1986] avec agents hétérogènes, en décrivant précisément des populations d'agents aux préférences différentes. En particulier, on peut imaginer faire cohabiter des individus caractérisés par des préférences *temporelles* différentes, et, à la limite, des individus ne souhaitant consommer qu'à des instants précis du futur (leur « horizon »). On obtiendrait alors un modèle explicite de la théorie de Modigliani et Sutch, dans lequel la structure des taux révélerait une « équilibre d'habitat ».³¹ Cette voie de recherche mérite sans doute d'être explorée.

En second lieu, plutôt que de différencier les acteurs, on peut imaginer différencier les caractéristiques structurelles de l'économie. On peut, par exemple, introduire plusieurs biens. Cette voie a été explorée par de nombreux auteurs, tels Sundaesan et Breeden. On peut encore introduire une monnaie faisant l'objet d'une demande spécifique, comme dans la modélisation de type « *cash-in-advance* ». Toutefois, à l'instar de l'asymétrie d'information, ces prolongements ne concernent pas spécifiquement la dimension temporelle inhérente à la structure des taux. Plus intéressante serait une voie consistant à différencier les *processus productifs* selon cette dimension. Les modèles d'équilibre examinés dans cette thèse supposent tous que ces processus rendent leur production

³⁰ « L'économie de l'information » est, par exemple, présentée dans l'ouvrage de Laffont [1985].

³¹ Le comportement de gestion de portefeuille d'agents à horizon court et long est modélisé par Davanne, Dessaint et Francq [1990], et intégré dans un modèle d'équilibre par Artus et Kaabi [1991].

une période après leur mise en œuvre. Ceci confère au taux court un rôle privilégié du point de vue du financement de la production, et tous les taux de la structure ne sont donc pas mis sur un pied d'égalité. L'idéal serait de considérer que les agents ont accès à autant de processus de « durée » différente qu'il y a de termes dans la structure.³² Mais, avant d'étudier ce problème complexe, et quitte à privilégier un taux en particulier, il serait plus raisonnable de considérer que les processus sont plutôt « longs », c'est-à-dire qu'ils rendent leur production plusieurs périodes avant leur mise en œuvre. Cette vision plus keynésienne de la production pourrait en outre être associée à une analyse des conséquences de l'irréversibilité de l'investissement productif, qui peut conduire les individus à retarder leur décision d'investir.³³

Comme on le voit, les perspectives de recherche sont nombreuses, et beaucoup semblent prometteuses. Toutes les tentatives en la matière, qu'elles soient orthodoxes ou non, sont évidemment les bienvenues. Toutefois, nous insistons sur la nécessaire *prudence* qui doit présider à ces développements. Même si le dépassement du cadre microéconomique examiné dans cette thèse peut apparaître comme souhaitable, il serait sans doute hasardeux de le rejeter en bloc, et encore plus de l'ignorer.

³²Hirshleifer [1972] et Breeden [1986] développent quelques réflexions à ce sujet.

³³Voir l'article de Pindyck [1991].

Annexe générale

Annexe A Quelques notions et théorèmes utiles

Cette annexe énonce brièvement les quelques outils mathématiques et théorèmes dont la connaissance est indispensable à la lecture de cette thèse.

A.1 Les notations de Landau « grand O » et « petit o »

Si $A(h)$ et $B(h)$ sont deux fonctions d'une variable réelle h , on a

$$A(h) = O(B(h)) \quad \text{si} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{A(h)}{B(h)} \right| < +\infty$$

$$A(h) = o(B(h)) \quad \text{si} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{A(h)}{B(h)} \right| = 0.$$

A.2 La règle de l'Hôpital

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un voisinage de a , telles que $f(a) = g(a) = 0$ ou $f(a) = g(a) = +\infty$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

où la limite L peut être finie ou infinie.

A.3 L'inégalité de Jensen

Si X est une variable aléatoire intégrable et f une fonction convexe définie sur $X(\Omega)$ telle que $f(X)$ soit intégrable, alors $f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$. Si f est concave, l'inégalité est renversée.

Annexe B Une présentation rapide des outils du Calcul Stochastique

Cette annexe fournit une brève introduction aux outils du calcul stochastique. Pour un exposé plus complet, on peut consulter Arnold [1974], Friedman [1975], Malliaris et Brock [1982], ou Roger [1991]. Ces deux derniers ouvrages présentent en outre des applications économiques et financières.

B.1 Processus de Wiener et processus d'Itô

Le calcul stochastique traite des processus aléatoires markoviens continus, et en particulier des *processus d'Itô*. Ces derniers sont, eux-mêmes, construits comme une extension d'un processus particulier, appelé *processus de Wiener* ou *mouvement brownien*.

B.1.1 Le processus de Wiener

Fondamentalement, un processus de Wiener est un processus stochastique continu, dont les accroissements au cours du temps sont indépendants, quelle que soit la longueur de l'intervalle considéré.

Soit $z(t)$ un processus stochastique, démarrant en $z(0) = 0$, tel que le changement aléatoire $\Delta z(t) \equiv z(t + \Delta t) - z(t)$ de $z(t)$, au cours d'un intervalle de temps de longueur Δt , soit défini par

$$\Delta z(t) = \epsilon(t)\sqrt{\Delta t} + o(\Delta t),$$

où $\epsilon(t)$ est une variable aléatoire normale d'espérance nulle et de variance unitaire, dont les réalisations au cours du temps sont indépendantes (formellement, on notera $\epsilon(t) \rightsquigarrow \text{IIN}(0, 1)$), et où $o(\Delta t)$ est la notation de Landau,³⁴ désignant un terme d'ordre moins élevé que Δt .

Alors, lorsque Δt tend vers zéro, $z(t)$ décrit un processus de Wiener. Utilisant le formalisme du calcul stochastique, on dira que $z(t)$ est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dz(t) = \epsilon(t)(dt)^{1/2}$$

³⁴Voir page 329.

sous la condition initiale $z(0) = 0$.

On utilisera les règles fondamentales de calcul suivantes :

1. $dt \times dt = 0$
2. $dz(t) \times dt = 0$
3. $dz(t) \times dz(t) = dt$

ainsi que

1. $E [dz(t)] = 0$
2. $V [dz(t)] = dt$
3. $E [dz(t) dz(s)] = 0$ pour $t \neq s$.

Les propriétés suivantes du processus de Wiener $z(t)$ caractérisent son comportement dynamique :

1. La trajectoire de z est continue, mais n'est dérivable en aucun point. En effet, $dz(t)/dt = \epsilon(t)(dt)^{-1/2}$ est infiniment grand quand dt est infiniment petit.
2. Les accroissements de z sont indépendants ($\forall t_0, \dots, t_n$ tels que $t_0 < \dots < t_n$, les variables $z(t_j) - z(t_{j-1})$ sont indépendantes), normalement distribués, d'espérance nulle et de variance égale à la longueur de l'intervalle de temps considéré ($\forall t, s$ tels que $t < s$, $z(s) - z(t) \rightsquigarrow N(0, s - t)$).

B.1.2 Le processus d'Itô

Le processus d'Itô constitue une généralisation du processus de Wiener. Le comportement dynamique d'un processus d'Itô est décrit par la différentielle stochastique

$$dx(t) = \mu(x, t) dt + \sigma(x, t) dz(t),$$

où $dz(t)$ désigne l'incrément d'un processus de Wiener. Les fonctions $\mu(x, t)$ et $\sigma(x, t)$ sont appelées *paramètres infinitésimaux* du processus.

Considérant les propriétés de $z(t)$, on voit que

1. $E[dx(t)] = \mu(x, t) dt$
2. $V[dx(t)] = \sigma^2(x, t) dt,$

où l'espérance et la variance de $dx(t)$ sont considérées à l'instant t . Ainsi, le paramètre $\mu(x, t)$ est égal à l'espérance du changement de $x(t)$ par unité de temps. Il est appelé *tendance*. De même, $\sigma^2(x, t)$ est égal à la variance du changement de $x(t)$ par unité de temps. Le paramètre $\sigma(x, t)$ est appelé *coefficient de diffusion*.

À l'instar du processus de Wiener $z(t)$, le processus d'Itô $x(t)$ est continu, mais n'est dérivable en aucun point.

B.2 Lemme d'Itô et générateur différentiel

Le lemme d'Itô, ou *théorème fondamental du calcul stochastique*, permet de déterminer les paramètres infinitésimaux d'une fonction suffisamment régulière d'un processus d'Itô. On donne ici le lemme pour un processus de dimension 1, puis de dimension n . Pour une démonstration, voir par exemple Malliaris et Brock [chapitre 2, section 4].

B.2.1 Lemme d'Itô pour un processus unidimensionnel

Soit $\{x(t), t \in D\}$, $D = [0, T]$, un processus d'Itô unidimensionnel caractérisé par la différentielle stochastique

$$dx(t) = \mu(x, t) dt + \sigma(x, t) dz(t).$$

Soit $f(x, t)$ une fonction non-aléatoire, à valeur réelle, définie sur $\mathbb{R} \times D$, et possédant des dérivées partielles continues f_t , f_x , et f_{xx} .

Alors le processus $\{y(t) = f(x, t), t \in D\}$ est un processus d'Itô unidimensionnel, défini par

$$dy(t) = f_t dt + f_x dx(t) + \frac{1}{2} f_{xx} dx(t)^2.$$

Appliquant les règles sur dz , définies page 331, on montre facilement que le processus $y(t)$ s'écrit sous la forme

$$dy(t) = \alpha(x, t) dt + \delta(x, t) dz(t),$$

avec

$$\begin{aligned}\alpha(x, t) &= f_t + \mu(x, t)f_x + \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)f_{xx} \\ \delta(x, t) &= \sigma(x, t)f_x.\end{aligned}$$

Le terme $\alpha(x, t)$ représente l'espérance du changement de $y(t)$ par unité de temps. On appelle $\alpha(x, t)$ le *générateur différentiel* sur la variable d'état x , appliqué à la fonction f , et il est noté $\mathcal{L}_x[f]$.

B.2.2 Lemme d'Itô pour un processus de dimension n

Soit $\{\mathbf{X}(t), t \in D\}$, $D = [0, T]$, un processus d'Itô de dimension n caractérisé par la différentielle stochastique

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{X}, t) dt + \mathbf{S}(\mathbf{X}, t) dz(t)$$

$(n \times 1) \quad (n \times 1) \quad (n \times m) \quad (m \times 1)$

où les dimensions sont indiquées sous chaque matrice.

Soit $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ une fonction non-aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^k , définie sur $\mathbb{R}^n \times D$, et possédant des dérivées partielles continues \mathbf{F}_t , vecteur colonne de dimension $k \times 1$, \mathbf{F}_X , matrice de dimension $k \times n$, et \mathbf{F}_{XX} , matrice de dimension $(n \times n)$ dont les éléments sont des vecteurs de dimension $k \times 1$.

Alors le processus $\{\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t), t \in D\}$ est un processus d'Itô de dimension k , défini par

$$d\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}_t dt + \sum_i \mathbf{F}_{X_i} dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{X_i X_j} dX_i(t) dX_j(t)$$

Le processus $Y(t)$ s'écrit sous la forme

$$dY(t) = \underset{(k \times 1)}{\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)} dt + \underset{(k \times m)}{\mathbf{D}(\mathbf{X}, t)} \underset{(m \times 1)}{dz(t)}$$

avec, en notation abrégée,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_X \mathbf{M} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{X_i X_j} [\mathbf{S} \mathbf{S}']_{ij} dt \\ \mathbf{D}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{F}_X \mathbf{S}. \end{aligned}$$

De plus, on pourra écrire

$$\sum_i \sum_j \mathbf{F}_{X_i X_j} [\mathbf{S} \mathbf{S}']_{ij} = \text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{S}' \mathbf{F}_{XX})$$

où « tr » désigne l'opérateur de trace. S'appliquant sur une matrice $(n \times n)$ dont les éléments sont des vecteurs de dimension k , la trace désigne également un vecteur de dimension k .

Le générateur différentiel défini dans le cas unidimensionnel s'écrit donc ici sous la forme

$$\mathcal{L}_X [\mathbf{F}] = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_X \mathbf{M} + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{S}' \mathbf{F}_{XX}).$$

B.3 Moments et densité des processus usuels

En spécifiant les paramètres infinitésimaux $\mu(x, t)$ et $\sigma(x, t)$ d'un processus d'Itô, défini de façon générale par la différentielle

$$dx(t) = \mu(x, t) dt + \sigma(x, t) dz(t),$$

on détermine le comportement dynamique particulier de $x(t)$.

Certaines spécifications sont abondamment utilisées dans la littérature économique et financière.

On donne ici les propriétés statistiques des processus suivants :

1. le processus de Wiener général ;
2. le processus d'Ornstein-Uhlenbeck ;
3. le processus « racine carrée ».

Les démonstrations des moments des deux derniers processus sont tirées de Choe [1986, pp.502–503 et pp.508–509].

B.3.1 Le processus de Wiener général

Un processus de Wiener général est un processus de la forme

$$dx(t) = \mu dt + \sigma dz(t),$$

où μ et σ sont des constantes.

Pour trouver les moments de ce processus, on intègre simplement l'équation ci-dessus entre t et s .

Il vient

$$x(s) - x(t) = \mu \int_t^s d\tau + \sigma \int_t^s dz(\tau),$$

soit

$$x(s) = x(t) + \mu(s - t) + \sigma \int_t^s dz(\tau).$$

Utilisant les propriétés statistiques de dz , on trouve immédiatement

$$E[x(s) | x(t)] = x(t) + \mu T$$

$$V[x(s) | x(t)] = \sigma^2 T$$

avec $T \equiv s - t$.

La loi de probabilité de $x(s)$, sachant $x(t)$, est une normale, dont les moments ci-dessus sont notés respectivement E et V . La densité de probabilité de cette loi est donc donnée par

$$f(x(s), x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x(s) - E)^2}{V} \right\}.$$

B.3.2 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Un processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un processus de la forme

$$dx(t) = \kappa(\theta - x(t)) dt + \sigma dz(t)$$

où κ , θ et σ sont des constantes ($\kappa, \theta > 0$).

Pour trouver les moments de ce processus, on définit au préalable la variable

$$Y(x, u) = -(\theta - x(u))e^{\kappa(u-t)},$$

L'équation ci-dessus permet de calculer

$$\begin{aligned} Y(x, t) &= -(\theta - x(t)) \\ Y(x, s) &= e^{\kappa(s-t)}x(s) - \theta e^{\kappa(s-t)}. \end{aligned}$$

Le lemme d'Itô, appliqué à $Y(x, u)$, donne

$$dY(x, u) = e^{\kappa(u-t)}dx(u) - \kappa(\theta - x(u))e^{\kappa(u-t)}du.$$

Remplaçant $x(u)$ par son expression, on obtient

$$dY(x, u) = \sigma e^{\kappa(u-t)}dz(u).$$

Intégrant l'équation ci-dessus entre t et s , il vient

$$Y(x, s) - Y(x, t) = \sigma \int_t^s e^{\kappa(\tau-t)} dz(\tau).$$

On insère alors les expressions calculées pour $Y(x, s)$ et $Y(x, t)$. On obtient

$$x(s) = \theta + (x(t) - \theta)e^{-\kappa(s-t)} + \sigma e^{-\kappa(s-t)} \int_t^s e^{\kappa(\tau-t)} dz(\tau).$$

Utilisant les propriétés de dz , on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[x(s) | x(t)] &= \theta + (x(t) - \theta)e^{-\kappa T} \\ \mathbf{V}[x(s) | x(t)] &= \sigma^2 e^{-2\kappa(s-t)} \int_t^s e^{2\kappa(\tau-t)} d\tau \\ &= \sigma^2 e^{-2\kappa(s-t)} \left\{ \frac{e^{2\kappa(s-t)}}{2\kappa} - \frac{1}{2\kappa} \right\} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa T}) \end{aligned}$$

avec $T \equiv s - t$.

La loi de probabilité de $x(s)$, sachant $x(t)$, est normale, de densité

$$f(x(s), x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathbf{V}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x(s) - \mathbf{E})^2}{\mathbf{V}} \right\}$$

où \mathbf{E} et \mathbf{V} désignent respectivement l'espérance et la variance définies plus haut.

B.3.3 Le processus « racine carrée »

Un processus « racine carrée » est un processus de la forme

$$dx(t) = \kappa(\theta - x(t)) dt + \sigma \sqrt{x(t)} dz(t)$$

où κ , θ et σ sont des constantes ($\kappa, \theta > 0$).

On définit au préalable la variable

$$Y(x, u) = -(\theta - x(u))e^{\kappa(u-t)}.$$

L'équation ci-dessus permet de calculer

$$\begin{aligned} Y(x, t) &= -(\theta - x(t)) \\ Y(x, s) &= e^{\kappa(s-t)}x(s) - \theta e^{\kappa(s-t)}. \end{aligned}$$

Le lemme d'Itô appliqué à $Y(x, u)$ donne

$$dY(x, u) = e^{\kappa(u-t)}dx(u) - \kappa(\theta - x(u))e^{\kappa(u-t)}du.$$

Remplaçant $x(u)$ par son expression, on obtient

$$dY(x, u) = \sigma e^{\kappa(u-t)}\sqrt{x(u)}dz(u).$$

Intégrant l'équation ci-dessus entre t et s , il vient

$$Y(x, s) - Y(x, t) = \sigma \int_t^s e^{\kappa(\tau-t)}\sqrt{x(\tau)}dz(\tau).$$

On insère alors les expressions calculées pour $Y(x, s)$ et $Y(x, t)$. On obtient

$$x(s) = \theta + (x(t) - \theta)e^{-\kappa(s-t)} + \sigma e^{-\kappa(s-t)} \int_t^s e^{\kappa(\tau-t)}\sqrt{x(\tau)}dz(\tau).$$

Utilisant les propriétés de dz , on trouve

$$E[x(s) | x(t)] = \theta + (x(t) - \theta)e^{-\kappa T}$$

$$\begin{aligned}
V[x(s) | x(t)] &= \sigma^2 e^{-2\kappa(s-t)} \int_t^s e^{2\kappa(\tau-t)} x(\tau) d\tau \\
&= \sigma^2 e^{-2\kappa(s-t)} \int_t^s e^{2\kappa(\tau-t)} \left\{ \theta + (x(t) - \theta) e^{-\kappa(\tau-t)} \right\} d\tau \\
&= \sigma^2 e^{-2\kappa(s-t)} \left\{ \theta \int_t^s e^{2\kappa(\tau-t)} d\tau + \int_t^s e^{\kappa(s-t)} x d\tau - \theta \int_t^s e^{\kappa(s-t)} d\tau \right\} \\
&= \sigma^2 e^{-2\kappa T} \left\{ \frac{\theta}{2\kappa} (e^{2\kappa T} - 1) + x(t) \frac{1}{\kappa} (e^{\kappa T} - 1) - \frac{\theta}{\kappa} (e^{\kappa T} - 1) \right\} \\
&= \theta \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa T}) + \frac{\sigma^2}{\kappa} (x(t) - \theta) (e^{-\kappa T} - e^{-2\kappa T})
\end{aligned}$$

avec $T \equiv s - t$.

On trouve l'expression de la densité de $x(s)$, sachant $x(t)$, dans Cox, Ingersoll et Ross [1985b, p.391] :

$$f(x(s), x(t)) = c e^{-u-v} \left(\frac{u}{v} \right)^{q/2} I_q [2(uv)^{1/2}]$$

avec

$$\begin{aligned}
c &\equiv \frac{2\kappa}{\sigma^2 (1 - e^{-\kappa(s-t)})} \\
u &\equiv c x(t) e^{-\kappa(s-t)} \\
v &\equiv c x(s) \\
q &\equiv \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1
\end{aligned}$$

et $I_q[\cdot]$ est la fonction modifiée de Bessel, du premier type, et d'ordre q .

B.4 L'équation de Bellman du contrôle optimal stochastique

Soit \mathbf{X} un vecteur de m instruments et \mathbf{Y} un vecteur de k variables d'état. On cherche à résoudre le problème général suivant :

$$J(\mathbf{Y}, t) \equiv \max_{\{\mathbf{X}\}} \mathbb{E}_{\mathbf{Y}, t} \left\{ \int_t^{t'} U[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tau] d\tau + B[\mathbf{Y}, t'] \right\}$$

sous

$$d\mathbf{Y}(t) = \underset{(k \times 1)}{\mathbf{M}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t)} dt + \underset{(k \times n)}{\mathbf{S}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t)} \underset{(n \times 1)}{dz(t)}$$

où B est une fonction d'utilité terminale, appelée « fonction de leg ».

Appliquant le principe de Bellman, on écrit

$$\begin{aligned} J &\equiv \max_{\{\mathbf{X}\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Y}, t} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} U[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tau] d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t'} U[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tau] d\tau + B[\mathbf{Y}, t'] \right\} \\ &\equiv \max_{\{\mathbf{X}\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Y}, t} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} U[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tau] d\tau + \mathbf{E}_{\mathbf{Y}, t+\Delta t} \left\{ \int_{t+\Delta t}^{t'} U[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tau] d\tau + B[\mathbf{Y}, t'] \right\} \right\} \\ &\equiv \max_{\{\mathbf{X}\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Y}, t} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} U[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tau] d\tau + J(\mathbf{Y}, t + \Delta t) \right\}. \end{aligned}$$

Posant $\Delta J(\mathbf{Y}, t) \equiv J(\mathbf{Y}, t + \Delta t) - J(\mathbf{Y}, t)$, il vient

$$0 = \max_{\{\mathbf{X}\}} \mathbf{E}_{\mathbf{Y}, t} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} U[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \tau] d\tau + \Delta J(\mathbf{Y}, t) \right\}.$$

Lorsque Δt tend vers 0, la formule de la moyenne permet d'approximer l'intégrale ci-dessus par $U[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t] dt$. De plus, $J(\mathbf{Y}, t)$ étant une fonction d'un processus d'Itô, $\Delta J(\mathbf{Y}, t)$ tend vers la différentielle stochastique $dJ(\mathbf{Y}, t)$. Divisant par dt et distribuant l'espérance, il vient alors

$$0 = \max_{\{\mathbf{X}\}} \left\{ U[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t] + \frac{\mathbf{E}[dJ(\mathbf{Y}, t) | \mathbf{Y}, t]}{dt} \right\}.$$

Le terme $\mathbf{E}[dJ(\mathbf{Y}, t) | \mathbf{Y}, t]/dt$ est le générateur différentiel sur les variables d'état \mathbf{Y} , et est noté $\mathcal{L}[J]$.

Utilisant alors le lemme d'Itô multidimensionnel pour obtenir $dJ(\mathbf{Y}, t)$, et notant que $\mathbf{E}[dz(t)] = 0$, on obtient l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman du contrôle optimal stochastique :

$$0 = \max_{\{\mathbf{X}\}} \{U[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t] + \mathcal{L}[J]\}$$

avec

$$\mathcal{L}[J] = J_t + \underset{(1 \times k)(k \times 1)}{\mathbf{J}_Y} \mathbf{M} + \frac{1}{2} \underset{(k \times k)(k \times k)}{\text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{S}'\mathbf{J}_{YY})}$$

qui doit être résolue sous la condition

$$J(\mathbf{Y}, t') = B(\mathbf{Y}, t').$$

Bibliographie générale

- AMI, Dominique [1991]
Micro-économie des marchés financiers (équilibre général, arbitrage et marchés complets),
Thèse en Sciences Économiques, université d'Aix-Marseille 2, 1991.
- ARNOLD, Ludwig [1974]
Stochastic Differential Equations, New York: John Wiley and Sons, Inc, 1974.
- ARROW, Kenneth J. [1964]
« The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing », *Review of Economic Studies*, vol.31, n°2, April 1964, pp.91–96.
- ARTUS, Patrick [1987]
« Structure par terme des taux d'intérêt : théorie et estimations dans le cas français », *Cahiers Économiques et Monétaires*, n°27, 1987, pp.5–48.
- ARTUS, Patrick [1989]
« Déterminants macroéconomiques de la structure des taux », *Document de travail de la Caisse des Dépôts et Consignations*, n°1989–10, mars 1989.
- ARTUS, Patrick [1990]
« Primes de risque et taux d'intérêt », *Économie et Statistique*, n°236, octobre 1990, pp.25–36.
- ARTUS, Patrick, Christophe BELHOMME, Cindy ELALOUF et Alain MINCZELES [1992]
« Les déformations de la structure des taux et la couverture du risque de taux d'intérêt », *Document de travail de la Caisse des Dépôts et Consignations*, n°1992–01/F, mai 1992.
- ARTUS, Patrick, et Ph. DUCOS [1989]
« La structure des taux a-t-elle des déterminants de long terme ? », *Document de travail de la Caisse des Dépôts et Consignations*, n°1989–05, février 1989.
- ARTUS, Patrick, et Moncef KAABI [1991]
« Horizon financier et structure des taux d'intérêt », *Document de travail de la Caisse des Dépôts et Consignations*, n°1991–02/T, février 1991.
- ARTUS, Patrick, et Moncef KAABI [1993]
« Mimétisme : un modèle théorique simple et une application au cas de la structure des taux aux États-Unis, en Allemagne et en France », *Document de travail de la Caisse des Dépôts et Consignations*, n°1993–11/F, juin 1993.
- ARTUS, Patrick, Moncef KAABI et Julien LEFOURNIER [1990]
« Arbitrage sur la structure des taux aux États-Unis, au Japon, en Allemagne, en France : l'apport des variables économiques », *Document de travail de la Caisse des Dépôts et Consignations*, n°1990–29/E, novembre 1990.
- AVOUI-DOVI, S., M. BOUTILLIER et R. TOPOL [1989]
« Du peu de pertinence des anticipations sur le taux d'intérêt à court terme : retour à la théorie de l'habitat préféré », *Économies et Sociétés*, Série MO, n°7, avril-mai 1989, pp.43–70.
- BAILEY, Martin J. [1964]
« Discussion », *American Economic Review*, vol.54, May 1964, p.554.

- BELHOMME, Christophe [1992]
« Prime de risque et effet ARCH », *Revue Économique*, vol.43, n°1, janvier 1992.
- BELLMAN, R. [1957]
Dynamic Programming, Princeton, New-Jersey: Princeton University Press, 1957.
- BENNINGA, Simon, et Aris PROTOPAPADAKIS [1983]
« Real and Nominal Interest Rates under Uncertainty: The Fisher Theorem and the Term Structure », *Journal of Political Economy*, vol.91, 1983, pp.856–867.
- BENNINGA, Simon, et Aris PROTOPAPADAKIS [1986]
« General Equilibrium Properties of the Term Structure of Interest Rates », *Journal of Financial Economics*, vol.16, 1986, pp.389–410.
- BLACK, Fischer, et Myron S. SCHOLES [1973]
« The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, vol.81, May-June 1973, pp.637–654.
- BLANCHARD, Olivier [1981]
« Output, the Stock Market and Interest Rates », *American Economic Review*, vol.71, n°1, March 1981, pp.132–143.
- BLANCHARD, Olivier, et Lawrence H. SUMMERS [1986]
« Pourquoi les taux d'intérêt sont-ils aussi élevés », *Annales d'Économie et de Statistique*, n°3, 1986, pp.53–100.
- BONNEVILLE, E. [1981]
« Les structures des taux d'intérêt spot », *Finance*, vol.2, n°2–3, juin-octobre 1981.
- BOURGUINAT, Henri [1992]
Finance internationale, Collection Thémis Économie, PUF, 1992.
- BOUVIER, F., P. BRUGIÈRE, M. COULIBALY, Ph. GUDIN DE VALLERIN et S. PHELOUZAT [1989]
« Un essai de compréhension des déformations de la structure par terme des taux d'intérêt en France », sous la direction de Patrick ARTUS, Ph. DUCOS et Alain MINCZELES, *Document de travail de la Caisse des Dépôts et Consignations*, n°1989–18, juin 1989.
- BREEDEN, Douglas T. [1979]
« An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities », *Journal of Financial Economics*, vol.7, September 1979, pp.265–296.
- BREEDEN, Douglas T. [1986]
« Consumption, Production, Inflation and Interest Rates: A Synthesis », *Journal of Financial Economics*, vol.16, 1986, pp.3–39.
- BREEDEN, Douglas T., et Robert H. LITZENBERGER [1978]
« Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices », *the Journal of Business*, vol.51, October 1978, pp.621–651.

BRENNAN, Michael J., et Eduardo S. SCHWARTZ [1979]
« A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds », *Journal of Banking and Finance*, vol.3, n°2, September 1979, pp.133–155.

BRENNAN, Michael J., et Eduardo S. SCHWARTZ [1982]
« An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol.17, 1982, pp.301–329.

BROWN, Stephen J., et Philip H. DYBVIG [1986]
« The Empirical Implication of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates », *the Journal of Finance*, vol.41, n°3, July 1986, pp.617–632.

BUSE, A. [1967]
« Interest Rates, the Meiselman Model and Random Numbers », *Journal of Political Economy*, vol.75, February 1967, pp.49–62.

BUSE, A. [1970]
« Hicks, Lutz, Meiselman and the Expectations Theory », *Review of Economic Studies*, vol.37, July 1970, pp.395–406.

CAMPBELL, John Y. [1986]
« A Defense of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates », *the Journal of Finance*, vol.41, n°1, March 1986, pp.183–193.

CAMPBELL, John Y., et Robert J. SHILLER [1984]
« A Simple Account of the Behavior of Long-Term Interest Rates », *American Economic Review*, vol.74, n°2, May 1984, pp.44–48.

CARLETON, William R., et Ian COOPER [1976]
« Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates », *the Journal of Finance*, vol.31, n°4, September 1976, pp.1067–1083.

CASS, David, et John E. STIGLITZ [1970]
« The Structure of Investor Preferences and Asset Returns, and Separability in Portfolio Allocation: A Contribution to the Pure Theory of Mutual Funds », *Journal of Economic Theory*, vol.2, 1970, pp.122–160.

CHOE, Heungsik [1986]
Taux d'intérêt, structure à terme des taux d'intérêt et évaluation des actifs au sein des modèles d'équilibre des actifs financiers, Thèse d'État en Gestion, université de Paris-Dauphine, 1986.

COLLETAZ, Gilbert [1980]
La structure à terme des taux d'intérêt : anticipations, risque et hétérogénéité des prévisions sur les marchés financiers français, Thèse d'État en Sciences Économiques, université d'Orléans, 1980.

COLLETAZ, Gilbert [1986]
« Prévisions explicites de taux d'intérêt en France : une étude empirique sur la période 1981-1985 », *Finance*, vol.7, n°2, décembre 1986, pp.111–134.

- COX, John C., Jonathan E. INGERSOLL et Stephen A. ROSS [1979]
 « Duration and the Measurement of Basis Risk », *the Journal of Business*, vol.52, n°1, January 1979, pp.51–61.
- COX, John C., Jonathan E. INGERSOLL et Stephen A. ROSS [1981]
 « A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates », *the Journal of Finance*, vol.36, n°4, September 1981, pp.769–799.
- COX, John C., Jonathan E. INGERSOLL et Stephen A. ROSS [1985a]
 « An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices », *Econometrica*, vol.53, n°2, March 1985, pp.368–384.
- COX, John C., Jonathan E. INGERSOLL et Stephen A. ROSS [1985b]
 « A Theory of the Term Structure of Interest Rates », *Econometrica*, vol.53, n°2, March 1985, pp.385–406.
- COX, John C., et Stephen A. ROSS [1976]
 « The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes », *Journal of Financial Economics*, vol.3, January-March 1976, pp.145–166.
- CULBERTSON, John M. [1957]
 « The Term Structure of Interest Rates », *Quarterly Journal of Economics*, vol.71, n°4, November 1957, pp.485–517.
- CULBERTSON, John M. [1965]
 « The Interest Rate Structure: Toward Completion of the Classical System », in *The Theory of Interest Rates*, F.H. Hahn and P.R. Brechling eds., London: Macmillian & Co, 1965.
- DANTAS, D.V., et R. DORNBUSCH [1984]
 « Anticipated Budget Deficit and the Term Structure of Interest Rates », *National Bureau of Economic Research working papers*, n°1518, December 1984.
- DAVANNE, Olivier, Joël DESSAINT et Thierry FRANCO [1990]
 « Primes de risque et politique monétaire », *Économie et Statistique*, n°236, octobre 1990, pp.7–23.
- DAY, Theodore E. [1986]
 « Information, Production, and the Term Structure », *Journal of Political Economy*, vol.94, n°1, 1986, pp.167–184.
- DE LA BRUSLERIE, Hubert [1987]
 « Le status théorique de la prime de risque dans la structure à terme des taux », *Économies et Sociétés*, Série SG 11, n°12, décembre 1987, pp.5–42.
- DOBSON, Steven W., Richard SUTCH et David E. VANDERFORD [1976]
 « An Evaluation of Alternative Empirical Models of the Term Structure of Interest Rates », *the Journal of Finance*, vol.31, n°4, September 1976, pp.1035–1065.
- DOTHAN, L. Uri [1978]
 « On the Term Structure of Interest Rates », *Journal of Financial Economics*, vol.6, n°1, March 1978, pp.59–69.

- DEBREU, Gerard [1959]
Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium, New York: Wiley, 1959.
- DUFFIE, D., et Chi-Fu HUANG [1985]
« Implementing Arrow-Debreu Equilibria by Continuous Trading of Few Long-Lived Securities », *Econometrica*, vol.53, November 1985, pp.1337–1356.
- DUNN, Kenneth B., et Kenneth J. SINGLETON [1986]
« Modeling the Term Structure of Interest Rates Under Non-Separable Utility and Durability of Goods », *Journal of Financial Economics*, vol.17, 1986, pp.27–55.
- ENGLE, Robert F., David M. LILIEN et Russell P. ROBINS [1987]
« Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model », *Econometrica*, vol.55, n°2, March 1987, pp.391–407.
- FAMA, Eugene F. [1970]
« Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work », *the Journal of Finance*, vol.25, May 1970, pp.383–417.
- FAMA, Eugene F. [1976a]
Foundations of Finance, New York: Basic Books, 1976.
- FAMA, Eugene F. [1976b]
« Forward Rates as Predictors of Future Spot Rates », *Journal of Financial Economics*, vol.3, n°4, October 1976, pp.361–377.
- FAMA, Eugene F. [1984a]
« The Information in the Term Structure », *Journal of Financial Economics*, vol.13, n°4, December 1984, pp.509–528.
- FAMA, Eugene F. [1984b]
« Term Premiums in Bond Returns », *Journal of Financial Economics*, vol.13, n°4, December 1984, pp.529–546.
- FISHER, Irving [1896]
Appreciation and Interest, publication of the American Economic Association, 1896.
- FISHER, Irving [1930]
The Theory of Interest, New York: Macmillan, 1930.
- FLEMING, W.H., et R.W. RISHEL [1975]
Deterministic and Stochastic Optimal Control, New York: Springer-Verlag, 1975.
- FRIEDMAN, Avner [1975]
Stochastic Differential Equations and Applications, vol.1, New York: Academic Press, 1975.
- FRIEDMAN, Benjamin M., et V. Vance ROLEY [1979]
« Investors' Portfolio Behavior Under Alternative Models of Long Term Interest Rate Expectations: Unitary, Rational or Autoregressive », *Econometrica*, vol.47, n°6, November 1979, pp.1475–1497.

- FROOT, Kenneth A. [1989]
« New Hope for the Expectation Hypothesis of the Term Structure of Interest Rates », *the Journal of Finance*, vol.44, n°2, June 1989, pp.283–305.
- GARMAN, Mark B. [1976]
« A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes », *Unpublished working paper*, IBER n°50, University of California at Berkeley, 1976.
- GIBBONS, Michael R., et Krishna RAMASWAMY [1986]
« The Term Structure of Interest Rates: Empirical Evidence », *Unpublished manuscript*, Stanford University, November 1986.
- GIBSON, Rajna [1990]
Obligations et clauses optionnelles, Collection Finance, PUF, 1990.
- GOURLAOUEN, Jean-Pierre [1988]
« Une nouvelle exploration de la structure par terme des taux d'intérêt », *Économies et Sociétés*, n°1, 1988, pp.271–300.
- HAKANSSON, Nils H. [1970]
« Optimal Investment and Consumption Strategies under Risk for a Class of Utility Functions », *Econometrica*, vol.38, 1970, pp.587–607.
- HICKS, John R. [1939]
Valeur et capital : enquête sur divers principes fondamentaux de la théorie économique, Collection Finance et Économie Appliquée, Dunod, 1981.
- HIRSHLEIFER, Jack [1972]
« Liquidity, Uncertainty, and the Accumulation of Information », in *Uncertainty and Expectations in Economics*, C.F. Carter and J.L. Fords eds., Oxford: Basil Blackwell, 1972, pp.136–147.
- KANE, Edward J. [1983]
« Nested Tests of Alternative Term-Structure Theories », *Review of Economics and Statistics*, vol.65, n°1, February 1983, pp.115–123.
- KANE, Edward J., et Burton G. MALKIEL [1967]
« The Term Structure of Interest Rates: An Analysis of a Survey of Interest-Rate Expectations », *Review of Economics and Statistics*, vol.46, August 1967, pp.343–355.
- KESSEL, Reuben A. [1965]
The Cyclical Behavior of the Term Structure of Interest Rates, New York: National Bureau of Economic Research, 1965.
- KEYNES, John M. [1930]
A Treatise on Money, London, 1930.
- KEYNES, John M. [1936]
Théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie, Bibliothèque scientifique Payot, Payot, 1988.

- LAFFONT, Jean-Jacques [1985]
Cours de théorie microéconomique, vol.2 : Économie de l'incertain et de l'information, Collection Économie et Statistiques Avancées, Économica, 1985.
- LANGETIEG, Terence C. [1980]
« A Multivariate Model of the Term Structure », *the Journal of Finance*, vol.75, March 1980, pp.71–98.
- LEROY, Stephen F. [1982a]
« Expectations Models of Asset Prices: A Survey of Theory », *the Journal of Finance*, vol.37, n°1, May 1982, pp.185–217.
- LEROY, Stephen F. [1982b]
« Risk Aversion and the Term Structure of Real Interest Rates », *Economics Letters*, vol.10, 1982, pp.355–361.
- LEROY, Stephen F. [1983]
« Risk Aversion and the Term Structure of Real Interest Rates, correction », *Economics Letters*, vol.12, 1983, pp.339–340.
- LEROY, Stephen F. [1984]
« Nominal Prices and Interest Rates in General Equilibrium », *the Journal of Business*, vol.57, April 1984, pp.177–214.
- LEROY, Stephen F., et Charles J. LACIVITA [1981]
« Risk Aversion and the Dispersion of Asset Prices », *the Journal of Business*, vol.54, October 1981, pp.535–547.
- LINTNER, John [1965a]
« Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification », *the Journal of Finance*, vol.20, December 1965, pp.587–616.
- LINTNER, John [1965b]
« The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets », *Review of Economics and Statistics*, vol.47, February 1965, pp.13–37.
- LONG, John Jr. [1974]
« Stock Prices, Inflation, and the Term Structure of Interest Rates », *Journal of Financial Economics*, vol.1, July 1974, pp.131–170.
- LONGSTAFF, Francis A. [1989]
« A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates », *Journal of Financial Economics*, vol.23, 1989, pp.195–224.
- LONGSTAFF, Francis A., et Eduardo S. SCHWARTZ [1992]
« Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-factor General Equilibrium Model », *the Journal of Finance*, vol.97, n°4, September 1992, pp.1259–1282.
- LUTZ, Friedrich A. [1940]
« The Structure of Interest Rates », *Quarterly Journal of Economics*, vol.55, November 1940, pp.36–63.

- LUTZ, Friedrich A., et Vera LUTZ [1951]
The Theory of Investment of the Firm, Princeton: Princeton University Press, 1951.
- MACAULAY, Frederick R. [1938]
Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States Since 1856, New York: National Bureau of Economic Research, 1938.
- MALKIEL, Burton G. [1966]
The Term Structure of Interest Rates: Expectations and Behaviour Patterns, Princeton: Princeton University Press, 1966.
- MALLIARIS, Anastasios G., et William A. BROCK [1982]
Stochastic Methods in Economics and Finance, Advanced textbook in economics, vol.17, North-Holland, 1982.
- MANKIW, N. Gregory [1986]
« The Term Structure of Interest Rates Revisited », *Brookings Papers on Economic Activity*, n°1, 1986, pp.61–96.
- MARSH, Terry E., et Eric R. ROSENFELD [1983]
« Stochastic Processes for Interest Rates and Equilibrium Bond Prices », *the Journal of Finance*, vol.38, May 1983, pp.635–645.
- MCCAFFERTY, S. [1986]
« Aggregate Demand and Interest Rates: A Macroeconomic Approach to the Term Structure », *Economic Inquiry*, October 1986, pp.521–533.
- MCCULLOCH, J. Huston [1971]
« Measuring the Term Structure of Interest Rates », *the Journal of Business*, vol.44, January 1971, pp.19–31.
- MCCULLOCH, J. Huston [1975]
« An Estimate of the Liquidity Premium », *Journal of Political Economy*, vol.83, February 1975, pp.95–119.
- MEISELMAN, David [1962]
The Term Structure of Interest Rates, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1962.
- MERTON, Robert C. [1969]
« Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: the Continuous Case », *Review of Economics and Statistics*, vol.51, August 1969, pp.247–257.
- MERTON, Robert C. [1970]
« A Dynamic General Equilibrium Model of the Asset Market and Its Application to the Pricing of the Capital Structure of the Firm », *M.I.T. working paper*, Sloan School of Management, 1970.
- MERTON, Robert C. [1971]
« Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model », *Journal of Economic Theory*, vol.3, 1971, pp.373–413.

- MERTON, Robert C. [1973a]
« Theory of Rational Option Pricing », *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol.4, spring 1973, pp.141–183.
- MERTON, Robert C. [1973b]
« An Intertemporal Capital Asset Pricing Model », *Econometrica*, vol.41, September 1973, pp.867–887.
- MERTON, Robert C. [1975]
« Theory of Finance from the Perspective of Continuous-Time », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol.10, n°4, November 1975, pp.659–674.
- MERTON, Robert C. [1976]
« Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous », *Journal of Financial Economics*, vol.3, January-March 1976, pp.125–144.
- MERTON, Robert C. [1982]
« On the Mathematics and Economics Assumption of Continuous-Time Models », in *Financial Economics: Essays in Honor of Paul Cootner*, W.F. Sharpe and C.M. Cootner eds., Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1982, pp.19–51.
- MERTON, Robert C. [1992]
Continuous-Time Finance, Cambridge, Mass. and Oxford: Blackwell, 1992.
- MO AHN, C., et H. THOMPSON [1988]
« Jump-Diffusion Processes and the Term Structure of Interest Rates », *the Journal of Finance*, vol.43, n°1, March 1988, pp.155–174.
- MODIGLIANI, Franco, et Robert J. SHILLER [1973]
« Inflation, Rational Expectations and the Term Structure of Interest Rates », *Economica*, vol.40, n°157, February 1973, pp.12–43.
- MODIGLIANI, Franco, et Richard SUTCH [1966]
« Innovations in Interest Rate Policy », *American Economic Review*, vol.56, May 1966, pp.569–589.
- MODIGLIANI, Franco, et Richard SUTCH [1967]
« Debt Management and the Term Structure of Interest Rates: An Empirical Analysis of Interest Rates », *Journal of Political Economy*, vol.75, n°4, August 1967, pp.569–589.
- MODIGLIANI, Franco, et Richard SUTCH [1969]
« The Term Structure of Interest Rates: A Re-examination of the Evidence », *Journal of Money, Credit, and Banking*, vol.1, n°1, February 1969, pp.112–120.
- MOSSIN, Jan [1966]
« Equilibrium in a Capital Asset Market », *Econometrica*, vol.34, October 1966, pp.768–783.
- MOSSIN, Jan [1969]
« Security Pricing and Investment Criteria in Competitive Markets », *American Economic Review*, vol.59, December 1969, pp.739–756.

- MUTH, John F. [1961]
« Rational Expectations and the Theory of Price Movements », *Econometrica*, vol.29, 1961, pp.315–335.
- NELSON, J., et Stephen M. SCHAEFER [1982]
« The Dynamics of the Term Structure and Alternative Portfolio Immunization Strategies », in *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, G.O. Bierwag, G. Kaufman and A. Toevs eds., JAI press, 1982.
- PHELPS, Edmund S. [1987]
« Marchés spéculatifs et anticipations rationnelles », *Revue Française d'Économie*, vol.2, n°3, Été 1987, pp.10–26.
- PINDYCK, Robert S. [1991]
« Irreversibility, Uncertainty, and Investment », *Journal of Economic Literature*, vol.29, n°3, September 1991, pp.1110–1148.
- PRAT, Georges [1992]
« Anticipations, prime de terme et maturité du titre long : que nous enseignent les données séculaires sur la structure des taux d'intérêt ? États Unis : 1873 à 1975 », *Revue Économique*, n°6, novembre 1992, pp.1037–1070.
- RICHARD, Scott F. [1978]
« An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates », *Journal of Financial Economics*, vol.6, n°1, March 1978, pp.33–57.
- RICHARD, Scott F., et Mahadevan SUNDARESAN [1981]
« A Continuous Time Equilibrium Model of Forward Prices and Futures Prices in a Multiperiod Economy », *Journal of Financial Economics*, vol.9, 1981, pp.347–372.
- ROGER, Patrick [1991]
Les outils de la modélisation financière, Collection Finance, PUF, 1991.
- ROLL, Richard [1970]
The Behaviour of Interest Rates: Application of the Efficient Market Model to U.S. Treasury Bill Rates, New York: Basic Books, 1970.
- ROLL, Richard [1971]
« Investment Diversification and Bond Maturity », *the Journal of Finance*, vol.26, n°1, March 1971, pp.51–66.
- ROSS, Stephen A. [1976]
« The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing », *Journal of Economic Theory*, vol.13, n°3, December 1976, pp.341–360.
- ROSS, Stephen A. [1977]
« Return, Risk and Arbitrage », in *Risk and Return in Finance*, vol.1, Irwin Friend and James I. Bicksler eds., Cambridge, Mass.: Ballinger, 1977, pp.189–218.
- ROSS, Stephen A. [1978]

« A Simple Approach to the Valuation of Risky Systems », *the Journal of Business*, vol.51, 1978, pp.453–475.

RUBINSTEIN, Mark [1974]

« An Aggregation Theorem for Securities Markets », *Journal of Financial Economics*, n°1, 1974, pp.225–244.

SAMUELSON, Paul A. [1969]

« Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming », *Review of Economics and Statistics*, vol.51, August 1969, pp.239–246.

SARGENT, Thomas J. [1972]

« Rational Expectations and the Term Structure of Interest Rates », *Journal of Money, Credit, and Banking*, vol.4, n°1, February 1972, pp.74–97.

SCHAEFER, Stephen M. [1973]

« On Measuring the Term Structure of Interest Rates », *Working paper*, London Business School, Institute of Finance & Accounting, 1973.

SCHAEFER, Stephen M., et Eduardo S. SCHWARTZ [1984]

« A Two-factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol.19, 1984, pp.413–424.

SHARPE, William F. [1964]

« Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk », *the Journal of Finance*, vol.19, September 1964, pp.425–442.

SHARPE, William F. [1970]

Portfolio Theory and Capital Markets, New York: MacGraw-Hill, 1970.

SHILLER, Robert J. [1979]

« The Volatility of Long Term Interest Rates and Expectations Models of the Term Structure », *Journal of Political Economy*, vol.87, n°6, December 1979, pp.1190–1219.

SHILLER, Robert J. [1981]

« Alternative Tests of Rational Expectations Models: The Case of the Term Structure », *Journal of Econometrics*, vol.16, n°1, May 1981, pp.71–87.

SHILLER, Robert J., John Y. CAMPBELL et Kermit L. SCHOENHOLTZ [1983]

« Forward Rates and Future Policy: Interpreting the Term Structure of Interest Rates », *Brookings Papers on Economic Activity*, n°1, 1983, pp.173–224.

SHILLER, Robert J., et J. Huston MCCULLOCH [1987]

« The Term Structure of Interest Rates », *National Bureau of Economic Research working papers*, n°2341, August 1987.

STIGLITZ, John E. [1970]

« A Consumption-Oriented Theory of the Demand for Financial Assets and the Term Structure of Interest Rates », *Review of Economic Studies*, vol.37, n°3, July 1970, pp.321–351.

SUNDARESAN, Mahadevan [1983]

« Constant Absolute Risk Aversion Preferences and Constant Equilibrium Interest Rates », *the Journal of Finance*, vol.28, n°1, March 1983, pp.205–212.

SUNDARESAN, Mahadevan [1984]

« Consumption and Equilibrium Interest Rates in Stochastic Production Economies », *the Journal of Finance*, vol.39, n°1, March 1984, pp.77–92.

TREYNOR, J.L. [1965]

« How to Rate Management of Investment Funds », *Harvard Business Review*, vol.43, January–February 1965, pp.63–75.

VAN HORNE, James [1965]

« Interest-Rate Risk and the Term Structure of Interest Rates », *Journal of Political Economy*, vol.73, August 1965, pp.344–351.

VASICEK, Oldrich A. [1977]

« An Equilibrium Characterization of the Term Structure », *Journal of Financial Economics*, vol.5, n°2, November 1977, pp.177–188.

VASICEK, Oldrich A., et H. Gifford FONG [1982]

« Term Structure Modeling Using Exponential Splines », *the Journal of Finance*, vol.37, n°2, May 1982, pp.339–348.

WOOD, John H. [1963]

« Expectations, Errors, and the Term Structure of Interest Rates », *Journal of Political Economy*, vol.71, n°2, April 1963, pp.160–171.

WOODWARD, Susan E. [1983]

« The Liquidity Premium and the Solidity Premium », *American Economic Review*, vol.73, n°3, June 1983, pp.348–361.

Table des matières

Introduction générale	4
Chapitre 1 Les théories traditionnelles de la structure des taux	14
1 Introduction	15
2 La structure des taux en univers certain	16
2.1 Introduction	16
2.2 Cadre d'analyse et principe de fonctionnement	16
2.3 Équations d'équilibre	20
2.4 Contraintes sur la structure des taux	23
2.5 Un positionnement théorique original	24
2.6 Conclusion	26
3 Les premières théories de la structure des taux en univers incertain	27
3.1 Introduction	27
3.2 La théorie des anticipations	27
3.3 La théorie de la prime de liquidité	32
3.4 La théorie de la segmentation	38
3.5 Une tentative de réhabilitation de la théorie des anticipations	40
3.6 La théorie synthétique de l'habitat préféré	41
3.7 Conclusion	43
4 Théorie des anticipations et anticipations rationnelles	44
4.1 Introduction	44
4.2 L'hypothèse des anticipations rationnelles	45
4.3 La théorie des anticipations mise à l'épreuve	47
4.4 Une tentative de réhabilitation	55
4.5 Conclusion	57
5 Conclusion du chapitre 1	58
Chapitre 2 Structure des taux et équilibre d'arbitrage	60
1 Introduction	61
2 Une interprétation économique des modèles stochastiques en temps continu	64
2.1 Introduction	64
2.2 Propriétés et comportement dynamique des processus d'Itô	66
2.3 Une lecture économique du calcul stochastique	69
2.4 Conclusion	77
3 Le modèle générique d'équilibre d'arbitrage sur un marché soumis à K sources d'incertitude	79
3.1 Introduction	79
3.2 La structure des taux en temps continu : définitions	80
3.3 Les hypothèses du modèle	82
3.4 Le lien entre prix et variables d'état	85
3.5 Une condition d'arbitrage	89
3.6 La prime de terme	91
3.7 Condition d'arbitrage et CAPM multifacteur	92
3.8 L'équation de structure par terme	94
3.9 Conclusion	98
4 Un réexamen de la théorie pure des anticipations à la lumière de l'équilibre d'arbitrage	100
4.1 Introduction	100
4.2 Les primes en temps continu : définitions	101
4.3 Les équations d'équilibre en univers certain	103
4.4 Quatre formulations de la théorie pure des anticipations en temps continu	104

4.5	Une théorie, trois propositions distinctes	106
4.6	L'expression des primes de terme	108
4.7	Confrontation des hypothèses au modèle à K facteurs	110
4.8	Conclusion	112
5	Les modèles explicites de structure des taux issus du modèle à K facteurs	114
5.1	Introduction	114
5.2	La structure des taux dans une économie soumise à une seule source d'incertitude : le modèle à un facteur	115
5.3	Quelques solutions particulières	122
5.4	Un ou deux facteurs ?	132
5.5	Conclusion	135
6	De l'insuffisance d'une approche par arbitrage de la structure des taux	136
6.1	Introduction	136
6.2	Contraintes sur les primes instantanées	136
6.3	Exemple d'une économie inconsistante	138
6.4	Conclusion	140
7	Conclusion du chapitre 2	142
	Annexe du chapitre 2	144
A.1	Solution pour un processus de Wiener général	144
A.2	Solution pour un processus d'Ornstein-Uhlenbeck	145
A.3	Solution pour un processus « racine carrée »	147
Chapitre 3	Structure des taux et équilibre économique général	151
1	Introduction	152
2	Équilibre économique général et prix des bons sans coupon	153
2.1	Introduction	153
2.2	Structure de l'économie et comportements : les hypothèses de base	154
2.3	L'optimum individuel	164
2.4	L'optimum collectif	176
2.5	La structure des taux à l'équilibre	192
2.6	Conclusion	198
3	Le modèle d'équilibre à un facteur de la structure des taux	199
3.1	Introduction	199
3.2	Contraintes sur les préférences	200
3.3	Contraintes sur la technologie	210
3.4	Analyse de la solution fermée	213
3.5	Conclusion	216
4	Un réexamen des théories traditionnelles, à la lumière de l'équilibre général	218
4.1	Introduction	218
4.2	La théorie pure des anticipations	218
4.3	Les théories avec prime	224
4.4	Conclusion	228
5	Conclusion du chapitre 3	230
Chapitre 4	Structure des taux et incertitude économique : effet richesse et effet in- formation en économie d'échange et de production	232
1	Introduction	233
2	Prime de liquidité, prime de solidité et risque de consommation : définition du cadre d'analyse	238
2.1	Introduction	238

2.2	La théorie des marchés contingents et le taux d'intérêt d'équilibre	239
2.3	La structure des taux dans un modèle à trois dates	247
2.4	Prime de liquidité, prime de solidité et théories traditionnelles de la structure des taux	254
2.5	Conclusion	263
3	Scénario de primes en économie d'échange pure	265
3.1	Introduction	265
3.2	Le modèle binomial	266
3.3	le cas de « corrélation négative »	273
3.4	le cas de « corrélation positive »	279
3.5	Conclusion	284
4	Scénario de primes et production	287
4.1	Introduction	287
4.2	L'analyse des résultats de Woodward	289
4.3	Scénario de primes dans une économie intermédiaire	298
4.4	Scénario de primes dans une économie de production : l'effet efficacité	308
4.5	Conclusion	318
5	Conclusion du chapitre 4	320
	Conclusion générale	324
	Annexe générale	328
A	Quelques notions et théorèmes utiles	329
A.1	Les notations de Landau « grand 0 » et « petit o »	329
A.2	La règle de l'Hôpital	329
A.3	L'inégalité de Jensen	329
B	Une présentation rapide des outils du Calcul Stochastique	330
B.1	Processus de Wiener et processus d'Itô	330
B.2	Lemme d'Itô et générateur différentiel	332
B.3	Moments et densité des processus usuels	334
B.4	L'équation de Bellman du contrôle optimal stochastique	339
	Bibliographie générale	342
	Liste des schémas	359
	Liste des graphes	361
	Liste des tableaux	363

Liste des schémas

n°1	Une structure par terme des taux d'intérêt en temps discret.	18
n°2	Les stratégies de base d'investissement sur une période de longueur n	21
n°3	Détail d'une opération de base dans une stratégie d'investissement	22
n°4	Exemple de trajectoire pour un processus de Wiener standard.	67
n°5	Exemple de trajectoire pour un processus mixte Itô et Poisson.	76
n°6	Exemple de trajectoire pour un processus de Wiener Général.	123
n°7	Exemple de trajectoire pour un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.	126
n°8	Exemple de trajectoire pour un processus « racine carrée ».	130
n°9	Structure logique du modèle d'équilibre général	178
n°10	Un cas simple de corrélation négative.	276
n°11	Un autre cas simple de corrélation négative.	278
n°12	Investissement et effet ambigu sur le taux d'intérêt.	314
n°13	Deux courbes de produit marginal.	315

Liste des graphes

n°1	267
n°2	272
n°3	275
n°4	277
n°5	278
n°6	282
n°7	284
n°8	285
n°9	290
n°10	292
n°11	296
n°12	297
n°13	297
n°14	304
n°15	305
n°16	307
n°17	312
n°18	317
n°19	317

Liste des tableaux

n°1	Scénario de primes en économie d'échange pure.	286
n°2	Effet information et effet efficacité en économie de production.	315
n°3	Effet richesse pur et incertitude (résumé).	323
n°4	Effet information pur et incertitude (résumé).	323
n°5	Effet mixte et incertitude (résumé).	323